

Sur deux classes de modèles à gradient d'endommagement : cadre thermodynamique, formulation variationnelle et applications

K. Kpotufe^{1,3}, R. Abdelmoula², N. Pindra³, D. Kondo¹

¹ Institut d'Alembert, UMR 7190 CNRS, Sorbonne Université, Paris, France
kferdinandkossivi@gmail.com, djimedo.kondo@sorbonne-universite.fr

² LSPM, Institut Galilée, Villetaneuse, France, Université Sorbonne Paris Nord, France
radhi.abdelmoula@univ-paris13.fr

³ LAMMA, Faculté Des Sciences, Université de Lomé, Togo
nadjimepindra@gmail.com

Résumé — Tirant profit du cadre étendu des Matériaux Standards Généralisés (MSG), récemment précisé par Nguyen (2016) pour les modèles à gradient de plasticité, on présente d'abord un cadre variationnel unifié pour deux classes de modèles à gradient d'endommagement. Pour les modèles qualifiés d'énergétiques, le terme de régularisation se présente sous la forme d'une énergie stockée, tandis que pour la seconde classe (modèles dissipatifs) il entre dans le potentiel de dissipation. Ensuite, on compare et discute des liens entre les deux classes de modèles. Enfin, on illustre leurs prédictions respectives à l'aide de simulations de l'endommagement et la rupture d'une structure.

Mots clés — Modèle à gradient d'endommagement, Matériaux standards généralisés, Formulation variationnelle, endommagement et rupture de structures.

1 Introduction - contexte

Les matériaux de construction tels que les roches, les bétons et les céramiques ou les composites à matrice fragile sont susceptibles à des phénomènes de multifissuration lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations mécaniques correspondant à leurs conditions de service. Les dégradations qui en résultent sont généralement représentées à l'aide d'une variable d'endommagement qui peut être de nature scalaire, ou tensorielle d'ordre 2 pour décrire des effets d'anisotropie induite. La bonne compréhension des phénomènes d'endommagement et le développement d'outils de simulation numérique appropriés sont de grande importance afin d'appréhender au mieux les risques de dégradation puis de rupture par amorçage et propagation de fissures dans des structures mécaniques. La mécanique de l'endommagement dont les racines se trouvent dans les travaux fondateurs de L. Kachanov vise précisément à décrire les phénomènes de détérioration des propriétés mécaniques consécutive à une multifissuration évolutive. Depuis environ 3 décennies, elle cherche également à prédire les conditions d'une transition de l'endommagement diffus à la rupture sous forme d'une macrofissuration. Sur la base de divers travaux réalisés dans les années 70 dans un cadre de modélisation phénoménologique, la mécanique de l'endommagement a pu être formalisée au début des années 80 en se plaçant dans le cadre des matériaux standards généralisés, introduit précédemment par [10] (en s'appuyant sur des concepts de thermodynamique des processus irréversible et sur l'hypothèse de dissipativité normale de J-J. Moreau), ce qui garantit aux modèles ainsi construits une conformité à l'inégalité de Clausius-Duhem résumant les deux principes de la thermodynamique¹.

Ce n'est qu'à partir de la fin des années 80, et plus nettement dans les années 90, que s'est posée la question de la régularisation des modèles d'endommagement via différentes approches non locales : formulation non locale intégrale [2], approche par gradient de déformation [21], par level set [19], régularisation par gradient d'endommagement (Fremont et Nedjar [8], Lorentz et Andrieux [12], Lorentz et Benallal [13] etc...). Cette dernière, qui procède par incorporation de termes de gradient d'endommagement, constitue le principal objet de la présente étude, d'abord par sa simplicité, mais aussi par les liens très forts qu'elle entretient avec les approches variationnelles de rupture établies par [7]. Dans ce contexte, une publication majeure est celle de [4] qui, sur la base des travaux d'Ambrosio et Tortorelli

1. On peut également consulter l'ouvrage récent [16].

[1], propose une formulation variationnelle se traduisant par la minimisation d'une fonctionnelle à deux champs (déplacement, variable de champ de phase) sur la structure mécanique considérée. L'approche qui en a découlé, dénommée méthode variationnelle de champ de phase, fait depuis une vingtaine d'années l'objet d'un certain engouement assez justifié et d'une intense activité scientifique qui se traduit par des applications très variées dont par exemple celles réalisées par [18], [25] et [24].

