

Méthode systématique de régularisation des lois thermo-élastoviscoplastiques en grandes déformations

M. Abatour¹, S. Forest¹, K. Ammar¹, C. Ovalle¹,
N. Osipov², S. Quilici²

¹ Mines Paristech, {mohamed.abatour, samuel.forest, kais.ammar, cristian.ovalle}@mines-paristech.fr

² TRANSVALOR SA, {nikolay.osipov, stephane.quilici}@transvalor.com

Résumé — Nous proposons une méthode systématique d’extension des lois de la thermo-élastoplasticité anisotrope en grandes déformations en se basant sur la décomposition multiplicative [1]. Les lois de comportement sont exprimées par rapport à la configuration intermédiaire *isocline*. Nous discuterons du choix du potentiel thermo-hyperélastique ainsi que la généralisation des lois d’écrouissage isotrope et cinématique. En plus, la présente méthode permet d’introduire par deux façons distinctes le *plastic spin* permettant de modéliser l’évolution des *directeurs* dans le cas de la plasticité anisotrope. La régularisation de ces modèles s’appuie sur la théorie des milieux micromorphes qui permet d’introduire des longueurs caractéristiques associées à la dimension physique des zones de localisation de la déformation. De plus, cette approche permet de modéliser les effets de taille.

Mots clés — grandes déformations, décomposition multiplicative, plastic spin, milieux micromorphes

1 Contexte

La simulation numérique par éléments finis des phénomènes de localisation de la déformation plastique et de l’endommagement s’accompagne en général d’une forte dépendance au maillage ainsi que des algorithmes utilisés. Cette difficulté est liée au caractère mal posé du problème aux limites dans le cas d’un fort adoucissement à cause de la perte d’ellipticité des équations différentielles aux dérivées partielles en jeu. Pour y remédier, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature : milieux à gradient d’ordre supérieur, milieux à gradient de variable interne, milieux de Cosserat ou micromorphes, méthode des champs de phase. Elles s’appuient sur l’introduction de longueurs caractéristiques associées à la dimension physique caractéristique des zones de localisation (taille de grain, espacement entre cavités, etc.). Cela nécessite une formulation cohérente et robuste intégrant l’élastoplasticité en transformations finies.

La plupart des codes industriels et de recherche existants s’appuient sur des formulations hypo-élastiques définies à l’aide des dérivées objectives. Ces lois, ne garantissant pas l’existence d’un potentiel d’élasticité, engendrent des artefacts vu leur caractère non conservatif. Par exemple, dans le cas d’un chargement cyclique fermé de déformations, les contraintes qui en résultent constituent un cycle non fermé. En plus, quelques dérivées objectives entraînent des comportements non physiques tels que des oscillations dans le cas de grandes rotations. D’un autre côté, il existe une bibliothèque riche de modèles thermo-élastoviscoplastiques pour différents types de matériaux établies en petites déformations [2]. Ces modèles sont facilement introduits dans les formulations corotationnelles basées sur une décomposition additive de la déformation. La description de l’anisotropie, à l’aide de ces formulations, reste limitée vu que les axes d’anisotropie tournent avec le repère corotationnel et en raison de l’absence de la notion du taux de rotation des directeurs de la matière appelé *plastic spin*.

2 Un formalisme de thermo-élastoplasticité anisotrope en grandes déformations

La décomposition multiplicative du gradient de la transformation en parties thermo-élastique $\tilde{\mathbf{F}}^e$ et inélastique $\tilde{\mathbf{F}}^p$ s'écrit

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^e \tilde{\mathbf{F}}^p \quad (1)$$

Le concept de configuration intermédiaire relâchée isocline [1] est adopté. Le gradient de vitesses se décompose en

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}^e + \tilde{\mathbf{F}}^e \tilde{\mathbf{L}}^p \tilde{\mathbf{F}}^{e-1} \quad (2)$$

