

Modélisation mixte éléments finis-éléments discrets pour l'analyse de stabilité de systèmes frottants en présence de variabilités topographiques

Y. El Attaoui¹, C. Hubert^{1,2}, N. Leconte^{1,2}, F. Massa^{1,2}, T. Tison¹

¹ Univ. Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH, CNRS, UMR 8201, F-59313 Valenciennes, France

² INSA Hauts-de-France, F-59313 Valenciennes, France

Résumé — L'objectif de cette communication est de mettre en place une modélisation mixte éléments finis-éléments discrets dans le but d'analyser la stabilité de systèmes frottants. Le modèle mixte permet de mener des simulations dynamiques en intégrant la variabilité et l'évolution des topographies des surfaces des plaquettes de freinage. Au préalable, une phase de calibrage des liaisons cohésives du domaine discret est réalisée à partir des données vibratoires du système couplé conservatif nominal, intégralement modélisé par éléments finis.

Mots clés — Instabilités, frottement, éléments finis, éléments discrets, topographie.

1 Introduction

Depuis de nombreuses années, le crissement est un enjeu majeur pour les constructeurs des secteurs du transport et pour la communauté scientifique. En effet, les niveaux sonores générés, de l'ordre de 100 dB sur une large plage de fréquences audibles, nuisent à la qualité perçue du système mécanique, ce qui le rend non conforme aux exigences du client ainsi qu'aux normes environnementales de plus en plus drastiques. L'origine de ces vibrations a fait l'objet de nombreux travaux scientifiques, lesquels ont mis en évidence que l'initiation du crissement repose sur des mécanismes présents à différentes échelles et que les vibrations prennent naissance à l'interface des composants en contact. La propension au crissement d'un système de freinage est ainsi conditionnée par de nombreux paramètres matériels, tribologiques et géométriques, en particulier la topographie des surfaces en contact, qui est l'objet de cette communication.

Avec l'essor de la simulation éléments finis, le développement des jumeaux numériques a permis d'investiguer la stabilité des systèmes frottants par l'intermédiaire de simulations, soit fréquentielles pour la majorité des études, soit temporelles non-linéaires. Toutefois, le caractère incertain du crissement rend ces études déterministes insuffisamment prédictives, en ne permettant pas de représenter fidèlement une famille de résultats observés expérimentalement. Récemment, de multiples études ont ainsi intégré des variabilités, en utilisant des approches ensemblistes ou probabilistes, en ciblant de multiples paramètres, en particulier le coefficient de frottement [1] ou encore les conditions de contact aux interfaces [2]. Concernant la topographie des surfaces en contact, en particulier celle des plaquettes de frein, Tison et al. [3], puis Renault et al. [4] ont montré l'intérêt de substituer la surface de contact traditionnellement lisse par une famille de surfaces générées aléatoirement représentant plus fidèlement les surfaces réelles observées expérimentalement. La génération d'une famille d'échantillons a permis d'améliorer la prédictivité des analyses de stabilité fréquentielle et ainsi de mieux corrélérer aux essais sur banc.

Le travail proposé dans cette communication se positionne en complément des précédents travaux sur la variabilité topographique des plaquettes de freinage. L'objectif est d'investiguer le spectre fréquentiel, contenu dans les efforts de contact des simulations temporelles, en fonction de l'évolution des topographies de l'interface. Cette communication se focalise sur la mise en place d'un modèle numérique mixte éléments finis-éléments discrets ainsi que sur l'impact d'une topographie, caractéristique des essais expérimentaux, sur les fréquences instables.

2 Modélisation mixte éléments finis-éléments discrets

La modélisation, utilisée dans cette communication, repose à la fois sur des éléments finis, pour représenter le système disque-plaquettes, et sur des éléments discrets, pour décrire la topographie des plaquettes de freinage. Cette formulation mixte a pour objectif de permettre l'analyse du comportement dynamique du système suite à la désactivation de liaisons cohésives entre les éléments discrets, les laissant ainsi libres, au cours de simulation temporelle.

