

Un couplage FEM-BEM pour la modélisation de composites magnéto-électriques

A. Urdaneta-Calzadilla, N. Galopin, O. Chadebec, I. Niyonzima

*Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2Elab, F-38000 Grenoble
{alberto.urdaneta-calzadilla,olivier.chadebec,nicolas.galopin,innocent.niyonzima}@g2elab.grenoble-inp.fr*

Résumé — Un couplage FEM-BEM basé sur une formulation en potentiel scalaire magnétique réduit est appliqué à la modélisation des composites magnétoélectriques. Une telle approche permet de ne pas considérer la région d'air et d'utiliser un unique maillage pour les sous-problèmes magnétiques, mécaniques et électriques qui œuvrent à l'effet magnétoélectrique. Un solveur Gauss-Seidel par bloc est mis en œuvre pour résoudre le problème global.

Mots clés — multiphysique, couplage FEM-BEM, composite magnétoélectrique.

1 Introduction

Un phénomène de couplage important, qui a suscité une attention particulière ces dernières années, est le phénomène de couplage magnétoélectrique (ME) [1]. Le phénomène magnétoélectrique consiste en l'existence d'une polarisation électrique induite par une aimantation ou, inversement, d'une aimantation induite par une polarisation électrique. Les matériaux présentant un couplage entre leurs propriétés magnétiques et électriques permettent de nouvelles applications dans divers domaines, tels que les capteurs électriques de champ magnétique, les actionneurs, les dispositifs de mémoire ou de récupération d'énergie [2]. L'inconvénient des très faibles coefficients des matériaux monophasés a été contourné avec succès par la fabrication de composites magnétoélectriques qui consistent en des phases couplées magnéto-mécanique et électro-mécanique [3] [4]. L'idée derrière le développement de tels composites est de générer l'effet magnétoélectrique désiré comme une propriété du produit induite par la déformation. Ainsi, un champ magnétique appliqué entraîne une déformation de la phase couplée magnéto-mécanique qui est transférée à la phase couplée électro-mécanique (effet direct). En conséquence, une polarisation induite par déformation dans la phase électrique est observée. Tandis qu'un champ électrique appliqué entraîne une déformation de la phase électro-mécanique qui est ensuite transférée à la phase magnéto-mécanique (effet inverse). Il en résulte une aimantation induite par déformation.

Pour la modélisation des composites magnétoélectriques, bien que des formules analytiques existent pour les géométries simples, la méthode des éléments finis (FEM) permet de résoudre le comportement des matériaux avec des structures non triviales. Il s'agit alors de résoudre un problème couplant deux physiques, électromagnétisme et mécanique, ou le couplage se fait via la définition des lois de comportement. Un inconvénient de cette approche est lié à la nécessité de mailler le domaine d'air pour la résolution électromagnétique. Ceci est particulièrement impactant si la source du champ est relativement éloignée du composite magnétoélectrique et si le volume de matériaux actifs est relativement faible vis-à-vis de la source de champ. Cet inconvénient peut-être levé en couplant la FEM avec la méthode des éléments de frontière (BEM) [5]. La FEM se limite alors au composite magnétoélectrique, le maillage est donc limité aux matériaux actifs, tandis que la BEM permet de prendre en compte le comportement du champ magnétique dans l'air entourant le magnétoélectrique sans avoir à recourir au maillage d'un domaine d'air important.

Dans cette contribution, un couplage FEM-BEM est présenté pour résoudre un problème magnéto-électrique impliquant trois sous-problèmes physiques : mécanique, électrique et magnétique. La FEM est appliquée aux sous-problèmes mécanique et électrique, tandis que la BEM est appliquée au sous-problème magnétique. Le système algébrique global obtenu est résolu à l'aide d'un schéma de type Gauss-Seidel par bloc, conduisant à la résolution de problème mono-physique. Des résultats montrent l'intérêt de cette approche comparativement à une approche FEM globale.