On note par J_e et J_p le changement de volume élastique et plastique respectivement et par $\bar{\rho}$ la masse volumique de la configuration intermédiaire. La densité massique de l'énergie de Helmholtz $\psi(\tilde{\mathbf{E}}^e, T, \alpha_I)$ est fonction de la déformation élastique $\tilde{\mathbf{E}}^e = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{F}}^{eT} \tilde{\mathbf{F}}^e - \mathbf{1})$, la température T et les variables internes α_I . L'inégalité de Clausius-Duhem dans la configuration intermédiaire s'écrit

$$\left(\tilde{\Pi}^e - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}^e} \right) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^e + \tilde{\mathbf{M}} : \tilde{\mathbf{L}}^p - \bar{\rho} \sum_I \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \dot{\alpha}_I - \bar{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + \eta \right) \dot{T} - \frac{\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{g}_e}{T} \geq 0 \quad (3)$$

avec $\tilde{\Pi}^e = J_e \tilde{\mathbf{F}}^{e-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\mathbf{F}}^{e-T}$ est le tenseur des contraintes de Piola dans la configuration intermédiaire et $\tilde{\mathbf{M}} = J_e \tilde{\mathbf{F}}^{eT} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\mathbf{F}}^{e-T} = \tilde{\mathbf{C}}^e \tilde{\Pi}^e$ est le tenseur des contraintes de Mandel, non symétrique en général. Le flux de chaleur et le gradient de la température sur la configuration intermédiaire sont notés respectivement par $\mathbf{q}_e$ et $\mathbf{g}_e$. Les lois de comportement hyperélastiques pour les contraintes et l'entropie sont

$$\tilde{\Pi}^e = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}^e} \quad , \quad \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (4)$$

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les forces thermodynamiques $\mathbf{A}_I$ par :

$$\mathbf{A}_I = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \quad (5)$$

La dissipation intrinsèque est positive s'il existe un potentiel convexe Ω par rapport à $\tilde{\mathbf{M}}$ et concave par rapport à $\mathbf{A}_I$ tel que

$$\tilde{\mathbf{L}}^p = \frac{\partial \Omega(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{A}_I)}{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \quad , \quad \dot{\alpha}_I = - \frac{\partial \Omega(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{A}_I)}{\partial \mathbf{A}_I} \quad (6)$$

La déformation inélastique macroscopique est le résultat de plusieurs mécanismes qui agissent au niveau de la microstructure (mouvement de dislocations, maillage, viscosité, orientation des polymères, ...). Chaque mécanisme engendre une non-linéarité et des lois de comportement spécifiques. Le potentiel de dissipation total est la somme des contributions de chaque mécanisme inélastique Ω_k , et on écrit $\Omega = \sum_k \Omega_k$. La fonction de charge est définie dans l'espace des contraintes $\tilde{\mathbf{M}}$, $\mathbf{A}_I$ et la température T . Pour T et $\mathbf{A}_I$ donnés, le domaine élastique est défini par $\mathcal{D}_e = \{\tilde{\mathbf{M}} / f(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{A}_I, T) \leq 0\}$. La condition $f(\tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{A}_I, T) = 0$ définit la surface de charge qui s'écrit sous la forme

$$f(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{X}}, R) = [\tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{X}}]_{eq} - R_0 - R(p, \alpha_I) \quad (7)$$

où $[\cdot]_{eq}$ est la contrainte équivalente dont la définition repose sur les invariants du tenseur entre crochets. $\tilde{\mathbf{X}}$ est le tenseur d'écrouissage cinématique, R_0 est la limite d'élasticité initiale et R décrit la loi d'écrouissage isotrope dépendant de la plasticité cumulée p et des variables internes α_I .

2.1 Thermo-élasticité

Par défaut, nous adoptons la loi hyperélastique de St. Venant-Kirchhoff dont le potentiel d'énergie libre est donné par

$$\bar{\rho} \psi^e(\tilde{\mathbf{E}}^e, T) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^e : \tilde{\mathbb{C}} : \tilde{\mathbf{E}}^e - \Delta T \tilde{\beta} : \tilde{\mathbf{E}}^e - C_\epsilon T^2 \quad (8)$$

où $\tilde{\mathbb{C}}$ est le tenseur d'élasticité, $\tilde{\beta}$ est lié au tenseur des dilatations thermiques et C_ϵ est la chaleur massique à déformation constante. Toutefois, ce type de potentiel non-polyconvexe n'est pas adapté pour le cas de

grandes déformations élastiques. Dans ce cas, d'autres potentiels hyperélastiques peuvent être utilisés. Par exemple, la contribution purement élastique selon le modèle Néo-Hookéen s'écrit :

$$\bar{\rho}\psi^e(\mathbf{E}^e) = \frac{1}{2}\lambda(\log(J_e))^2 + \mu(tr(\mathbf{E}^e) - \log(J_e)) \quad (9)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