2.1 Modélisation éléments finis

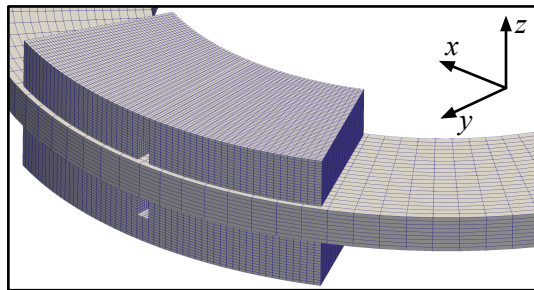
La méthode des éléments finis, notée FEM (Finite Element Method) par la suite, est utilisée pour modéliser le système mécanique, composé d'un disque plein en fonte (d'une épaisseur de 12.5 mm, et de rayons intérieur et extérieur respectivement de 95.5 mm et 152.5 mm) et de deux plaquettes, constituées d'un support de garniture en acier (d'une épaisseur de 7 mm, et de rayons intérieur et extérieur respectivement de 96.5 mm et 151.5 mm) et d'une garniture (d'une épaisseur de 10 mm avec une rainure radiale de 5 mm de largeur et de 8 mm de profondeur). L'angle formé par les arêtes extérieures des plaquettes est de $2\pi/7$ rad.

Les propriétés mécaniques des matériaux sont données dans la Table 1. Le disque et les supports ont un comportement isotrope, alors que le matériau des garnitures est isotrope transverse ($E_{yy} = E_{xx}$, $\nu_{xz} = \nu_{xy}$ et $G_{xz} = G_{xy}$).

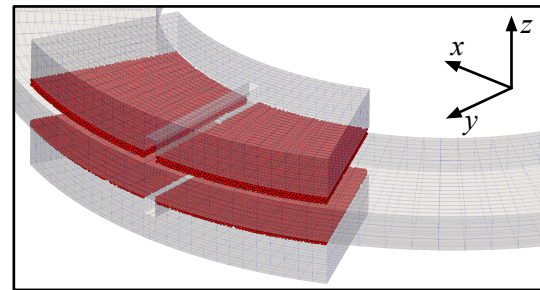
TABLE 1 – Propriétés mécaniques des matériaux du système de freinage (FEM).

	E_{xx} [GPa]	E_{zz} [GPa]	ν_{xy} [-]	ν_{yz} [-]	G_{xy} [GPa]	G_{yz} [GPa]	ρ [kg m ⁻³]
Disque	130	—	0.3	—	—	—	7200
Support	170	—	0.3	—	—	—	7300
Garniture	6.5	3.5	0.2	0.15	1	2.826	2600

Le modèle FEM, composé d'éléments hexahédriques à 8 nœuds d'une taille moyenne de 1 mm, contient environ 420 000 ddls. Des intégrations numériques complète et réduite sont respectivement utilisées pour les simulations fréquentielles et temporelles. Le modèle FEM est présenté sur la Figure 1a.



(a) Modélisation éléments finis.



(b) Modélisation éléments discrets.

FIGURE 1 – Modélisation du système de freinage.

2.2 Modélisation éléments discrets

La Méthode des Éléments Discrets, notée DEM (Discrete Element Method), repose sur la BPDM (Bonded Particle Element Method), dans laquelle les particules sont reliées par des liaisons cohésives qui, une fois calibrées, permettent de faire émerger un comportement dit « continu » aux domaines discrets. Dans cette étude, les particules sont sphériques et indéformables, de rayon r et de masse volumique r_μ . Les liaisons cohésives sont des poutres de Euler-Bernoulli, admettant donc 6 degrés de libertés à chaque extrémité. Les paramètres qui régissent le comportement mécanique de telles poutres sont leur module d'Young E_μ , leur coefficient de Poisson ν_μ , et leur section, qui dans ce cas est circulaire de rayon r_μ .

Une couche d'éléments discrets d'environ 2.6 mm d'épaisseur est définie à l'extrémité de la garniture et est en contact avec le disque (Figure 1b). Les domaines discrets, générés avec à GranOO [5], contiennent environ 15000 particules par garniture et sont reliés par environ 50000 liaisons cohésives, correspondant à un nombre de coordination de l'ordre de 6.7. Ils sont définis dans un volume de forme donnée suivant une distribution aléatoire uniforme en terme de position initiale et de diamètre des particules ($\pm 12.5\%$), permettant de manière générale de limiter les risques d'arrangements réguliers et donc un comportement orthotrope des domaines discrets.