La méthode variationnelle régularisée a été ensuite réinterprétée (voir [22], [17]) en termes de modèle à gradient d'endommagement² en s'appuyant sur l'élégant principe de Drucker-Ilyushin. L'objectif de cette étude est double :

- présenter une démarche constructive des modèles à gradient d'endommagement en s'appuyant sur le cadre étendu des Matériaux Standard Généralisés, récemment exposé par Nguyen [20] pour les lois à gradient de plasticité. Puis établir la formulation variationnelle correspondante, à l'aide d'outils généraux que sont la règle de normalité globale et l'équation de Biot généralisée [3].
- proposer une classification et une étude comparative des lois d'endommagement déduites de cette démarche. Quelques illustrations numériques sur une structure permettront d'étayer le propos.

2 Formulation variationnelle des modèles à gradient d'endommagement

L'objectif principal visé dans cette section, est de présenter un cadre variationnel des problèmes d'endommagement en exploitant le cadre thermodynamique usuel des matériaux standards généralisés. À cette fin, on prendra appui, sur les récents travaux de [20], dédiés aux modèles à gradient de plasticité, travaux qui seront adaptés ici au modèle d'endommagement. Compte tenu du fait que l'on manipulera simultanément des champs de déplacement \underline{u} et d'endommagement d , on adopte la notation condensée :

$$U = (\underline{u}, d). \quad (1)$$

2.1 Établissement de l'inéquation variationnelle

On considère une structure occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, sur laquelle sont définis les champs \underline{u} et d . On se propose d'établir l'inéquation variationnelle régissant le problème d'évolution en conditions quasi statiques. Comme dans [12] (voir aussi [23], [20]), on introduit les potentiels globaux :

- Potentiel thermodynamique global

$$\mathbf{W}(U) = \int_{\Omega} \rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), d, \underline{\nabla}d) d\Omega, \quad (2)$$

- Potentiel de dissipation global

$$\mathbf{D}(\dot{U}) = \int_{\Omega} \varphi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{d}, \underline{\nabla}\dot{d}) d\Omega, \quad (3)$$

dans lequel ρw est l'énergie libre φ est le pseudo-potentiel de dissipation à l'échelle locale. φ est une fonction convexe, à valeurs scalaires positive et nulle en $(0;0;0)$ (à priori, elle est supposée non différentiable). On recourt à présent à la règle de normalité dont la forme globale s'écrit :

$$\forall \dot{U}^*, \quad -\mathbf{D}_{,\dot{U}} \cdot (\dot{U}^* - \dot{U}) + \mathbf{D}(\dot{U}^*) - \mathbf{D}(\dot{U}) \geq 0. \quad (4)$$

Pour la formulation variationnelle, (4) sera combinée à l'équation suivante, dite de Biot généralisée³ :

$$\mathbf{W}_{,\underline{U}} + \mathbf{D}_{,\dot{U}} = F, \text{ avec} \quad (5)$$

$$F \text{ tel que } F \cdot \delta U = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \delta \underline{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \delta \underline{u} dS. \quad (6)$$

2. Il convient ici de souligner les contributions importantes de Lorentz et Andrieux [12] qui avaient également proposé et développé un cadre variationnel pour une classe de modèles à gradient d'endommagement sur laquelle nous reviendrons.

3. L'équation de Biot a été établie par Maurice Biot (1905-1985) dans [3] (chapitre 6, équations 2.18-2.22).

où $\rho \underline{f}$ représente la densité des forces volumiques et \underline{T} le vecteur contrainte.

Par combinaison de (4) et (5), on obtient l'inéquation variationnelle sous la forme :

$$\mathbf{W}_{,U}\dot{U} + \mathbf{D}_{,\dot{U}} + F \leq \mathbf{W}_{,U}\dot{U}^* + \mathbf{D}_{,\dot{U}^*} + F^*, \quad \forall \dot{U}^*, \quad (7)$$

qui est la première expression du principe variationnel recherché, portant ici sur le champ de vitesse \dot{U} .