2.2 Écrouissage cinématique

En petites déformations, le modèle d'Armstrong-Frederick est très largement utilisé pour modéliser l'écrouissage cinématique. Par contre, il existe plusieurs façons pour le généraliser en grandes déformations. Les généralisations du modèle de Prager, c'est à dire, sans terme de restauration dynamique, dépendent du choix de la formulation en grandes déformations et en particulier dans le cas des rotations très importantes des axes principaux (glissement simple, torsion, ...) [3]. Néanmoins, il a été démontré que les différentes généralisations sont équivalentes tant que le terme de restauration est significatif [4, 5]. Nous proposons un modèle non associé avec deux termes de restauration [6], dynamique et statique :

$$\dot{\alpha} = \bar{\mathbf{L}}^p - \dot{\lambda}D\alpha - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{X})}{M}\right)^m \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{J}(\mathbf{X})}, \quad \mathbf{X} = \frac{2}{3}C\alpha \quad (10)$$

où C, D, m, M sont des paramètres matériau. En général, la variable interne α est non symétrique.

2.3 Plastic spin

La microstructure de chaque matériau est caractérisée par un *trièdre directeur*. La déformation plastique est le résultat de glissement mutuel entre les particules (cristaux dans un métal, particules d'un sol, ...). Cela se passe sans rotation des directeurs. Par conséquent, la rotation de la microstructure est induite par la déformation élastique et le mouvement de corps rigide, les deux introduits dans $\mathbf{F}^e$. Le taux de rotation de la microstructure $\bar{\mathbf{W}}^e$ ne dépend pas de la déformation plastique. Ainsi, on obtient $\bar{\mathbf{W}}^e$ par soustraction du *plastic spin* $\bar{\mathbf{W}}^p$ du taux de rotation total :

$$\bar{\mathbf{W}}^e = \text{skw}(\mathbf{F}^{e-1}\dot{\mathbf{F}}^e) = \bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}^p \quad (11)$$

La notation $\text{skw}(\diamond)$ désigne la partie antisymétrique. Il existe deux façons de formuler la loi du *plastic spin*. La première repose sur la théorie de représentation générale des tenseurs [7]. Par exemple,

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \beta(\mathbf{M}\bar{\mathbf{D}}^p - \bar{\mathbf{D}}^p\mathbf{M}) \quad (12)$$

avec β est un paramètre matériau (unité MPa^{-1}). La deuxième façon se dérive naturellement de la loi de normalité

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \text{skw}(\bar{\mathbf{L}}^p) = \text{skw}\left(\frac{\partial\Omega(\mathbf{M}, \mathbf{A}_I)}{\partial\mathbf{M}}\right) \quad (13)$$

Ceci est le cas pour les modèles de plasticité cristalline. La figure 1 illustre la différence entre deux formulations hypo-élastiques (dérivées corotationnelles de Jaumann et Green-Naghdi) et la présente formulation pour un matériau monocristallin. La présente méthode permet de prédire d'une façon plus exacte l'évolution de la microstructure donnée par l'expression du *plastic spin* (13). Ceci n'est pas le cas des formulations hypo-élastiques pour lesquelles la rotation de directeurs coïncide avec la rotation matérielle dictée par la dérivée objective.