2 Lois de comportements

2.1 Comportement piézoélectrique

Le comportement des matériaux piézoélectriques est caractérisé par une relation linéaire entre les grandeurs électriques et mécaniques. Les lois de comportement peuvent alors être dérivées de différents potentiels thermodynamiques. Ainsi en négligeant les effets électrostrictifs d'ordres supérieures, et dans le cas d'un processus isotherme, le potentiel de Gibbs électrique peut s'écrire :

$$G_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{C}}^E : \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{e}}_p : \underline{\underline{S}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^S \cdot \underline{\underline{E}} \quad (1)$$

Il en résulte les lois de comportement piézoélectrique suivantes :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{C}}^E : \underline{\underline{S}} - {}^t \underline{\underline{e}}_p \cdot \underline{\underline{E}} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{e}}_p : \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\epsilon}}^S \cdot \underline{\underline{E}} \quad (3)$$

où $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{D}}$ sont, respectivement, les tenseurs des contraintes et des déformations, le champ électrique et l'induction électrique, tandis que $\underline{\underline{C}}^E$, $\underline{\underline{e}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^S$ sont les tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité et de permittivité diélectrique. t est l'opérateur de transposition.

2.2 Comportement piézomagnétique

Contrairement aux matériaux piézoélectriques, les matériaux magnétostrictifs ont un comportement fortement non-linéaire. Cependant, il est possible d'induire un état de polarisation via l'application d'un champ magnétique et/ou d'une précontrainte mécanique. Dès lors, pour des champs magnétiques et/ou des contraintes faibles, les relations de comportement piézomagnétique peuvent être obtenues. Ainsi, dans le cas d'un processus isotherme, le potentiel de Gibbs magnétique peut s'écrire :

$$G_m = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{C}}^H : \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{e}}_m : \underline{\underline{S}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\mu}}^S \cdot \underline{\underline{H}} \quad (4)$$

Il en découle les lois de comportement piézomagnétique :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{H}}) = \underline{\underline{C}}^H : \underline{\underline{S}} - {}^t \underline{\underline{e}}_m \cdot \underline{\underline{H}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{H}}) = \underline{\underline{e}}_m : \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\mu}}^S \cdot \underline{\underline{H}} \quad (6)$$

où $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont, respectivement, le champ magnétique et le champ d'induction magnétique, $\underline{\underline{C}}^H$, $\underline{\underline{e}}_m$ et $\underline{\underline{\mu}}^S$ les tenseurs d'élasticité, de piézomagnétisme et de perméabilité magnétique.

3 Formulation FEM-BEM électro-magnéto-mécanique

3.1 Définition du problème

On considère un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) paramétré en coordonnées cartésiennes \underline{x} . Le problème électro-magnéto-mécanique peut-être défini par les sous-domaines (Figure 1) associés à chaque physique, où les corps magnétostrictif Ω_{pm} et piézoélectrique Ω_{pe} au repos sont placés dans un domaine d'air Ω_0 , tel que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_{pm} \cup \Omega_{pe}$. Le domaine électrique $\Omega_e = \Omega_{pe} \cup \Omega_{pm}$ est restreint aux matériaux actifs (principalement piézoélectriques) compte-tenu des fortes permittivités diélectriques des matériaux considérés par la suite et qui limitent le flux de fuites du champ électrique dans Ω_0 . La frontière $\partial\Omega_m$ du domaine mécanique $\Omega_m = \Omega_{pe} \cup \Omega_{pm}$ est partitionnée de telle sorte que $\partial\Omega_m = \partial\Omega_p^u \cup \partial\Omega_p^t$ et $\partial\Omega_p^u \cap \partial\Omega_p^t = \emptyset$, avec :

$$\underline{u} = \underline{u}^s \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_m^u \quad (7)$$

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = \underline{f}^T \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_m^t \quad (8)$$

avec \underline{u} le vecteur déplacement et \underline{f}^T la force de traction. De même, la frontière $\partial\Omega_e$ du domaine électrique Ω_e est partitionnée telle que $\partial\Omega_e = \partial\Omega_p^\phi \cup \partial\Omega_p^d$ et $\partial\Omega_p^\phi \cap \partial\Omega_p^d = \emptyset$, avec :

$$\varphi = \varphi^0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_e^\phi \quad (9)$$

$$\underline{D} \cdot \underline{n} = -Q_s \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_e^d \quad (10)$$

avec φ le potentiel électrique et Q_s la densité de charge surfacique. Tandis que la frontière $\partial\Omega_{mg}$ du domaine magnétique $\Omega_{mg} = \Omega_{pe} \cup \Omega_{pm} \cup \Omega_0$ est partitionnée telle que $\partial\Omega_{mg} = \partial\Omega_0^h \cup \partial\Omega_0^b$, avec :

$$\underline{H} \times \underline{n} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0^h \quad (11)$$

$$\underline{B} \cdot \underline{n} = -\Phi_0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0^b \quad (12)$$

