

# Conditions frontières de contact par reprojection pour la méthode des éléments finis-particules (PFEM)

T. Leysens<sup>1</sup>, J-F. Remacle<sup>1</sup>, J. Lambrechts<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *IMMC, Université Catholique de Louvain, {thomas.leysens, jean-francois.remacle, jonathan.lambrechts}@uclouvain.be*

**Résumé** — Au sein du vaste univers de la simulation par éléments finis, une méthode spécifique, la méthode d'éléments finis-particules, plus connue sous son acronyme PFEM, permet de simuler des domaines subissant de grosses déformations ainsi que des phénomènes physiques complexes tels que les interactions fluides-structures (FSI). Une approche est proposée ici pour modéliser des conditions frontières de contact par une méthode de reprojection des noeuds, en évitant d'ajouter des éléments à l'approche d'une paroi. Ceci assure une modélisation précise de la surface de contact dans le contexte d'FSI, et améliore les propriétés de conservation de la masse en PFEM.

**Mots clés** — PFEM, conditions frontières, interactions fluide-structure.

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications d'ingénieurs, un fluide interagit avec un solide. L'évolution du fluide engendre des changements dans le comportement du solide et vice-versa. Connus sous le nom d'interactions fluide-structure, on retrouve ces problèmes entre autres dans les domaines de l'aérodynamique, d'écoulements granulaires, des objets flottants, ou encore des problèmes de ballotement d'un fluide dans un conteneur. Dans ces problèmes, la description du domaine fluide représente une difficulté majeure lorsqu'il est soumis à de grosses déformations. En effet, dans un problème *a priori* simple tel que le ballotement, l'évolution du fluide peut devenir extrêmement complexe : séparation et raccordement de différentes parties du domaine, surfaces libres à géométrie complexe, interactions avec les bords du domaine,...

Pour de telles situations, les méthodes classiques de simulations de fluides, basées sur une vision eulérienne, ne fonctionnent plus : la déformation du domaine est trop importante. En effet, les méthodes eulériennes telles que les différences finies, volumes finis ou éléments finis classiques sont adéquats par exemple pour des écoulements autour d'un obstacle. Puisque le domaine n'évolue pas, on peut donc fixer notre point de vue sur un volume constant et observer comment le fluide s'écoule au travers de ce volume, un peu comme une caméra figée. Si l'on souhaitait utiliser ces méthodes pour le cas du ballotement d'eau dans un conteneur, il faudrait simuler l'entièreté du domaine, c'est-à-dire l'eau et l'air, avec une représentation précise de l'interface entre les deux milieux. Ceci augmenterait considérablement le coût numérique. Pour des problèmes tri-dimensionnels, le coût peut même devenir insurmontable.

C'est dans ce contexte que les méthodes lagrangiennes deviennent intéressantes. En effet, si l'on peut considérer les éléments de discrétisation comme des éléments matériels du fluide, c'est-à-dire qu'ils se déplacent avec lui, l'évolution complexe du domaine devient naturellement une partie inhérente de la simulation. Un exemple d'une telle méthode est la méthode des éléments finis dite à particules (Anglais : *Particle Finite Element Method*, ou PFEM) [8]. Son succès provient du fait qu'elle combine la forte base théorique des éléments finis avec la vision lagrangienne des méthodes à particules. Grâce à cela, des évolutions complexes de topologie peuvent être simulées, comme par exemple des problèmes d'interactions fluide-structure et de surfaces libres. Cette méthode a été validée dans de nombreux cas de figure : interactions fluide-structure [1], écoulements diphasiques [7], glissements de terrain [4], ballotement [10], et même des problèmes de structures tels que des déformations inélastiques [9].

L'une des difficultés majeures de cette méthode réside dans l'imposition des conditions frontières.