3 Approche micromorphe de la plasticité en grandes déformations

Cette approche consiste à considérer le milieu classique dit de Cauchy dont le comportement élasto-plastique est décrit à l'aide d'un jeu de degrés de liberté $DOF0=\{\mathbf{u}\}$ et de variables internes $STATE0=\{\mathbf{E}, T, \alpha_I\}$. On sélectionne une variable interne $\phi \in STATE0$ et on lui associe un degré de liberté supplémentaire χ . Le milieu micromorphe est alors décrit par $DOF=\{\mathbf{u}, \chi\}$ et $STATE=\{\mathbf{E}, T, \alpha_I, \chi, \nabla\chi, \dots\}$.

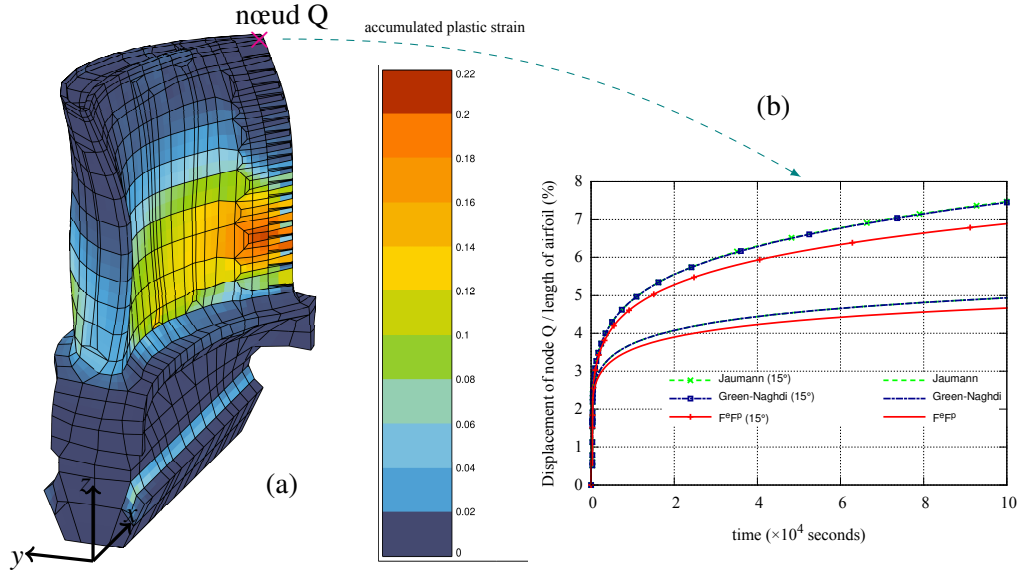


FIGURE 1 – (a) La déformation plastique cumulée dans une aube de turbine soumise à un chargement thermo-mécanique. Le matériau considéré est un monocristal avec deux familles de systèmes de glissement : octaédrique et cubique. (b) Le déplacement relatif du point Q en fonction du temps pour deux configurations (rotation initiale du réseau cristallin de 0 et 15° autour de l'axe y)

Les variables d'état sont enrichies par la variable micromorphe χ et son gradient (éventuellement, on peut introduire ses gradients d'ordre supérieur). Notons que χ peut être de type scalaire ou tensorielle. Ainsi, la puissance des efforts intérieurs dans la configuration actuelle s'écrit sous la forme

$$\mathcal{P}^{(i)} = \underline{\sigma} : \underline{D} + \underline{a}\chi + \underline{b} \cdot \nabla \chi + \dots \quad (14)$$

où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des contraintes généralisées. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites associés sont établies comme suit

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = 0 \\ \text{div} \underline{b} - \underline{a} = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{B} \quad \begin{cases} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t} \\ \underline{b} \cdot \underline{n} = \underline{a}^c \end{cases} \quad \forall x \in \partial \mathcal{B} \quad (15)$$

$\mathcal{B}$ étant la configuration actuelle du corps matérielle et $\partial \mathcal{B}$ son bord. La forme locale du second principe dans la configuration actuelle s'écrit :

$$\mathcal{P}^{(i)} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (16)$$

De même, le second principe écrit dans la configuration de référence est $\mathcal{P}_0^{(i)} - \rho_0 \dot{\psi}_0 \geq 0$ et par rapport à la configuration intermédiaire $\bar{\mathcal{P}}^{(i)} - \bar{\rho} \dot{\bar{\psi}} \geq 0$. On note par ψ^{ref} le potentiel d'énergie libre dans le cas classique. En grandes déformations, le potentiel de l'énergie libre peut être exprimé en fonction du gradient Eulérien $\underline{k}$, Lagrangien $\underline{K}$ et par rapport à la configuration intermédiaire $\bar{\underline{K}}$ de la variable micromorphe. Les lois de comportement sont données par (4) et (5). En plus, les expressions des contraintes