2.3 Couplage entre les modélisations

Le code de calcul utilisé pour les simulations numériques, présentées dans cet article, est développé au LAMIH. Les résultats de la modélisation FEM ont été validés par rapport à ceux d'ABAQUS lors de simulations modales et explicites, alors que ceux de la modélisation DEM l'ont été par rapport à GranOO [5] lors des simulations explicites.

Le couplage employé est un couplage fort non-conforme par multiplicateurs de Lagrange, du type présenté par Casadei et al. [6]. L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange assure que les contraintes imposées sont satisfaites de manière exacte. Ici, la contrainte est imposée sur toutes les composantes du vecteur vitesse d'un point d'une face d'un élément solide et de celui d'une particule DEM. La vitesse du point est exprimée à l'aide des fonctions d'interpolation de la face d'un élément solide. Les réactions calculées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange sont alors prises en compte dans le calcul de la nouvelle accélération du schéma en différences centrées.

Le nombre total de degrés de libertés de la modélisation mixte est d'environ 255000.

3 Calibrage des domaines discrets

La DEM, telle qu'elle a été présentée dans la section précédente, n'admet pas l'application de paramètres matériaux de manière directe comme pour les méthodes continues, en particulier la masse volumique des particules et les paramètres des liaisons cohésives. Il s'agit donc de déterminer ces propriétés avant de pouvoir utiliser les domaines discrets dans une simulation dynamique.

3.1 Masse volumique des particules

La masse volumique des particules impacte directement la dynamique du système. Il est donc nécessaire que la masse des domaines discrets soit identique à celle du volume continu qu'ils représentent. Puisque le volume rempli par les éléments discrets est plus faible que le volume continu, on admettra que les éléments discrets ont une densité supérieure à celle du matériau continu. Celle-ci s'exprime par la relation :

$$\rho_\mu = \frac{\rho_M V_M}{\sum_{i=1}^n V_{\mu i}}, \quad (1)$$

avec ρ_μ la masse volumique des éléments discrets, ρ_M celle du matériau continu, $V_{\mu i}$ le volume de l'élément discret i et n le nombre d'éléments discrets dans le domaine.

Dans le cas des garnitures de plaquettes, la masse volumique des particules est d'environ 4200 kg m^{-3} contre 2600 kg m^{-3} pour le matériau continu, ce qui représente une fraction volumique de 62% typique du « Random Close Packing » pour des sphères compactées avec faible dispersion sur leur diamètre [7]. C'est donc cette valeur qui sera utilisée lors des simulations numériques à suivre.

3.2 Paramètres matériels des liaisons cohésives

Le modèle de liaisons cohésives de type « poutres de Euler-Bernoulli » implique la détermination de trois paramètres : le module d'Young des poutres E_μ , leur coefficient de Poisson ν_μ ainsi que leur rayon r_μ . Les dernières études portant sur le sujet, en particulier [8], ont montré que le coefficient de Poisson ν_μ n'a pas d'impact majeur sur le comportement émergent des domaines discrets. Il n'affecte que la rigidité de torsion, mode de sollicitation relativement peu présent. Concernant le module d'Young des poutres E_μ et leur rayon r_μ , André et al. [8] ont mis en place une étude paramétrique afin de déterminer les valeurs permettant de faire émerger un comportement macroscopique équivalent au comportement continu du

domaine discret représenté. Cette étude paramétrique est basée sur la compression (ou la traction) d'un domaine discret cylindrique. La sollicitation appliquée conduit à une diminution (ou à une augmentation) de la longueur du domaine discret, ainsi qu'à une modification de son diamètre assimilée à un effet de Poisson en mécanique des milieux continus, et majoritairement dépendant du rayon des poutres.