En effet, puisqu'un fluide ne possède pas une forme intrinsèque, il faut dans un premier temps pouvoir en définir sa géométrie. Ceci permet de caractériser les limites du domaine, étape cruciale de la simulation. C'est ce problème qui est adressé dans cet article. L'objectif est donc d'obtenir une méthode robuste et précise pour simuler le contact entre un fluide et un bord solide du domaine, dans le cadre de la méthode PFEM.

Dans ce résumé, la méthode PFEM est d'abord brièvement présentée. Ensuite, le problème des conditions frontières est décrit et la méthode de reprojction des particules est proposée, pour enfin terminer avec quelques résultats préliminaires.

## 2 La méthode PFEM

La méthode PFEM permet de simuler des écoulements de fluides dans des contextes de surfaces libres, interactions fluide-structure, et autre situations où le domaine subit de grosses déformations. L'idée générale consiste à résoudre les équations fluides, c'est-à-dire les équations de Navier-Stokes, en discrétisant le domaine par la méthode des éléments finis et en déformant le domaine sur base de la solution obtenue à chaque pas de temps. Afin de clarifier la méthode, les équations à résoudre sont tout d'abord décrites. Les étapes sont ensuite présentées.

### 2.1 Les équations fluides

Considérons un fluide visqueux newtonien incompressible. Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire l'évolution de ce fluide. Pour un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Dans ces équations,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  est le champ de vitesse du fluide,  $p \in \mathbb{R}$  le champ de pression,  $\nu$  la viscosité cinématique, et  $\mathbf{f}$  les forces externes. Dans la méthode PFEM, la vision lagrangienne est adoptée, l'accélération matérielle est donc considérée telle quelle. Ceci permet d'éviter les non-linéarités liées au terme convectif de l'accélération dans la formulation eulérienne. Des conditions limites sur les frontières du domaine complètent la formulation du problème :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur} & \Gamma_u; \\ p &= p_\Gamma & \text{sur} & \Gamma_p. \end{aligned}$$

Pour résoudre les équations (1), une discrétisation par éléments finis est réalisée. L'approche de Galerkin est considérée, et l'on obtient alors une approximation linéaire des champs de vitesse et de pression. Etant donné cette approximation linéaire des deux champs, la stabilisation du terme d'incompressibilité est effectuée au moyen de la méthode PSPG (*Pressure-Stabilizing Petrov-Galerkin*) [6]. Une description précise des étapes de discrétisation des équations peut être retrouvée dans [8].

## 2.2 Les étapes de la PFEM

Rappelons que la méthode PFEM est une méthode à particules : le domaine est donc initialement représenté par un nuage de points. Ce sont ces points, ou particules, qui contiennent toute l'information du fluide : vitesse, densité, pression, etc. L'évolution de ces particules est dictée par les équations de Navier-Stokes décrites ci-dessus. Afin de pouvoir les résoudre, les points sont connectés par des tétraèdres, permettant d'obtenir un maillage. Cependant, il est clair que le maillage obtenu n'est pas unique, et la "forme" du domaine reste une notion ambiguë. La détection des frontières du domaine est faite à l'aide de l'algorithme des  $\alpha$ -shapes [3]. A l'aide de cet algorithme, les triangles ayant un arête dont la taille dépasse une valeur  $\alpha$  sont retirés. Les triangles restants définissent le domaine physique du fluide. Une illustration de cette idée est présentée dans la figure 1.

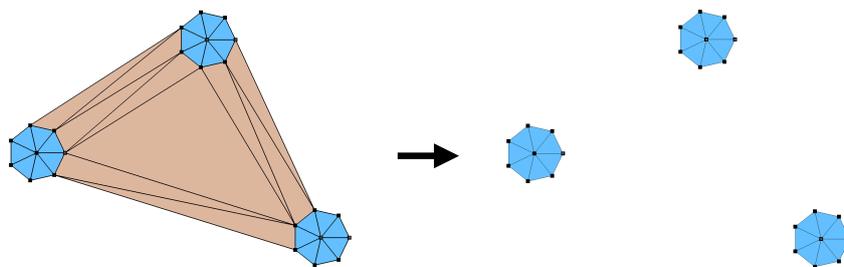


FIGURE 1 – Après avoir maillé le domaine, les triangles bruns, qui n'appartiennent en réalité pas au domaine fluide, sont retirés à l'aide de l'algorithme des  $\alpha$ -shapes.