Formulations	Puissance d'efforts intérieurs	Énergie libre	Contraintes généralisées
Eulérienne	$\mathcal{P}^{(i)} = \underline{\sigma} : \underline{D} + \underline{a}\chi + \underline{b} \cdot \underline{\dot{k}}$	$\psi = \psi^{ref} + \psi^\chi(\alpha_I, \chi, \underline{k})$	$\underline{a} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad \underline{b} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{k}}$
Lagrangienne	$\mathcal{P}_0^{(i)} = \underline{P} : \underline{\dot{E}} + a_0 \dot{\chi} + b_0 \cdot \underline{\dot{K}}$	$\psi_0 = \psi^{ref} + \psi_0^\chi(\alpha_I, \chi, \underline{K})$	$a_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \chi}, \quad b_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{K}}$
% à la configuration intermédiaire	$\bar{\mathcal{P}}^{(i)} = \bar{\underline{P}} : \bar{\underline{\dot{E}}} + (\bar{\underline{M}} + \bar{\underline{K}} \otimes \bar{\underline{b}}) : \bar{\underline{\dot{L}}} + \bar{a} \dot{\chi} + \bar{\underline{b}} \cdot \bar{\underline{\dot{K}}}$	$\bar{\psi} = \psi^{ref} + \bar{\psi}^\chi(\alpha_I, \chi, \bar{\underline{K}})$	$\bar{\underline{a}} = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi}, \quad \bar{\underline{b}} = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\underline{K}}}$

TABLE 1 – L'expression de la puissance des efforts intérieurs, le potentiel d'énergie libre et les lois de comportement pour les contraintes généralisées.

généralisées sont détaillées dans la table 1. Les lois d'évolution dans le cas des formulations Eulérienne et Lagrangienne sont données, comme pour un milieu classique, par l'équation (6). Cependant, pour la formulation par rapport à la configuration intermédiaire, la loi de normalité s'écrit

$$\bar{\underline{L}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial (\bar{\underline{M}} + \bar{\underline{K}} \otimes \bar{\underline{b}})} \quad (17)$$

Le terme $\overline{\mathbf{K}} \otimes \overline{\mathbf{b}}$ est une contribution au tenseur de Mandel généralisé qui joue le rôle d'un écrouissage cinématique supplémentaire.

Dans la suite, nous appliquons cette méthode au cas de la plasticité de von Mises en sélectionnant $\chi \equiv p$. La variable micromorphe associé est notée p_χ . On choisit la formulation lagrangienne et un potentiel énergie libre quadratique de la forme :

$$\Psi(\underline{\mathbf{E}}^e, p, p_\chi, \nabla_0 p_\chi) = \frac{1}{2\overline{\rho}} \underline{\mathbf{E}}^e : \underline{\mathbb{C}} : \underline{\mathbf{E}}^e + \frac{1}{2\overline{\rho}} H p^2 + \frac{1}{2\rho_0} \nabla_0 p_\chi \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla_0 p_\chi + \frac{H_\chi}{2\rho_0} (p - p_\chi)^2 \quad (18)$$

conduisant aux lois de comportements

$$\underline{\Pi}^e = \underline{\mathbb{C}} : \underline{\mathbf{E}}^e, \quad a_0 = -H_\chi (p - p_\chi), \quad \underline{\mathbf{b}}_0 = \underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla_0 p_\chi \quad (19)$$

où H_χ et A (unités MPa et N resp.) sont des modules généralisés. En substituant l'équation (19) dans l'équation de bilan, on obtient l'opérateur de régularisation

$$p = p_\chi - \frac{1}{H_\chi} \text{div}(\underline{\mathbf{A}} \nabla_0 p_\chi) \quad (20)$$

qui devient dans le cas homogène et isotrope (c.-à-d. $\underline{\mathbf{A}} = A \underline{\mathbf{1}}$) :

$$p = p_\chi - \frac{A}{H_\chi} \Delta p_\chi \quad (21)$$

Le cas-limite $H_\chi \rightarrow \infty$ correspond à la théorie de la plasticité à gradient [8]. Les différentes formulations présentées dans la table 1 conduisent à d'autres opérateurs de régularisation [9].