2.2 Exploitation pour les milieux élastiques endommageables

Désignons respectivement par \mathcal{C} et \mathcal{D} , l'ensemble des champs, cinématique et d'endommagement admissibles. Soit $(\underline{u}, d) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, solution du problème. Pour tout couple (\underline{u}^*, d^*) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}_d$ tel que :

$$\mathcal{D}_d = \left\{ d^*; d \leq d^* \leq 1 \right\},$$

en explicitant (7), on obtient l'écriture suivante pour le principe variationnel en vitesse :

$$\mathcal{J}(\underline{\dot{u}}, \dot{d}) \leq \mathcal{J}(\underline{\dot{u}}^*, \dot{d}^*), \quad \text{avec} \quad (8)$$

$$\mathcal{J}(\underline{\dot{u}}^*, \dot{d}^*) = \int_{\Omega} \left(\rho \dot{w}^* + \varphi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}, \dot{d}^*, \underline{\nabla} \dot{d}^*) \right) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\dot{u}}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS, \quad (9)$$

dans laquelle

$$\rho \dot{w}^* = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^* + \rho \frac{\partial w}{\partial d} \dot{d}^* + \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\nabla} d} \cdot \underline{\nabla} \dot{d}^*. \quad (10)$$

Dans le cas du problème incrémental, la vitesse $\dot{\chi}$ de toute variable χ est approché par $\dot{\chi} \approx \frac{\Delta \chi}{\Delta t}$. Les champs mécaniques à l'instant t_n étant connus, on recherche l'état à l'instant t_{n+1} . La dissipation φ étant positivement homogène de degré 1, et ρw étant de plus séparément convexe en \underline{u} et en d , on aboutit au principe variationnel basé sur la minimisation incrémentale de

$$\mathfrak{J}(\Delta \underline{u}^*, \Delta d^*) = \int_{\Omega} \left(\rho w(\underline{u}_n + \Delta \underline{u}, d_n + \Delta d) + \varphi(\Delta \underline{u}, \Delta d) \right) d\Omega - W_{ext}(\Delta \underline{u}) \quad (11)$$

avec

$$W_{ext}(\Delta \underline{u}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \Delta \underline{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \Delta \underline{u} dS.$$

Ce principe variationnel incrémental pour les problèmes d'endommagement est celui établi par [12].

On peut aller plus loin en observant que dans le cas des modèles d'endommagement scalaire auxquels on s'intéresse dans cette étude, il est possible d'intégrer en temps la fonctionnelle \mathcal{J} écrite en vitesse. Le problème variationnel se ramène alors à la minimisation de la fonctionnelle :

$$\xi(\underline{u}, d) = \int_{\Omega} \left(\rho w + \int_0^t \varphi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}, \dot{d}, \underline{\nabla} \dot{d}) dt' \right) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{u} dS, \quad (12)$$

dont l'expression requiert le calcul de l'intégrale en temps portant sur $\varphi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}, \dot{d}, \underline{\nabla} \dot{d})$. À ce stade, on peut recourir aux systèmes dits à dissipation simple introduits par [5] :

Définition 2.1 *Un système est dit à dissipation simple si la fonctionnelle $\int_0^t \varphi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}, \dot{d}) dt'$ donnant la dissipation totale ne dépend que de la valeur actuelle de l'état U .*

Pour de tels systèmes : $\int_0^t \varphi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}, \dot{d}) dt' = \mathcal{D}(U)$ où \mathcal{D} représente l'expression de l'énergie dissipée totale. La fonctionnelle à minimiser prend alors la forme :

$$\xi(\underline{u}, d) = \int_{\Omega} \left(\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) + \mathcal{D}(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) \right) d\Omega - W_{ext}(\underline{u}) \quad (13)$$

sachant la contrainte d'irréversibilité sur le champ d'endommagement d . On notera que $\xi(\underline{u}, d)$ est séparément convexe par rapport à chacun des 2 arguments, mais pas avec le couple d'arguments.

Remarque 2.1 *À partir de l'équation de Biot (5) et en utilisant la formule de divergence, on obtient, les équations de champs suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}, \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}, \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\underline{\underline{H}}) - B = 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\text{dans lesquelles : } B = \rho \frac{\partial w}{\partial d} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{d}} \text{ et } \underline{\underline{H}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \nabla d} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla \dot{d}}.$$

Notez qu'en l'absence de termes non locaux $\underline{\underline{H}} = 0$ et (15) implique $B=0$, ce qui est un résultat classique.

2.3 Esquisse de modèle général à gradient d'endommagement et cas particuliers

Le cadre de modélisation qui vient d'être exposé s'est appuyé sur la donnée de deux potentiels $\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \nabla d)$ et $\varphi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{d}, \nabla \dot{d})$ dont il s'agit de préciser la forme. Excluant a priori tout phénomène de viscosité, on se propose ici d'esquisser d'abord à grand trait les éléments d'une classe relativement générale de modèles à gradient d'endommagement. Celle-ci nécessite deux longueurs internes, l'une, l_E (E pour énergétique) apparaissant dans l'énergie libre $\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \nabla d)$ et l'autre, l_D (D pour dissipatif) pour le terme en $\nabla \dot{d}$, présent dans le potentiel de dissipation :

- Potentiel thermodynamique (énergie libre) :

$$\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \nabla d) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}(d) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \ell_E^2 E_0 \|\nabla d\|^2. \quad (16)$$

Le terme de régularisation, en ∇d , se présente ici sous la forme d'une énergie stockée, non récupérable par décharge élastique.