Une fois le domaine fluide obtenu, les frontières sont détectées, et l'on peut différencier les surfaces libres des surfaces solides, et appliquer les conditions limites souhaitées. Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues sur le domaine, ce qui permet d'obtenir les champs de vitesse et de pression. Rappelons que les équations sont résolues d'un point de vue lagrangien, les noeuds se déplacent avec la vitesse du fluide. La vitesse obtenue sur les noeuds est donc exactement la vitesse lagrangienne des particules. Le vecteur déplacement pour le noeud  $i$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{D}_i^{t+1} = \mathbf{X}_i^{t+1} - \mathbf{X}_i^t = dt \cdot \mathbf{V}_i^t.$$

Une fois la position des noeuds mise à jour, le maillage du pas de temps précédent risque d'être fortement déformé. Si le maillage devient trop dégénéré, l'obtention d'une solution aux équations est mise en péril. C'est pour cette raison qu'une étape de remaillage doit être effectuée. Une fois le nouveau maillage obtenu, le pas de temps suivant peut être calculé. Les différentes étapes de la méthode PFEM sont résumées dans la figure 2.

## 3 Les conditions limites en PFEM

L'une des difficultés majeures des méthodes lagrangiennes pour la simulation de fluides réside dans l'imposition des conditions limites. En effet, étant donné que la géométrie du domaine est libre d'évoluer, il faut pouvoir en détecter les frontières. Puisque le domaine est remaillé à chaque itération, la configuration des surfaces est constamment mise à jour. Une conséquence non-négligeable de cette étape est que le volume total du domaine ne reste pas constant. Pour un fluide incompressible, ceci signifie que la conservation de la masse n'est pas parfaitement respectée. Une application précise des conditions limites est donc primordiale. Dans la suite, le cas précis du contact entre un fluide et une surface solide est considéré.

### 3.1 Contact fluide-solide

Le contact entre un fluide et une surface solide est au centre des interactions fluide-structure. La force qu'un milieu applique sur l'autre doit être correctement modélisée, et, dans le cas du fluide, cela commence par une détection correcte de sa frontière avec le solide. La création de masse est également dû à l'utilisation de l'algorithme d' $\alpha$ -shapes pour définir les frontières du domaine. En effet, les frontières