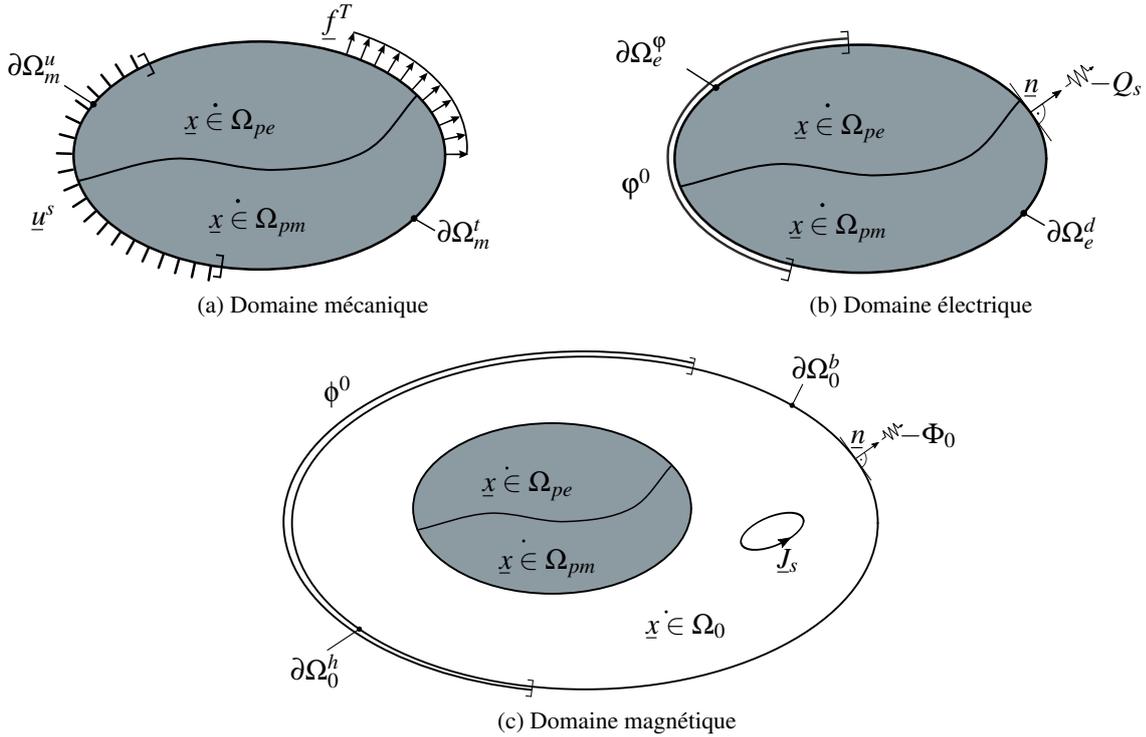


FIGURE 1 – Domaine d'étude du problème électro-magnéto-mécanique

avec Φ_0 la densité de flux magnétique surfacique. Les relations gouvernant l'équilibre du problème sont données par le bilan des moments linéaires pour la mécanique :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{T} + \underline{f} = \underline{0} \quad (13)$$

où \underline{f} est la densité de force volumique, les lois de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday pour l'électrostatique :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \rho \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = \underline{0} \quad (14)$$

où ρ est la densité de charge volumique, et les lois de Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday pour la magnétostatique :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{J} \quad (15)$$

où \underline{J} est la densité de courant volumique. Le champ magnétique \underline{H} peut être décomposé en un champ source H_0 dû à la circulation des courants et en un champ magnétique réduit \underline{H}_{red} correspondant au champ magnétique créé par les milieux aimantés, tel que $\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{red}$. Le champ \underline{H}_{red} vérifie la relation $\underline{\nabla} \times \underline{H}_{red} = \underline{0}$ puisqu'il n'est pas créé par une circulation de courant. Il en découle que :

$$\underline{H}_{red} = -\underline{\nabla} \phi_{red} \quad (16)$$

où ϕ_{red} est le potentiel scalaire magnétique réduit. De même, compte-tenu de la relation de Maxwell-Faraday, le champ électrique peut s'exprimer en fonction du potentiel scalaire électrique φ :