- Potentiel de dissipation :

$$\varphi(\dot{d}, \nabla \dot{d}; \nabla d) = Y_c(d) \dot{d} + 2\ell_D^2 w_1 \nabla d \cdot \nabla \dot{d} + I_+(\dot{d}), \quad Y_c(d) > 0, \quad (17)$$

Cette expression du potentiel de dissipation incorpore un terme de régularisation, en $\nabla \dot{d}$, contribuant donc à la dissipation d'énergie. On notera que d et ∇d ne font pas partie des arguments de φ . Comme l'autorise le cadre des Matériaux Standard Généralisés (cf. par exemple [9] ou encore [16]), ils y apparaissent seulement comme des paramètres témoignant de l'état mécanique.

φ est convexe, à valeurs scalaires positives et nulles en (0,0). Ce choix simple est dicté par deux considérations : i) φ est positivement homogène de degré 1 (comportements indépendants du temps physique); ii) les systèmes ainsi décrits à l'aide de φ sont à dissipation simple⁴. Pour cette classe générale de modèles, on établit par (13) que la fonctionnelle ξ à minimiser prend la forme :

$$\xi(\underline{\underline{u}}, d) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) : \mathbb{C}(d) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) + \ell_E^2 E_0 \|\nabla d\|^2 + w_1 w(d) + \ell_D^2 w_1 \|\nabla d\|^2 \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\underline{u}}), \quad (19)$$

dans laquelle $w(d)$ est tel que $w_1 w(d) = \int_0^d Y_c(\beta) d\beta$ qui représente la contribution locale de l'énergie dissipée totale jusqu'à l'instant actuel.

Remarque 2.1 *On notera que, bien qu'attrayant ce modèle nécessite d'avoir des renseignements très précis, soit par voie expérimentale, soit à l'aide d'arguments micromécaniques, sur la part des diverses contributions énergétiques : énergie élastique, énergie stockée, énergie dissipée. De plus, la détermination des deux longueurs internes, de nature différente au sein du même modèle, peut s'avérer délicate, voire non contrôlée.*

Pour ces raisons, on se restreindra dans ce qui suit à deux classes de modèles à une longueur interne, qualifiés d'énergétiques ou de dissipatifs, en écho (toutes proportions gardées) à la terminologie consacrée pour les modèles à gradient de plasticité (cf. par exemple travaux de Fleck et Willis [6]).

4. Sur la base uniquement de l'homogénéité de degré 1 du potentiel de dissipation par rapport à ses arguments, on pourrait être tenté de faire un choix d'un couplage dans le potentiel de dissipation tel que :

$$\varphi(\dot{d}, \nabla \dot{d}; d) = Y_c(d) \sqrt{\dot{d}^2 + \ell_D^2 \nabla \dot{d} \cdot \nabla \dot{d}} + I_+(\dot{d}), \quad Y_c(d) > 0. \quad (18)$$

Ceci conduirait à un système qui n'est pas à dissipation simple. Et l'on doit, pour son étude numérique, envisager de mettre en oeuvre le cadre variationnel incrémental précédemment esquissé.

Deux cas particuliers de modèles à gradient d'endommagement

On examine donc les deux classes de modèles décrits comme suit :

— modèle dissipatif

$$\begin{cases} \rho w(\underline{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \underline{\varepsilon} \\ \varphi(d, \underline{\nabla} d; d, \underline{\nabla} d) = Y_c(d) \dot{d} + 2\ell_D^2 w_1 \underline{\nabla} d \cdot \underline{\nabla} \dot{d} + I_+(d), \quad Y_c(d) > 0 \end{cases}, \quad (20)$$

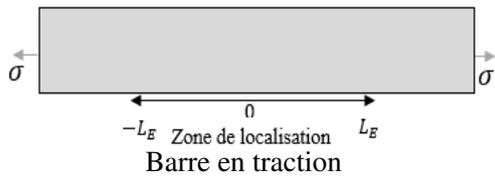
— modèle énergétique

$$\begin{cases} \rho w(\underline{\varepsilon}, d, \underline{\nabla} d) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \underline{\varepsilon} + \ell_E^2 E_0 \|\underline{\nabla} d\|^2 \\ \varphi(d) = Y_c(d) \dot{d} + I_+(d), \quad Y_c(d) > 0 \end{cases}. \quad (21)$$