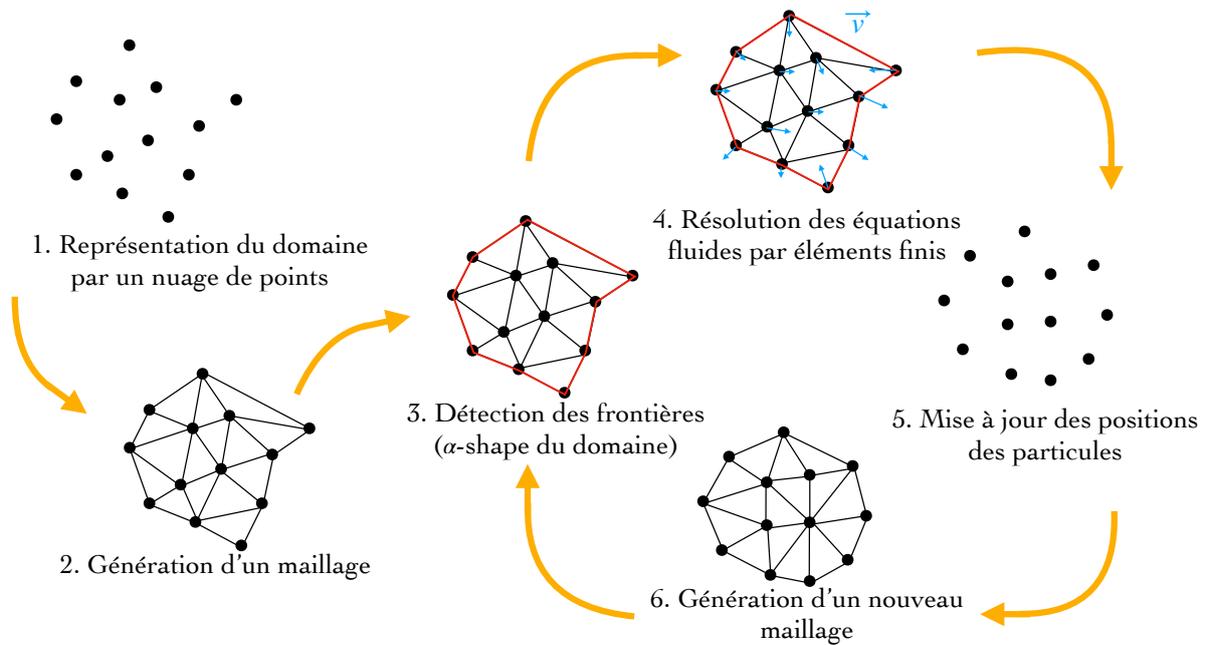


FIGURE 2 – Les différentes étapes de la méthode PFEM.

solides étant également maillées, lorsqu'une partie du fluide se rapproche de la frontière, des triangles vont être générés entre le fluide et le solide par le mailleur, et ceux-ci vont être reconnus par l' $\alpha$ -shape comme faisant partie du domaine. Ceci engendre de la création de masse, comme illustré dans la figure 3.

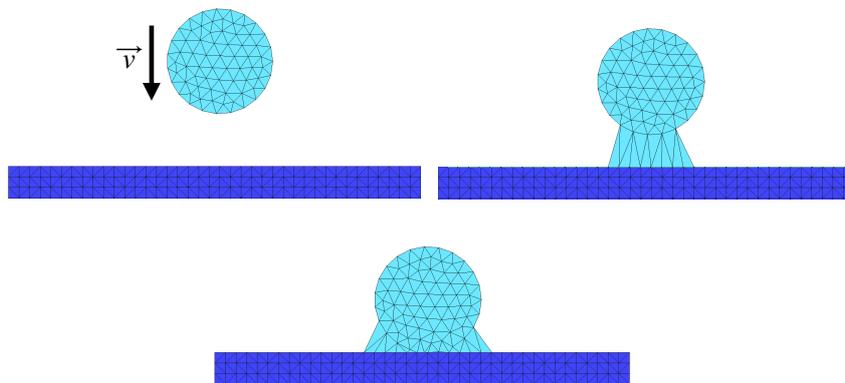


FIGURE 3 – Alors qu'une goutte de fluide se rapproche d'une surface solide, l'algorithme d' $\alpha$ -shapes reconnaît des triangles entre la bulle et le mur, violant ainsi la contrainte de conservation de la masse.

Une autre difficulté rencontrée au niveau de l'interface fluide-solide est le mouvement relatif des 2 milieux. En effet, si au niveau moléculaire le fluide colle sur la paroi ( $\mathbf{u} = 0$ ), il est plus judicieux d'accepter que le fluide glisse le long de la paroi ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ), afin d'éviter de recourir à un raffinement excessif du maillage pour capturer la couche limite. Avec un maillage de la surface solide, le problème est complexe puisque les noeuds atteints par le fluide se mettent en mouvement.

### 3.2 La méthode de reprojection

Pour pallier à ce problème, la méthode proposée dans cet article consiste à ne plus mailler la surface solide : seule la géométrie du bord est connue par le fluide. L'approche est similaire à ce qui est fait en milieux granulaires, c'est-à-dire que l'on considère qu'une particule a atteint le bord uniquement lorsqu'elle l'a traversé. Celle-ci est alors reprojétée sur le bord, et devient ainsi un noeud de bord. De cette façon, aucun triangle n'est créé entre le fluide et la surface tant que le fluide n'a pas atteint celle-ci.