Dans le cas présent, la distribution des orientations des poutres dans les domaines discrets ne permet pas d'obtenir un comportement émergent suffisamment isotrope, et donc d'appliquer la méthode proposée par André et al. [8]. De plus, il s'agit ici de calibrer les domaines DEM afin que le spectre fréquentiel de la modélisation mixte FEM-DEM corresponde au mieux à celui d'une modélisation intégralement FEM. Par conséquent, les paramètres matériels des liaisons cohésives sont calibrés à partir d'une analyse modale du système disque-plaquettes conservatif couplé.

Pour ce faire, une analyse statique non-linéaire avec une pression de 25 bar appliquée sur l'arrière des plaquettes est menée pour coupler les interfaces de contact disque-plaquettes. Une analyse modale du système couplé est ensuite effectuée pour extraire les 40 premières fréquences propres du système ainsi que les vecteurs propres associés, limités aux noeuds du disque et ceux des faces arrières des plaquettes, comme illustré sur le Figure 2.

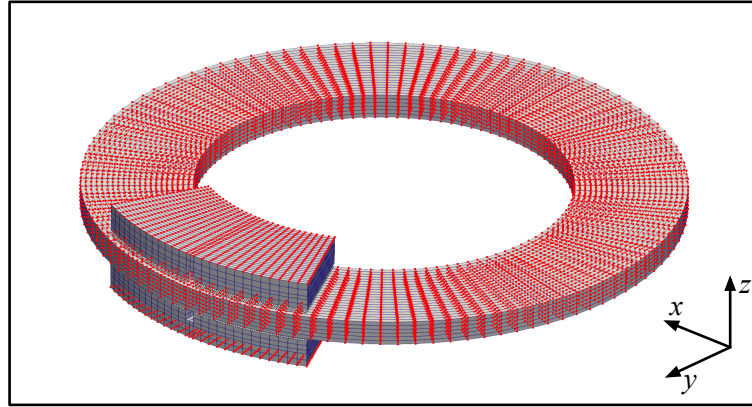


FIGURE 2 – Nœuds utilisés pour la comparaison des modes propres.

L'évaluation d'un couple de paramètres (E_μ, r_μ) est basée sur deux indicateurs, à savoir l'erreur sur le MAC (Modal Assurance Criterion) moyen $\bar{e}_m$ et l'erreur moyenne $\bar{e}_f$ sur les 40 fréquences extraites, tous deux normés à 1 et détaillés ci-après.

Le MAC moyen $\bar{m}$ est défini par la moyenne de la trace du MAC, au sens matriciel, entre la modélisation mixte FEM-DEM et la modélisation FEM après appairage des modes, et permet le calcul de l'erreur sur le MAC moyen $\bar{e}_m$ grâce la relation :

$$\bar{e}_m = \frac{\bar{m} - \min(\bar{m})}{1 - \min(\bar{m})} \in [0, 1]. \quad (2)$$

Puisque les modes propres issus des deux modélisations ont été appairés pour la détermination de $\bar{m}$, les fréquences propres entre la modélisation mixte FEM-DEM et la modélisation FEM peuvent être comparées deux à deux par la relation $r_{fi} = 1 - f_{1i}/f_{2i}$, avec f_{1i} et f_{2i} les fréquences associées au mode i pour les modélisations mixte FEM-DEM et FEM respectivement.

L'écart moyen $\bar{f}$ observé sur les 40 fréquences extraites peut ensuite être déterminé comme pour le MAC moyen. L'écart moyen en fréquence $\bar{e}_f$ est normé à 1 par la relation :

$$\bar{e}_f = \frac{\bar{f} - \min(\bar{f})}{1 - \min(\bar{f})} \in [0, 1], \text{ avec } \bar{f} = \text{moyenne}(f_i), i = 1, \dots, 40. \quad (3)$$

Enfin, ces deux indicateurs sont multipliés entre eux pour donner un écart moyen global $\bar{e}$ de manière à identifier le meilleur couple (E_μ, r_μ) .