À titre d'exemple, pour le modèle énergétique, (15) conduit au critère d'endommagement non local :

$$2\ell_E^2 E_0 \Delta d - \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \underline{\varepsilon} - Y_c(d) \leq 0 \text{ dans } \Omega. \quad (22)$$

Pour la détermination des longueurs internes, on s'inspire de la méthodologie proposée par [17] pour des modèles dissipatifs. Prenant en compte le type de modèle (AT1, AT2), la démarche a consisté à résoudre analytiquement le problème de la barre en traction avec les conditions sur l'endommagement :



$$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(L_E) = 0 \\ d'(L_E) = 0 \end{cases}$$

Conditions sur l'endommagement

Toujours à titre d'exemple, en s'appuyant sur la résolution du critère d'endommagement non local avec l'approche AT₁ et un module de la forme $(1-d)^2 E$, on a pour le modèle énergétique :

$$\frac{\sigma^2}{(1-d)^3 E w_1} + \left(-1 + 2 \cdot \ell_E^2 \frac{E_0}{w_1} d'' \right) = 0 \Rightarrow d(x) = \left(\sqrt{\frac{w_1}{E_0}} \cdot \frac{|x|}{2\ell_E} - 1 \right)^2, \quad L_E = 2\ell_E \sqrt{\frac{E_0}{w_1}} \quad (23)$$

Cette résolution ayant été faite en considérant que la contrainte est nulle dans la barre après fissuration. Sous l'hypothèse que l'énergie dissipée par endommagement est égale à l'énergie de rupture G_c , on a :

$$W_D = \left[w_1 \int_{\Omega} (d^2(x)) dx \right] \cdot S = G_c S \Rightarrow \ell_E = 2 \sqrt{\frac{w_1}{E_0}} \ell_D \Rightarrow E_0 \ell_E^2 = 4 w_1 \ell_D^2$$

La résolution du problème de la barre en traction conduit à des résultats sous la forme $\ell = G_c / (c_w w_1)$ reportés dans le tableau (1). Ceci permet de rapprocher les modèles d'endommagement ainsi construits des approches par champs de phase tels qu'introduites par [4] (voir également le papier de revue de [27]).

Approches	Modèles	Longueur interne	Zone de localisation
AT ₁ $w(d) = d$	Dissipatif ([17])	Pour ℓ_D , $c_w = 8/3$	$4\ell_D$
	Énergétique	Pour ℓ_E , $c_w = (4/3) \sqrt{E_0/w_1}$	$4\ell_E$
AT ₂ $w(d) = d^2$	Dissipatif ([17])	Pour ℓ_D , $c_w = 2$	∞
	Énergétique	Pour ℓ_E , $c_w = \sqrt{E_0/w_1}$	∞

TABLE 1 – Résumé des résultats analytiques sur la détermination des longueurs internes ℓ_D et ℓ_E

Par ailleurs, on montre que sous l'hypothèse que la somme des énergies stockée et dissipée est égale à G_c (Hypothèse adoptée par [14]), les solutions issues des modèles énergétique et dissipatif coïncident.

3 Éndommagement et fissuration du panneau en forme de L

On se propose maintenant de simuler l'endommagement et la rupture d'un panneau en forme de L, expérimentalement étudié par [26] puis simulé dans diverses publications dont [18], [14], [15], etc.. Les données matériau considérées ici sont : module de Young : $E = 23\,850\text{ MPa}$, coefficient de poisson $\nu = 0.18$, tenacité $G_c = 0.1\text{ N/mm}$ et le taux de restitution critique d'endommagement $w_1 = 18.75 \times 10^{-4}\text{ MPa}$. Quant aux longueurs internes déduites pour les calculs, elles sont reportées dans les légendes de figures des résultats présentés. La géométrie du panneau et le chargement en déplacement sont représentés sur la Figure 1. Un maillage non structuré avec 49 743 éléments triangulaires est utilisé pour une taille de maille moyenne $h_{\text{moy}} \approx 2.75\text{ mm}$, avec un raffinement local du maillage dans les zones où la fissure est susceptible de s'amorcer et de se propager (voir observation expérimentale).