Cette idée est illustrée dans la figure 4.

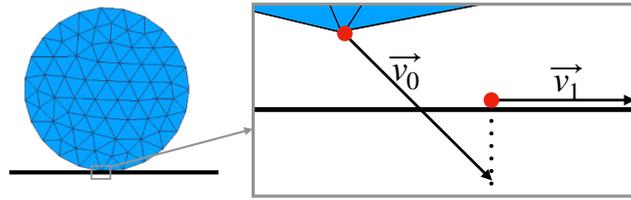


FIGURE 4 – La méthode de re-projection pour la gestion de la condition limite de contact d’un fluide avec une surface solide.

Les avantages de cette approche sont multiples. Tout d’abord, la surface de contact est représentée de façon précise. En effet, contrairement au modèle classique, comme dans la figure 3, on sait exactement où le fluide atteint le bord, et la condition frontière peut donc également être appliquée précisément sur la zone de contact. Ensuite, aucun volume fluide n’est créé. Il y aura une légère perte de volume lorsqu’une particule traversera le bord, mais cette perte décroît en diminuant le pas de temps. Troisièmement, imposer une condition limite de glissement est à présent aisé : il suffit d’imposer une vitesse normale au bord nulle, c’est-à-dire que l’on contraint la particule à rester sur la surface, mais elle est libre de se déplacer sur celle-ci. En d’autres mots, elle perd un degré de liberté dans l’espace. Enfin, tant que la géométrie de la surface est connue, cette méthode peut être appliquée sur une surface quelconque, non-nécessairement plane. La seule difficulté numérique est la projection d’un point sur une surface.

## 4 Résultats préliminaires

Quelques résultats de simulation montrent le fonctionnement de la méthode. Une goutte de fluide, admettons de l’eau, s’écrase sur une surface solide. La résolution des équations fluides est effectuée par Migflow [2], et le maillage est généré à chaque itération à l’aide de Gmsh [5]. La méthode d’application des conditions frontières par re-projection des noeuds permet d’éviter l’apparition d’éléments entre la surface et le domaine fluide, évitant ainsi toute création de masse. Une étude plus approfondie permettra d’analyser en détail la méthode, et de l’appliquer à des situations où la physique devient plus complexe.