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \varphi \quad (17)$$

Le tenseur de déformation est considéré dans le cadre des petites déformations :

$$\underline{\underline{S}} = \text{sym}(\underline{\nabla} u(x)) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} u(x) + {}^t \underline{\nabla} u(x)) \quad (18)$$

3.2 Problème mécanique

Une formulation en déplacement pour le problème mécanique est retenue. A partir de (13) et des relations de comportement (2) et (5), la formulation faible du problème mécanique est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_m} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{C}}^{E,H} : \underline{\underline{\delta S}} d\Omega_m - \int_{\Omega_{pe}} \underline{E} \cdot \underline{\underline{e}}_p : \underline{\underline{\delta S}} d\Omega_{pe} - \int_{\Omega_{pm}} \underline{H}_0 \cdot \underline{\underline{e}}_m : \underline{\underline{\delta S}} d\Omega_{pm} \\ & - \int_{\Omega_{pm}} \underline{H}_{red} \cdot \underline{\underline{e}}_m : \underline{\underline{\delta S}} d\Omega_{pm} - \int_{\Omega_m} \underline{f} \cdot \underline{\delta u} d\Omega_m - \int_{\partial\Omega_m^t} \underline{f}^T \cdot \underline{\delta u} d\partial\Omega_m = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

avec $\underline{\underline{\delta S}} = \text{sym}(\underline{\nabla} \underline{\delta u}(x))$ et $\underline{\delta u}$ des champs cinématiquement admissibles à zéro.

3.3 Problème électrique

La formulation faible du problème électrique est obtenue à partir de la relation de Maxwell-Gauss (14) et de la relation de comportement (3) :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{e}}_p \cdot \underline{\delta E} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \underline{E} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^S \cdot \underline{\delta E} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \rho_f^v \delta\varphi d\Omega_e + \int_{\partial\Omega_m^d} \rho_f^s \delta\varphi d\partial\Omega_e = 0 \quad (20)$$

avec $\underline{\delta E} = -\underline{\nabla} \delta\varphi$ et $\delta\varphi$ des champs admissibles à zéro.

3.4 Problème magnétique

Le problème magnétique est décomposé en deux sous-problèmes. Le premier sous-problème s'attache au matériau actif et est traité par éléments finis, tandis que le second sous-problème concerne le traitement du champ magnétique dans l'air et notamment à l'infini et est traité par la méthode des éléments de frontière.

3.4.1 Sous-problème magnétique dans le matériau actif

Le sous-problème magnétique associé au matériau actif dans le domaine Ω_{pm} est obtenue à partir de la relation de Maxwell-Thomson (15) :

$$- \int_{\Omega_{pm}} \underline{\nabla} \delta\phi \cdot \underline{B} d\Omega_{pm} + \int_{\partial\Omega_{pm}} \delta\phi B_n d\partial\Omega_{pm} = 0 \quad (21)$$

avec B_n la composant normale à la surface $\partial\Omega_{pm}$ de l'induction magnétique. La prise en compte de la relation de comportement (6) avec $\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{red}$ conduit à :

$$- \int_{\Omega_{pm}} \underline{\nabla} \delta\phi \cdot \underline{\underline{\mu}}^S \cdot \underline{H}_{red} d\Omega_{pm} - \int_{\Omega_{pm}} \underline{\nabla} \delta\phi \cdot \underline{\underline{e}}_m : \underline{\underline{S}} d\Omega_{pm} + \int_{\partial\Omega_{pm}} \delta\phi B_n d\partial\Omega_{pm} = \int_{\Omega_{pm}} \underline{\nabla} \delta\phi \cdot \underline{\underline{\mu}}^S \cdot \underline{H}_0 d\Omega_{pm} \quad (22)$$

Dans une approche FEM classique, le terme de surface sur $\partial\Omega_{pm}$ s'annule à l'infini.