3.1 Effets d'échelle

Nous traitons le cas de traction simple d'un laminé en conditions de déformations planes. La déformation plastique est hétérogène en raison des conditions aux limites $p_\chi = 0$ aux bords $x = \pm h$. La valeur de $p_\chi = 0$ est libre aux bords latéraux. Les courbes de la contrainte σ_{11} moyenne en fonction de F_{11} moyen imposé et le profil de la déformation plastique cumulée sont illustrés dans la figure 2. La valeur de la longueur caractéristique est ajustée par les paramètres A et H_χ . La loi d'écrouissage dans ce cas s'écrit :

$$R = R_0 - A \Delta p_\chi \quad (22)$$

Cela signifie qu'un écrouissage isotrope supplémentaire est rajouté dans le modèle de référence tant que le laplacien Δp_χ n'est pas nul. Si la longueur du laminé h diminue, la contrainte σ_{11} augmente (voir fig. 2).

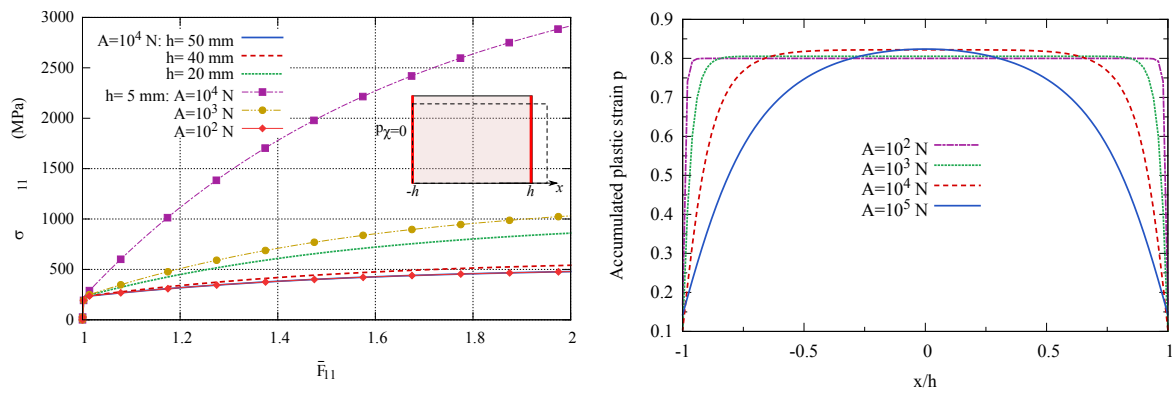


FIGURE 2 – Un laminé en traction simple avec plasticité confinée. $H_\chi = 10^5 \text{ MPa}$, $R_0 = 200 \text{ MPa}$, $H = 0$.

3.2 La localisation de la déformation plastique

On considère un matériau élastoplastique adoucissant. La loi d'écrouissage s'écrit : $R(p) = Hp$ avec un module de plasticité $H < 0$. La plaque est soumise à la traction simple. Un petit défaut est introduit au milieu de la plaque afin de déclencher la localisation. La figure 3 illustre une distribution harmonique de la déformation plastique cumulée pour trois longueurs caractéristiques données par $l = \sqrt{\frac{A(H + H_\chi)}{|H|H_\chi}}$.

