

Etude numérique de l'amortissement de structures composites à fibre de lin par une méthode itérative d'ordre élevé.

M. Ziapkoff¹, G. Robin², L. Duigou¹, EM Daya², JM Cadou¹

¹ IRDL, Institut de Recherche Dupuy de Lôme, UMR CNRS 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France {laetitia.duigou,jean-marc.cadou}@univ-ubs.fr

² Université de Lorraine, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, UMR CNRS 7239F-57000 Metz, France

Résumé — Dans ce travail, nous nous intéressons à un problème de vibration de structures composites à fibres naturelles. La loi de comportement du pli fibres de lin/matrice étant non-linéaire, une méthode de Newton d'ordre élevé (MNOE) est utilisée pour résoudre le problème de vibration complexe non-linéaire. Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation.

Mots clefs — Vibration, composites, fibre de lin, viscoélasticité, homotopie, perturbation.

1. Introduction

Les structures composites sont utilisées dans de nombreux domaines industriels pour lesquels la maîtrise du bruit et des amplitudes de vibration sont des problématiques sensibles. En effet, le confort sonore et la sécurité des personnes ou des biens sont des préoccupations dans de nombreux secteurs d'activités (transport, BTP, ingénierie civile, militaire...). Afin d'atténuer ou de réduire ces vibrations, des matériaux spécifiques peuvent être utilisés. Dans cette étude, nous nous intéressons aux fibres biosourcées et plus précisément à la fibre de lin. En effet, cette dernière présente de nombreux avantages : sa capacité intrinsèque d'amortissement associé à un faible poids [1]. Cependant peu d'études numériques existent dans la littérature concernant la modélisation du comportement vibratoire de ces matériaux naturels.

C'est pourquoi dans ce travail, réalisé dans le cadre du projet ANR-Bio-Damping, nous étudions le comportement vibratoire de structures composites laminées de fibres de lin. Une loi de comportement isotrope transverse [5] de type viscoélastique est proposée pour un pli fibre de lin/matrice. Ceci conduit à résoudre numériquement un problème non linéaire aux valeurs propres complexes. Pour cela, nous proposons un algorithme basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Dans cette étude, la non linéarité est la dépendance du module d'Young et du coefficient d'amortissement du matériau en fonction de la pulsation. Des comparaisons avec des résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature permettent de valider la méthode proposée.

2. Équations du problème

2.1. Equation du problème de vibration des structures composites

En considérant le Principe des Puissances Virtuelles, la relation contrainte déformation et la discrétisation par éléments finis, le problème discret de vibration des structures composites peut s'écrire sous la forme :

$$([K^*(\omega)] + C^*[M])\{U^*\} = \{0\} \quad (1)$$

avec $C^* = -\omega^2$

Le symbole M désigne la matrice de masse. Le vecteur modal est représenté par $\{U^*\}$ et la fréquence de vibration par ω . Les composantes complexes sont signalées par un astérisque (*) exceptée ω , pour des raisons de simplification d'écriture. Ainsi la matrice de rigidité $K^*(\omega)$, dépendante de la fréquence, est complexe.

2.2 Expression de la matrice de rigidité $K^*(\omega)$

La matrice de rigidité de la structure dépend du nombre de plis, de l'épaisseur et de l'orientation de ces plis ainsi que des propriétés mécaniques du matériau. En considérant la loi de comportement d'un pli, isotrope transverse [4], cette matrice de rigidité peut être mise sous la forme symbolique suivante :

$$[K^*(\omega)] = [\Lambda_L].E_L^*(\omega) + [\Lambda_T].E_T^*(\omega) + [\Lambda_{LT}].G_{LT}^*(\omega) \quad (2)$$

Où les opérateurs $[\Lambda_M]$ dépendent du nombre de plis, de leur épaisseur ainsi que de leur orientation. A noter, que par souci de simplification, nous considérons dans cette écriture que tous les plis du stratifiés sont constitués du même matériau. Ainsi, les modules $E_L^*(\omega), E_T^*(\omega), G_{LT}^*(\omega)$ sont identiques pour toutes les couches et peuvent être mis en facteur. Au niveau de la résolution numérique, les plis peuvent être constitués de matériaux différents. Les modules $E_L^*(\omega), E_T^*(\omega), G_{LT}^*(\omega)$ sont donc différents entre plis, la forme symbolique (2) est alors plus complexe à écrire.