3.4.2 Sous-problème magnétique dans l'air

Afin de prendre en compte le comportement du champ magnétique dans l'air et notamment à l'infini, il convient d'ajouter une équation au système. Comme il n'y a aucune déformation dans le domaine Ω_0 et que la perméabilité est uniforme et linéaire, à partir de la relation de Maxwell-Thomson (15) il vient :

$$\Delta\phi_{red} = 0 \quad (23)$$

Il est alors possible d'appliquer la troisième identité de Green à ϕ_{red} sur une surface fermée $\partial\Omega$ du domaine d'air Ω_0 :

$$\frac{1}{2}\phi_{red} = \int_{\partial\Omega} \phi_{red} \frac{\partial G}{\partial n} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial\phi_{red}}{\partial n} d\partial\Omega \quad (24)$$

où $G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ est le noyau de Green. Pour obtenir la formulation faible, au lieu de calculer la quantité $\frac{\partial\phi_{red}}{\partial n}$ il est préférable d'introduire la quantité B_n dans le but de coupler le comportement du champ à l'interface matériau actif - air. A partir de :

$$B_n = \mu_0 \left(H_{0_n} - \frac{\partial\phi_{red}}{\partial n} \right) \quad (25)$$

Il vient après quelques réarrangements :

$$-\frac{1}{2}\phi_{red} + \int_{\partial\Omega} G \frac{B_n}{\mu_0} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi_{red} \frac{\partial G}{\partial n} d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} G H_{0_n} d\partial\Omega \quad (26)$$

La formulation faible est obtenue en projetant sur un champ ϕ_0 associé à la surface fermée $\partial\Omega$ correspondant à la surface extérieure $\partial\Omega_{pm}$ du matériau actif :

$$\int_{\partial\Omega} \phi_0 \int_{\partial\Omega} \phi_{red} \frac{\partial G}{\partial n} d\partial\Omega d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi_0 \frac{1}{2} \phi_{red} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi_0 \int_{\partial\Omega} G \frac{B_n}{\mu_0} d\partial\Omega d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi_0 \int_{\partial\Omega} G H_{0_n} d\partial\Omega d\partial\Omega \quad (27)$$

4 Résolution du système matriciel

Les formulations faibles des différents sous-problèmes sont discrétisées via des fonctions de forme nodales et B_n dans (22) et (27) est discrétisée par des fonctions de forme surfacique d'ordre 0.

Les deux équations magnétiques (22) et (27) étant traitées comme un seul problème physique, le système complet d'équations est constitué d'un assemblage de matrices 3×3 relatif à un problème magnétique, un problème mécanique et un problème électrique. La résolution de ce système présentent cependant plusieurs difficultés :

- Les différences dans les ordres de grandeur des propriétés matériaux et des coefficients de couplage conduisent à un mauvais conditionnement de la matrice globale.
- Les sous-matrices peuvent être soit creuse soit pleine, de sorte que l'utilisation d'un unique solveur peut ne pas être adapté.

Pour surmonter ces difficultés, un schéma de Gauss-Seidel [6] est mis en œuvre par bloc matriciel tel que la résolution du système couplé global est traitée comme la résolution d'un ensemble de sous-problèmes. Comme la matrice globale de chaque sous-système est un bloc diagonal de la matrice globale, ils sont équivalents à des problèmes mono-physiques, le couplage étant introduit par les termes de second membre. Les sous-systèmes sont ainsi résolu via la relation :

$$\mathbf{k}_{ii} \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{b}_i - \sum_j^{i-1} \mathbf{k}_{ij} \mathbf{x}_j^{n+1} - \sum_{i+1}^n \mathbf{k}_{ij} \mathbf{x}_j^n \quad (28)$$

où \mathbf{k}_{ii} se rapporte aux matrices monophysiques, \mathbf{k}_{ij} aux matrices de couplage et \mathbf{x}_i^{n+1} à la solution à l'étape $n+1$ de l'algorithme de Gauss-Seidel du sous-système i .

Pour résoudre chaque sous-système, un solveur différent est utilisé en fonction de la nature du sous-problème à résoudre. Le solveur direct MUMPS est utilisé pour les sous-problèmes avec des matrices creuses, tandis que GMRES est utilisé pour les problèmes impliquant des matrices pleines.