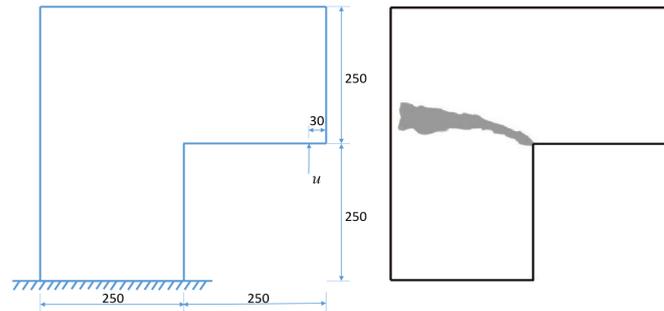


FIGURE 1 – Panneau (2D) en forme de L : à gauche Dimensions (en mm) avec conditions aux limites ; à droite : relevé de faciès de fissuration observé expérimentalement [26].

Les Figures 2 et 3 montrent les évolutions du champ d'endommagement dans la structure avec la formulation AT_1 , respectivement pour les modèles dissipatif et énergétique. Pour la Figure (2) (modèle dissipatif), la fissure ($d = 1$) s'amorce pour un déplacement de $128\ \mu\text{m}$ (Figure 2b). À un pas avant ce déplacement, nous observons (Figure 2a) un endommagement maximal de 0.4 alors que celui-ci s'amorce à peine pour le modèle énergétique (Figure 3a). A la valeur $190\ \mu\text{m}$ du déplacement imposé (Figures 2c et 3b) qui correspond au moment de l'amorçage de la fissuration prédite par le modèle énergétique, on note une propagation significative de la fissure dans les prédictions du modèle dissipatif. Ces conclusions sont similaires à celles obtenues pour d'autres simulations réalisées sur une plaque carrée renforcée par une inclusion circulaire rigide (cf. [11]). L'analyse des évolutions d'énergies (Figure 4) confirme ces conclusions (déplacements correspondants aux amorçages et niveaux de fissuration). Par ailleurs, nous observons qu'au moment de la fissuration les énergies dissipées mises en jeu (27 mJ) sont équivalentes pour les deux modèles. Ceci est conforme aux hypothèses sous-jacentes aux deux classes de modèles : équivalence avec l'énergie de rupture G_c . On note également que l'énergie stockée et l'énergie dissipée ont tout au long de l'évolution des valeurs similaires dans le modèle énergétique.

De manière générale, et bien que l'on note des différences entre les prédictions des modèles (voir commentaires qui précèdent), on constate que ces derniers reproduisent qualitativement bien le faciès de rupture observé par [26] (Figure 1).

4 Conclusion

Cette étude a consisté à la mise en place d'une approche constructive s'appuyant sur le cadre des Matériaux Standards Généralisés, étendu aux milieux à gradient de variables internes. Elle a permis d'établir une formulation variationnelle à deux champs, mise en œuvre pour deux classes de modèles (dissipatifs, énergétiques) à gradient d'endommagement. Les liens entre les longueurs internes de ces deux classes de modèles ont été indiqués, de même que le rapprochement avec les approches dites de champs de phase. La mise en œuvre numérique sur une structure 2D en forme de L a permis de mettre en évidence des différences dans les prédictions : conditions d'amorçage, largeur de la zone de localisation, évolution des énergies. D'autres résultats numériques (disponibles dans [11]), y compris en 3D, seront présentés lors de la communication orale.