Cette procédure est appliquée pour une plage de modules d'Young $E_\mu \in [10, 70]$ GPa par pas de 2.5 GPa, et de rayons des poutres $r_\mu \in [0.10, 0.4]$ mm par pas de 0.0125 mm. La valeur de l'indicateur global $\bar{e}$ est reportée sur le graphique de la Figure 3, en fonction du module d'Young E_μ et du rayon

des poutres r_μ . La couleur et la longueur des symboles horizontaux (—) correspondent à l'intensité de l'indicateur d'erreur sur le MAC $\bar{e}_m$, et la couleur et la longueur des symboles verticaux (|) correspondent à l'intensité de l'indicateur d'erreur en fréquence $\bar{e}_f$. Enfin, un point est affiché lorsque la valeur de l'indicateur global est supérieure à 0.98.

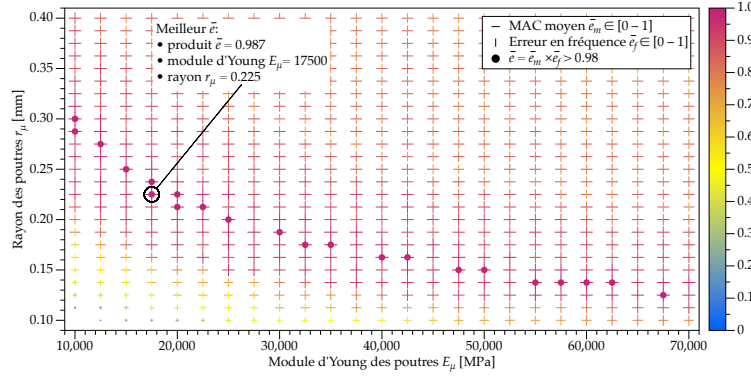


FIGURE 3 – $\bar{e}_m$, $\bar{e}_f$ et $\bar{e}$ en fonction du module d'Young E_μ et du rayon des poutres r_μ .

Cette analyse met en exergue un front de couples de paramètres admissibles balayant l'ensemble des valeurs de module d'Young des poutres E_μ . En effet, la rigidité perdue sur le module d'Young est compensée par l'augmentation de leur rayon r_μ . Cet effet est probablement dû à la faible isotropie des domaines discrets, elle-même étant la conséquence du faible nombre d'éléments discrets dans l'épaisseur. L'indicateur le plus élevé est égal à $\bar{e} = 0.987$ et correspond au couple des paramètres ($E_\mu = 17500 \text{ GPa}$, $r_\mu = 0.225 \text{ mm}$), qui est choisi pour la suite de l'étude.

4 Analyse de la stabilité pour le crissement automobile

La modélisation mixte FEM-DEM, précédemment développée, est utilisée dans des simulations dynamiques en utilisant un schéma de résolution explicite. La séquence de simulation du freinage est la suivante :

1. Mise en pression des plaquettes : une pression de 25 bar est appliquée sur les faces arrières des plaquettes (suivant l'axe $\vec{z}$) tandis que les degrés de liberté dans le plan du disque (suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$) sont bloqués (cette étape est effectuée avec un solveur statique, permettant de réduire le temps de simulation) ;
2. Mise en rotation du disque, $[0 - 100] \text{ ms}$: une vitesse de 8.17 rad s^{-1} est progressivement appliquée sur les noeuds intérieurs du disque suivant une rampe ;
3. Stabilisation du système, $[100 - 200] \text{ ms}$: la vitesse de rotation du disque et la pression appliquée sur les plaquettes sont maintenues à leur consigne.

Compte tenu du volume de données à stocker, le pas d'export des données temporelles, à savoir les efforts de contact normaux à l'interface plaquettes-disque, est limité à $4 \times 10^{-5} \text{ s}$, pour un pas de temps d'intégration de l'ordre $1.26 \times 10^{-7} \text{ s}$. Ce pas d'export correspond à une fréquence d'échantillonnage de 25 kHz, permettant d'effectuer une étude fréquentielle jusqu'à 12.5 kHz.

4.1 Validation du modèle FEM-DEM nominal en dynamique

Afin de valider la modélisation mixte en dynamique, les résultats obtenus lors d'une simulation temporelle FEM-DEM telle que décrite ci-dessous sont confrontés à ceux issus d'une modélisation FEM. Pour chaque modélisation, une transformée de Fourier (FFT) de la somme des efforts de contact normaux, notée Σ_{Fn} , enregistrés durant l'étape de stabilisation, est effectuée. Le spectre est ainsi présenté Figures 4a et 4b. En complément, afin de mettre en évidence les zones prépondérantes de contact, leur historique durant la simulation temporelle est présenté Figures 5a et 5b pour chaque noeud/particule de la surface de contact. Ainsi, un noeud qui ne serait jamais en contact durant la phase de maintien est représenté en bleu, soit 0 %. À l'opposé, un noeud étant en contact fermé durant toute la phase de maintien est en rouge, correspondant à 100 %.