5 Résultats

La formulation magnéto-statique a été validée sur le cas d'une sphère de perméabilité magnétique linéaire plongée dans un champ magnétique uniforme. Comparativement à la solution analytique, une erreur de 0.036 % est obtenue pour un maillage de 5095 tétraèdres.

Pour illustrer la modélisation mise en place, on considère un composite magnétoélectrique (Figure 2) composé de deux couches magnétostrictives et d'une couche piézoélectrique. Chaque couche a pour dimensions $3\text{ mm} \times 6\text{ mm} \times 14\text{ mm}$. La couche magnétostrictive est constituée de Terfenol-D, et la couche piézoélectrique est une céramique PZT polarisée dans l'épaisseur. Les propriétés des matériaux considérés sont issues de [7]. Le principe de fonctionnement est simple : le composite ME encastré à l'une de ses faces est placé dans un champ magnétique qui induit une déformation des couches magnétostrictives. Cette déformation est transmise à la couche piézoélectrique (Figure 3a), ce qui induit un champ électrique. Une différence de potentiel V_{out} (Figure 3b) est ensuite récupérée entre les électrodes de la couche piézoélectrique, dont l'une sert de référence.

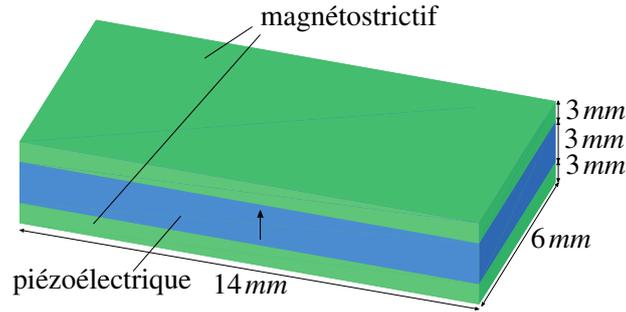


FIGURE 2 – Composite magnétoélectrique formé de deux couches magnétostrictives et d'une couche piézoélectrique.

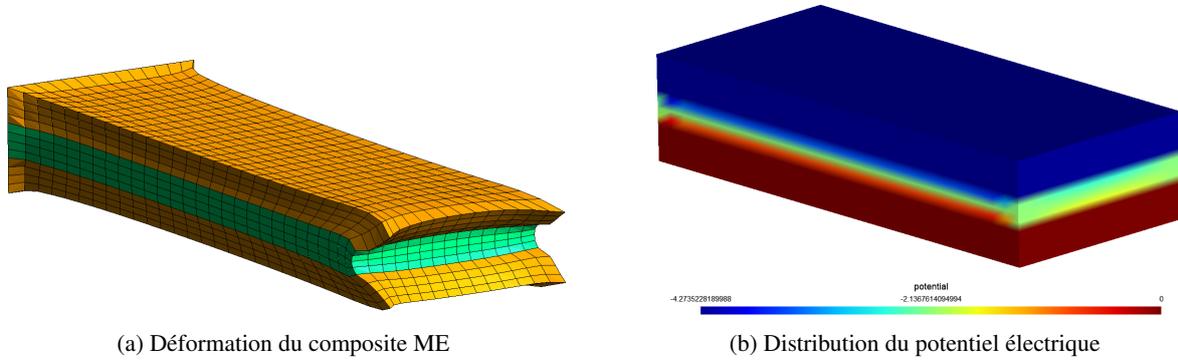


FIGURE 3 – Déformation et potentiel électrique induit dans le composite ME

Dans notre implémentation, le calcul du champ source se fait par l'utilisation de la loi de Biot & Savart. Dans une approche FEM pure, le calcul du champ source nécessite un calcul magnéto-statique préalable, sur un problème comportant un grand domaine d'air, le dispositif et la source. Ceci implique que le calcul du champ source dépendrait fortement de la distance entre le dispositif et la source de champ. Dans l'approche FEM-BEM, le coût de calcul du champ source est indépendant de la distance entre le composite magnétoélectrique et la distribution de courant.