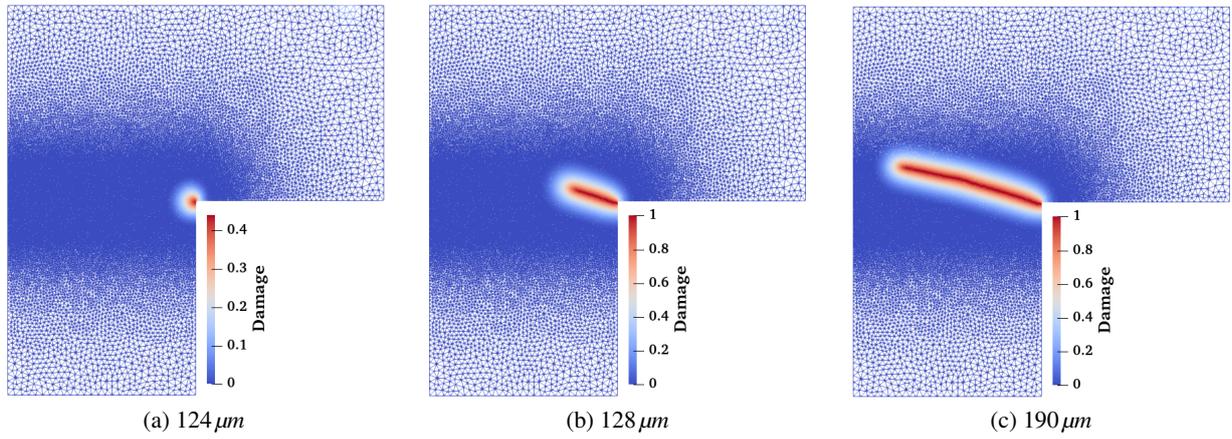


FIGURE 2 – Panneau (2D) en forme de L avec le modèle dissipatif ($AT_1, w_1 = 18.75 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ et $\ell_D = 20 \text{ mm}$) : évolution du champ d’endommagement.

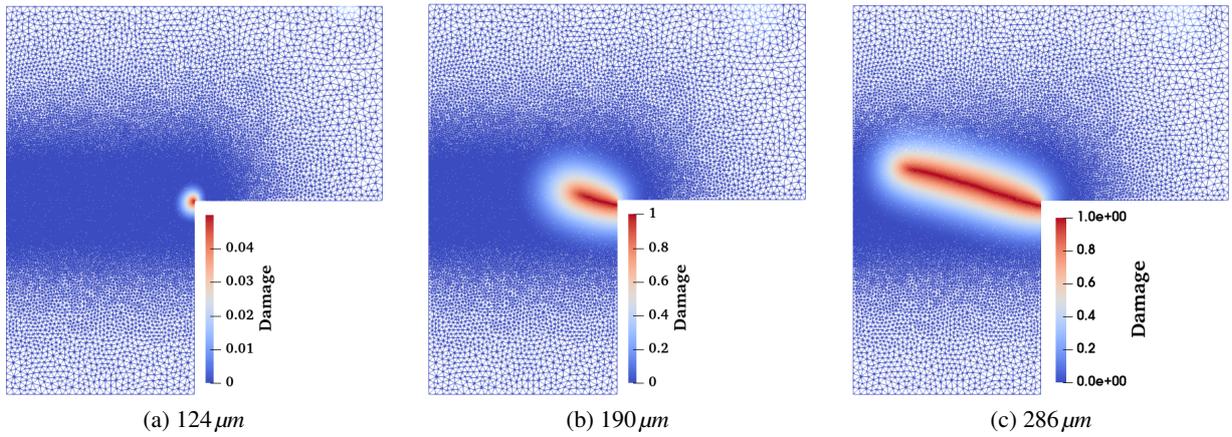


FIGURE 3 – Panneau (2D) en forme de L pour le modèle énergétique ($AT_1, w_1 = 18.75 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ et $\ell_E = 40 \text{ mm}$) : évolution du champ d’endommagement.

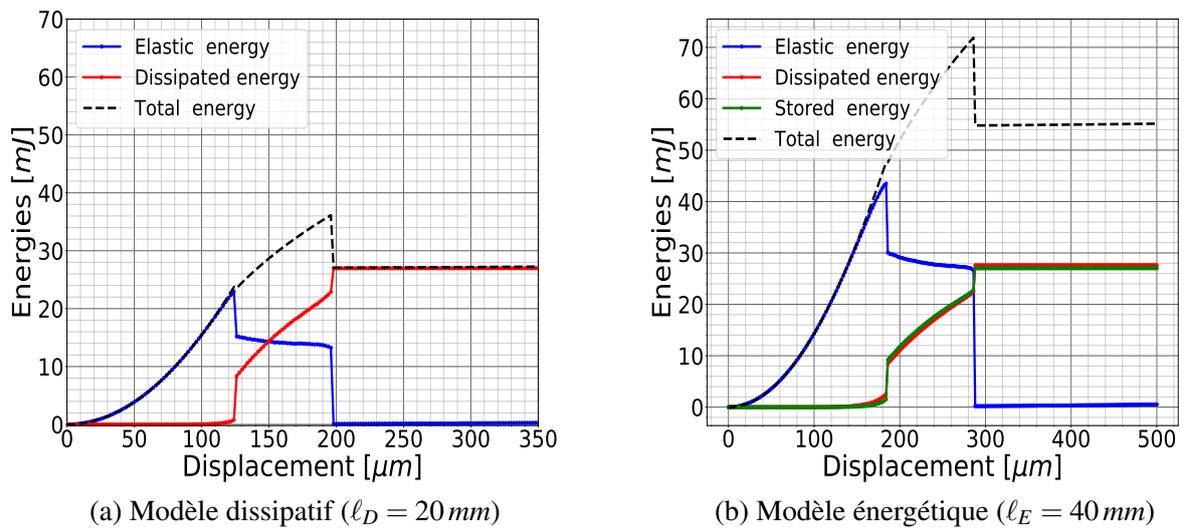


FIGURE 4 – Panneau (2D) en forme de L avec l’approche AT_1 : Courbes des énergies.