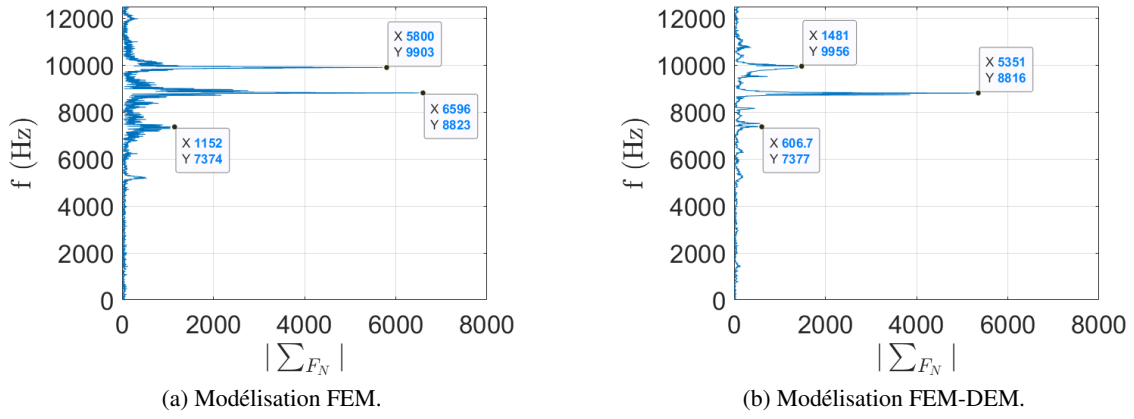


FIGURE 4 – Spectre des efforts de contact durant la phase de stabilisation.

Les fréquences principalement excitées lors des deux simulations sont assez proches (8.8 kHz, 9.9 kHz et 7.4 kHz classées par ordre d’amplitude associée). Toutefois, le spectre fréquentiel associé à la modélisation FEM-DEM apparaît moins diffus que celui de la modélisation FEM. La principale différence entre les deux modélisations est observée au niveau des amplitudes, et en particulier l’amplitude associée à la fréquence à 9.9 kHz, où celle-ci est quatre fois supérieure avec la modélisation FEM.

En parallèle, un historique des états de contact des deux modélisations montre des comportements macroscopiquement similaires (contacts fermés sur le bord d’attaque, pas de contact sur le bord de sortie, demi-plaquette sortante faiblement en contact). Cependant, on observe que les surfaces DEM présentent des zones de contact moins regroupées que celles de la modélisation FEM, ce qui pourrait expliquer les écarts en terme d’amplitude.

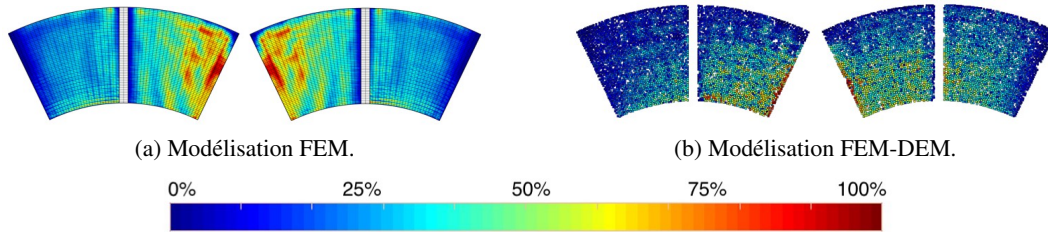


FIGURE 5 – Historique des contacts durant la simulation temporelle.

Cette comparaison du spectre fréquentiel entre les modélisation FEM et FEM-DEM permet de valider la calibration du domaine DEM, effectuée précédemment, et ainsi aborder, dans la suite de cette communication, l’évolution des fréquences instables en fonction de l’évolution du domaine DEM.