Pour valider la modélisation, une comparaison avec une solution analytique est effectuée. Cette dernière repose sur quelques hypothèses, notamment le couplage mécanique est considéré comme étant parfait entre les couches et le champ démagnétisant est négligé. La solution analytique est ainsi donnée par :

$$V_{out} = \frac{e_{p31}}{d} \frac{e_{m12} + e_{m11}}{\epsilon_{33} (C_{11}^H + \gamma C_{11}^E + C_{12}^H + \gamma C_{12}^E) + 2e_{p31}^2} H_0 \quad (29)$$

où d correspond à l'épaisseur de la couche piézoélectrique et γ à la fraction volumique de la couche piézoélectrique (i.e 1/3). La comparaison avec la solution analytique est illustré à la Figure 4. On constate le très bon accord entre les deux solutions.

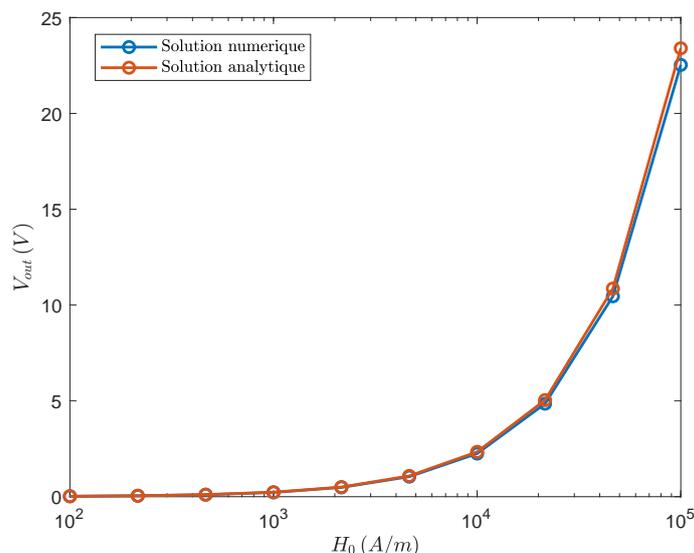


FIGURE 4 – Différence de potentiels entre les électrodes en fonction du champ source - comparaison solutions analytique et numérique

6 Conclusion

Une modélisation couplant les méthodes des éléments de frontière et des éléments finis a été proposée pour l'étude des composites magnétoélectriques. L'utilisation de la BEM pour traiter le sous-problème magnétique permet de restreindre le maillage aux matériaux actifs quelque soit le positionnement de la source de champ, ce qui est un avantage important en coût de calcul comparativement à une approche FEM globale. Pour résoudre le problème global, une stratégie de résolution par mono-physique a également été présentée. Il est à noter qu'avec cette approche il est également possible d'utiliser des techniques de compression matricielle (méthode multipolaire rapide ou approximation en croix adaptative) pour encore réduire les coûts de calcul.

Références

- [1] W. Eerenstein, N. D. Mathur, J. F. Scott, *Multiferroic and magnetoelectric materials*, Nature, 442, 759-765, 2006.
- [2] C.-W. Nan, M. I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan. *Multiferroic magnetoelectric composites : Historical perspective, status, and future directions*, J. Appl. Phys., 103(3), 031101, 2008.
- [3] W. Eerenstein, M. Wiora, J. L. Prieto, J. F. Scott, N. D. Mathur, *Giant sharp and persistent converse magnetoelectric effects in multiferroic epitaxial heterostructures*, Nature Materials, 6, 348-351, 2007.
- [4] S. Priya, R. Islam, S. Dong, *Recent advancements in magnetoelectric particulate and laminate composites*, J. Electroceram, 19, 147-164, 2007.
- [5] G. Meunier, J. Coulomb, S. Salon, L. Krahenbul. *Hybrid finite element boundary element solutions for three dimensional scalar potential problems*, IEEE Transactions on Magnetics, 22(5), 1040-1042, 1986.
- [6] J. Poblet-Puig, A. Rodriguez-Ferran. *The block Gauss-Seidel method in sound transmission problems*, Journal of Computational Acoustics, 18(1), 13-30, 2010.
- [7] T. A. Do, H. Talleb, A. Gensbittel, Z. Ren. *Homogenization of Magnetoelectric 0-3 Type Composites by 3-D Multiphysics Finite-Element Modeling*, IEEE Transactions on Magnetics, 55(6), 1-4, 2019.