Références

- [1] L. Ambrosio, V. M. Tortorelli, *Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via Γ -convergence*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 43(8) :999–1036, 1990
- [2] Z. P. Bazant, G. Pijaudier-Cabot, *Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence*, Journal of Applied Mechanics, 287-293, 1988
- [3] M. A. Biot, *Mechanics of incremental deformations*, 1965
- [4] B. Bourdin, G.A. Francfort, J-J Marigo, *Numerical experiments in revisited brittle fracture*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(4) :797 – 826, 2000
- [5] A. Ehrlacher, B. Fedelich, *Stability and bifurcation of simple dissipative systems ; application to brutal damage, Cracking and Damage : Strain localization and size effect*, edited by J. Mazars et Z.P.Bazant, Taylor & Francis, 221-227,1989
- [6] N. Fleck, J. Willis, *Strain gradient plasticity : energetic or dissipative ?* Acta Mech. Sin, 31(4) :465-472, 2015
- [7] G.A. Francfort, J-J Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(8) :1319 – 1342, 1998
- [8] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, International Journal of Solids and Structures, 1083 - 1103, 1996
- [9] P. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet, *Continuum Thermodynamics*, Journal of Applied Mechanics, 1010-1020, 1983
- [10] B. Halphen, Q. Nguyen, *Sur les Matériaux Standard Généralisés*, Journal de Mécanique, 39-63, 1975.
- [11] K. Kpotufe, *Modèles à gradient d’endommagement : cadre thermodynamique, formulation variationnelle et applications*, Thèse de doctorat : Sorbonne Université et l’Université de Lomé, 2021
- [12] E. Lorentz, S. Andrieux, *A variational formulation for nonlocal damage models*, International Journal of Plasticity, 119-138, 1999
- [13] E. Lorentz, A. Benallal, *Gradient constitutive relations : numerical aspects and application to gradient*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(50) :5191–5220, 2005
- [14] E. Lorentz, V. Godard, *Gradient damage models : Toward full-scale computations*, Computer Methods in Applied Mstrainechanics and Engineering, 200 : 1927–1944, 2011
- [15] M. Luege, A. Orlando, M. E. Almenar, E. A. Pilotta, *An energetic formulation of a gradient damage model for concrete and its numerical implementation*, International Journal of Solids and Structures, 160–184, 2018.
- [16] H. Maitournam, *Mécanique des structures anélastiques : Comportement, chargement, chargements cycliques et fatigue*, 2012
- [17] J-J. Marigo, C. Maurini, K;Pham, *An overview of the modelling of fracture by gradient damage models.*, Meccanica, 51(12) :3107–3128, 2016
- [18] A. Mesgarnejad, B. Bourdin, M.M. Khonsari, *Validation simulations for the variational approach to fracture*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 420–437, 2015
- [19] N. Moës, C. Stolz, P-E Bernard, N. Chevaugeon, *A level set based model for damage growth : the thick level set approach*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 358-380, 2011
- [20] Q.S. Nguyen, *Quasi-static response, implicit scheme and incremental problem in gradient plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 97 :156–167, 2016.
- [21] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. De Vree, *Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials*, International Journal for numerical methods in engineering, 3391–3403, 1996
- [22] K. Pham, H. Amor, J-J. Marigo, C. Maurini, *Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture*, International Journal of Damage Mechanics, 20(4) :618–652, 2011
- [23] C. Stolz, *Energy methods in non-linear mechanics*, Centre of Excellence for Advanced Materials and Structures, 2004
- [24] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, *Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 110 :80–99, 2018
- [25] T. T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, C. Chateau, *Initiation and propagation of complex 3d networks of cracks in heterogeneous quasi-brittle materials : Direct comparison between in situ testing-microct experiments and phase field simulations*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids,95 :320–350, 2016
- [26] B. J. Winkler, *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*, Innsbruck University Press, 2001
- [27] J-Y Wu, V.P. Nguyen, C.T. Nguyen, D. Sutula, S. Sinaie, S. PA Bordas. *Phase-field modeling of fracture*, Advances in Applied Mechanics, 53 :1–183, 2020