4.2 Impact de la topographie sur le spectre fréquentiel

Comme présenté en introduction, des études expérimentales antérieures à cette contribution ont montré que le crissement peut être favorisé par une usure particulière des surfaces des plaquettes. La Figure 6 donne un exemple de topographie des plaquettes au moment de l’apparition du crissement.

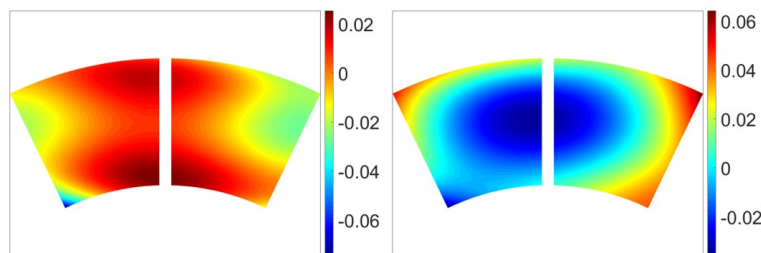


FIGURE 6 – Forme implémentée sur les plaquettes numériques.

Dans cette section, la modélisation FEM-DEM est utilisée pour étudier l'effet de l'usure des surfaces de contact sur le spectre fréquentiel durant le freinage. L'usure des surfaces est représentée par la désactivation de liaisons cohésives, libérant ainsi les particules qui sont connectées à leurs extrémités. Dans cette étude, et dans un souci de validation plutôt que de simulation d'un phénomène physique, les liaisons à désactiver sont sélectionnées de manière à tendre progressivement vers des surfaces de contact proches de celles illustrées sur la Figure 6.

Cette nouvelle simulation numérique contient une étape supplémentaire par rapport à la simulation précédente : après la mise en rotation du disque, les liaisons cohésives en vis-à-vis des zones d'usure observées sur la forme finale (Figure 6) sont progressivement désactivées, durant 100 ms. Le système est ensuite laissé dans une phase de stabilisation, comme précédemment. L'ensemble des étapes de cette nouvelle simulation est donné ci-dessous :

1. Mise en pression des plaquettes ;
2. Mise en rotation du disque, [0 – 100]ms ;
3. Désactivation des liaisons cohésives, [100 – 200]ms ;
4. Stabilisation du système, [200 – 300]ms.

Pour suivre l'évolution des fréquences avec l'évolution des surfaces de contact, on utilisera le spectrogramme des efforts normaux de contact plutôt que son spectre. Le spectrogramme issu de la simulation décrite précédemment est donné sur la Figure 7.

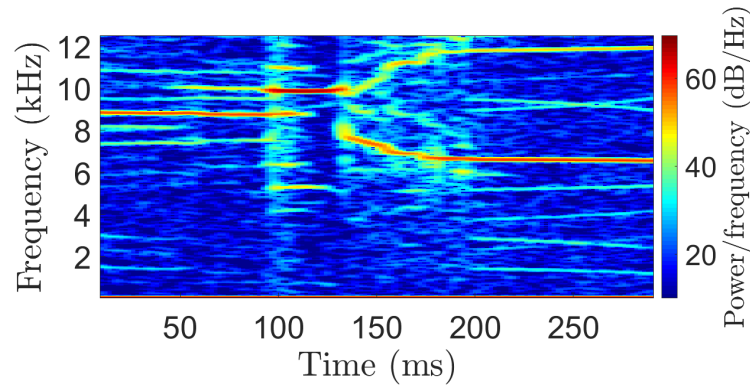


FIGURE 7 – Spectrogramme de la somme des efforts de contact pour la modélisation FEM-DEM.