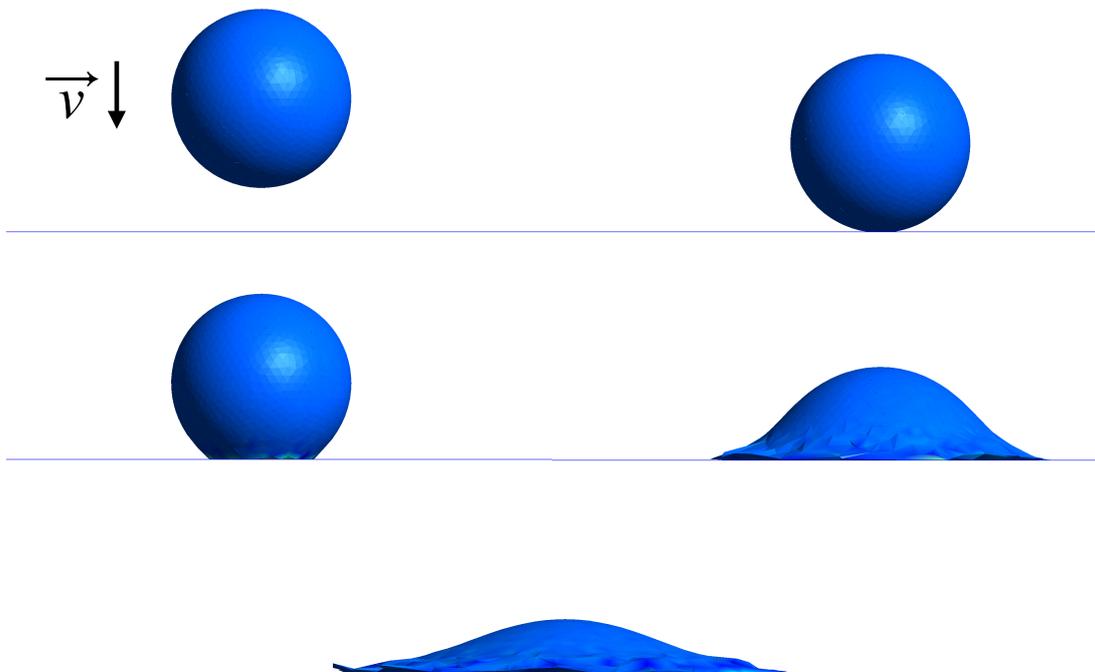


FIGURE 5 – Simulation tri-dimensionnelle d’une goutte de fluide s’écrasant sur une surface solide.

## 5 Conclusion

La méthode d'éléments finis-particule, ou PFEM, permet de simuler des fluides lorsque le domaine subit de fortes déformations. Cette méthode lagrangienne, qui exploite les fondements théoriques des éléments finis classiques, est particulièrement intéressante dans le cadre d'interactions fluide-structure et d'écoulements à surface libre. Néanmoins, une difficulté de la méthode liée aux conditions limites persiste. La surface mouillée, c'est-à-dire la zone de contact entre le fluide et une surface solide, doit être détectée précisément afin de simuler correctement l'interface. C'est dans ce cadre qu'une nouvelle approche est proposée pour simuler correctement le contact. La méthode consiste à considérer qu'une particule s'attache au bord lorsque celle-ci le traverse. Contrairement aux méthodes existantes, qui maillent le bord solide et créent ainsi des éléments indésirables entre le fluide et le solide, cette approche évite toute création de masse. De plus, des conditions limites de glissement relatif entre le fluide et le solide peuvent être aisément appliquées. Des résultats préliminaires montrent l'application de la méthode à un cas simple. La capacité de la méthode à être utilisée dans des cas plus complexes, avec une physique plus complète, feront l'objet de recherche future.

## Références

- [1] Maerco-Lucio Cerquaglia, David Thomas, Romain Boman, Vincent Terrapon, and J-P Ponthot. A fully partitioned lagrangian framework for fsi problems characterized by free surfaces, large solid deformations and displacements, and strong added-mass effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348 :409–442, 2019.
- [2] Matthieu Constant, Frédéric Dubois, Jonathan Lambrechts, and Vincent Legat. Implementation of an unresolved stabilised fem–dem model to solve immersed granular flows. *Computational Particle Mechanics*, 6(2) :213–226, 2019.
- [3] Herbert Edelsbrunner and Ernst P Mücke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 13(1) :43–72, 1994.
- [4] Alessandro Franci, Massimiliano Cremonesi, Umberto Perego, Giovanni Crosta, and Eugenio Oñate. 3d simulation of vajont disaster. part 1 : Numerical formulation and validation. *Engineering Geology*, 279 :105854, 2020.
- [5] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [6] Thomas JR Hughes, Leopoldo P Franca, and Marc Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuška-brezzi condition : A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1) :85–99, 1986.
- [7] Sergio Idelsohn, Monica Mier-Torrecilla, and Eugenio Oñate. Multi-fluid flows with the particle finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198(33-36) :2750–2767, 2009.
- [8] Sergio R Idelsohn, Eugenio Oñate, and F Del Pin. The particle finite element method : a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(7) :964–989, 2004.
- [9] Eugenio Oñate, Alessandro Franci, and Josep M Carbonell. A particle finite element method for analysis of industrial forming processes. *Computational Mechanics*, 54(1) :85–107, 2014.
- [10] Bo Tang, Junfeng Li, and Tianshu Wang. The least square particle finite element method for simulating large amplitude sloshing flows. *Acta Mechanica Sinica*, 24(3) :317–323, 2008.