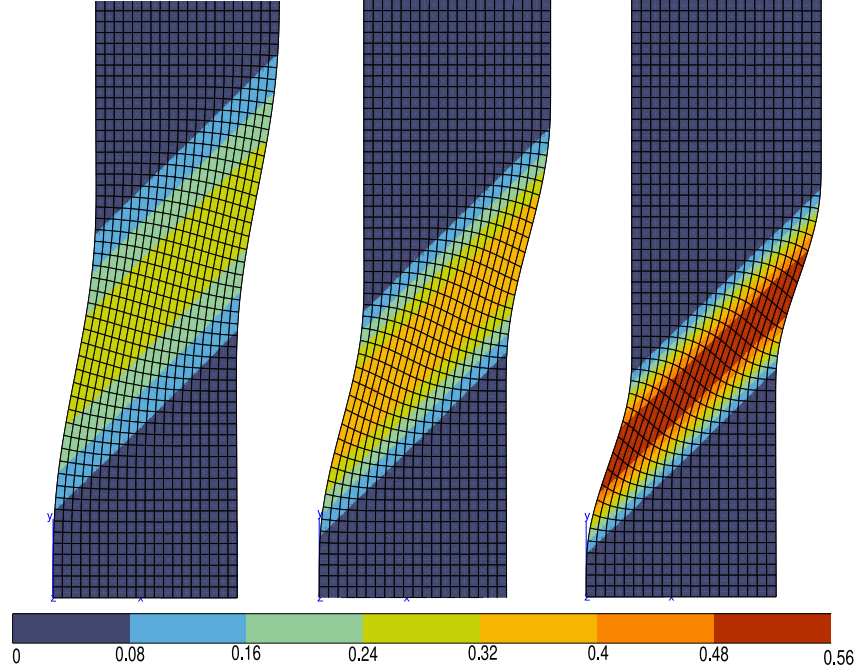


FIGURE 3 – Bande de localisation de la déformation plastique pour trois longueurs caractéristiques dans une plaque en traction dans la direction y .

4 Conclusions

Un cadre général de formulation des lois de comportement non linéaires, qui se base sur la décomposition multiplicative, a été proposé. Il constitue une alternative aux formulations hypo-élastoplastiques très largement utilisées dans les codes de simulation par éléments finis. En plus de sa cohérence avec les lois thermodynamiques et sa meilleure capacité de prédiction dans le cas de plasticité anisotrope, la présente approche s'avère compétitive en termes d'efficacité numérique. Une légère augmentation du coût de calcul est constatée, ce qui peut être expliqué par l'intégration numérique d'équations impliquant des tenseurs non symétriques.

Une méthode de régularisation des modèles élastoplastiques en transformations finies basée sur la théorie des milieux micromorphes a été présentée. Elle permet également de modéliser le comportement des matériaux sensibles aux effets d'échelle. Plusieurs choix de modélisation sont possibles : la variable micromorphe (déformation plastique cumulée ou équivalente, déformation totale, ...), sa nature (scalaire ou tensorielle), et le type du gradient en transformations finies (Eulérien, Lagrangien, ...). En guise d'illustration, des exemples d'application où le choix de la variable micromorphe est porté sur la déformation plastique cumulée et un potentiel d'énergie libre de forme quadratique de ses arguments ont été donnés. Suivant les lois de comportement considérés, notamment leur formulation en transformations finies, des opérateurs de régularisation distincts sont obtenus dont les avantages et inconvénients restent à mesurer par des simulations numériques systématiques.

Références

- [1] J. Mandel. *Équations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 725-740, 1973.
- [2] *Zset finite element code*, <http://www.zset-software.com>.
- [3] A. Dogui F. Sidoroff. *Kinematic hardening in large elastoplastic strain*, Engineering Fracture Mechanics, 685-695, 1985.
- [4] W. Dettmer S. Reese. *On the theoretical and numerical modelling of Armstrong-Frederick kinematic hardening in the finite strain regime*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 87-116, 2004.
- [5] Ch. Tsakmakis A. Willuweit. *A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 539-554, 2004.
- [6] J. Lemaitre J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1994
- [7] Y. F. Dafalias. *Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations*, Journal of Applied Mechanics, ASME, 561-565, 1983.
- [8] E. C. Aifantis. *On the microstructural origin of certain inelastic models*, Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, 326-330, 1984.
- [9] S. Forest. *Nonlinear regularization operators as derived from the micromorphic approach to gradient elasticity, viscoplasticity and damage*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society Publishing, 20150755, 2016.