La première étape de la simulation est similaire à la précédente puisque les surfaces restent intègres avec une fréquence la plus instable de 8.8 kHz. La seconde étape, qui correspond à la désactivation progressive des liaisons cohésives sélectionnées, montre une évolution des fréquences instables. Tout d'abord, on observe l'excitation d'une large bande fréquentielle entre 5 kHz et 12 kHz, puis l'émergence de la fréquence instable à 9.9 kHz au détriment de celle à 8.8 kHz. Dans un second temps, la désactivation des liaisons, conduisant à l'élimination de certaines particules de la surface de contact, engendre une nouvelle modification du spectre fréquentiel, toujours largement excité, pour tendre progressivement vers deux fréquences distinctes excitées vers les 6.5 kHz et 12 kHz. Enfin, durant l'étape de stabilisation, ces deux nouvelles fréquences, non présentes dans le spectre initial, sont désormais excitées. La Figure 8 présente l'historique des états de contact de la phase de stabilisation une fois la forme atteinte. Le contact est donc réparti sur les particules restantes avec un contact prépondérant sur les bords intérieurs et extérieurs du profil étudié.

5 Conclusion et perspectives

Cette contribution a mis en évidence qu'une formulation mixte éléments finis-éléments discrets est pertinente pour investiguer l'évolution et l'apparition de fréquences instables en fonction de l'évolution des topographies des plaquettes de freinage durant la simulation dynamique temporelle. La stratégie numérique a été mise en place dans le cas d'une topographie, mesurée expérimentalement suite à des essais

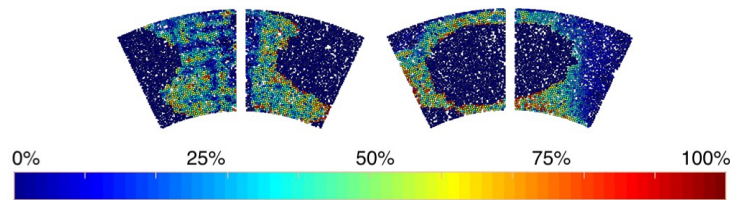


FIGURE 8 – Historique des contacts en état fermé durant la simulation temporelle.

sur banc de freinage, ce qui a nécessité une étape de calibrage des liaisons cohésives de la modélisation DEM en considérant les fréquences et modes du modèle FEM-DEM couplé conservatif.

Cette simulation n'est qu'une première étape dans la prise en compte des variabilités topographiques. Il est nécessaire, d'une part, de multiplier les topographies caractéristiques pour représenter une famille de comportements instables. D'autre part, la modélisation DEM, utilisée ici, reste relativement macroscopique car le diamètre des particules est de l'ordre de 1 mm. Pour prendre en compte des débris de plaquette et le troisième corps à l'interface, il sera nécessaire de diminuer la taille des particules utilisées.

Références

- [1] E. Denimal, J.-J. Sinou, S. Nacivet. *Influence of structural modifications of automotive brake systems for squeal events with kriging meta-modelling method*, Journal of Sound and Vibration, 463, 114938, 2019.
- [2] E. Denimal, J.-J. Sinou, S. Nacivet and L. Nechak. *Squeal analysis based on the effect and determination of the most influential contacts between the different components of an automotive brake system*, International Journal of Mechanical Sciences, 151, 192–213, 2019.
- [3] T. Tison, A. Heussaff, F. Massa, I. Turpin and R. F. Nunes. *Improvement in the predictivity of squeal simulations : Uncertainty and robustness*, Journal of Sound and Vibration, 333(15) 3394–3412, 2014.
- [4] A. Renault, F. Massa, B. Lallemand and T. Tison. *Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis*, Journal of Sound and Vibration, 367, 37–55, 2016.
- [5] D. André, J.-L. Charles, I. Iordanoff and J. Néauport. *The GranOO workbench, a new tool for developing discrete element simulations, and its application to tribological problems*, Advances in Engineering Software, 74, 40–48, 2014.
- [6] F. Casadei, M. Larcher and N. Leconte. *Strong and Weak Forms of a Fully Non-conforming FSI Algorithm in Fast Transient Dynamics for Blast Loading of Structures*, COMPDYN 2011 Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Athens (Greece), 1120–1139, 2012.
- [7] K. Lochmann, L. Oger and D. Stoyan. *Statistical analysis of random sphere packings with variable radius distribution*, Solid State Sciences, 8(12), 1397–1413, 2006.
- [8] D. André, I. Iordanoff, J.-L. Charles and J. Néauport. *Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 213–216, 113–125, 2012.