Dans l'équation (2), on voit ainsi que les modules de comportement viscoélastique $\mathcal{M}^* = (E_L^*(\omega), E_T^*(\omega) \text{ et } G_{LT}^*(\omega))$ sont considérés comme indépendants les uns des autres. A noter que dans cette étude les coefficients de Poisson suivant les trois directions (L, T et LT) sont également considérés constants (indépendants de la fréquence) et réels [7].

Dans ce travail, on considère que le pli a un comportement de type viscoélastique représenté par une loi de type Zener fractionnaire [3]. Chaque module \mathcal{M}^* s'écrit alors

$$\mathcal{M}^*(\omega) = \frac{\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (3)$$

soit en posant $\omega_n = \omega\tau$ et $c = \mathcal{M}_\infty / \mathcal{M}_0$, ces modules peuvent se réécrire :

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M}'^*(\omega)(1 + j\eta^*(\omega)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{M}'^*(\omega) = \mathcal{M}_0 \frac{1 + (c+1) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega_n^\alpha + c \omega_n^{2\alpha}}{1 + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}} \\ \eta^*(\omega) = \frac{(c-1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega_n^\alpha}{1 + (1+c) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega_n^\alpha + c \omega_n^{2\alpha}} \end{cases} \quad (4)$$

Le problème à résoudre (1) est donc complexe et non-linéaire. Dans cette étude, nous proposons une méthode de résolution basée sur l'association des techniques d'homotopie et de perturbation.

3. Résolution du problème

Pour résoudre le problème de vibration (1) et évaluer à la fois la fréquence de résonance et l'amortissement de la structure, les codes commerciaux tels que Abaqus ou Ansys ne sont pas adaptés. Ici, nous proposons une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation (MNOE) [2].

Nous considérons le problème non linéaire (1) ayant pour inconnue le vecteur complexe $\{U^*, C^*\}$. La technique d'homotopie est utilisée afin de le résoudre par un algorithme itératif d'ordre élevé. Les incréments suivants sont introduits :

$$\begin{Bmatrix} \Delta U^* \\ \Delta C^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^* - U_0^* \\ C^* - C_0^* \end{Bmatrix} \text{ et } [\Delta K^*] = [K^*(\omega)] - [K^*(\omega_0)] \quad (5)$$

avec $\{U_0^*, C_0^*\}$, un point initial à définir. $[K^*(\omega_0)]$ correspond à la matrice de rigidité calculée en ω_0 . Après insertion de (5) et de quelques manipulations, nous obtenons :

$$[L]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{U_0^*\} + \{R_0\} + [\Delta K^*]\{U_0^*\} + [\Delta K^*]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{\Delta U^*\} = \{0\} \quad (6)$$

avec $[L] = [K^*(\omega_0)] + C_0^*[M]$ et $R_0 = ([K^*(\omega_0)] + C_0^*[M])\{U_0^*\}$

Ceci nous permet d'introduire artificiellement un paramètre ε :

$$[L]\Delta U^* + \Delta C^*[M]\{U_0^*\} + \varepsilon \{R_0\} + \varepsilon [\Delta K^*]\{U_0^*\} + [\Delta K^*]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{\Delta U^*\} = \{0\} \quad (7)$$

On peut remarquer que le problème initial (1) correspond à $\varepsilon = 1$.

Le point initial est choisi de la manière suivante $\{U_{na}, \omega_{na}\}$ et représente respectivement le mode propre réel et la fréquence de résonance non amortie, obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres réelles par des méthodes classiques telles que la méthode de sous-espace ou la méthode de Lanczos.

A ce stade, nous cherchons l'ensemble des termes du vecteur $X = \{U^*, C^*, \omega^*, \mathcal{M}^*, \eta^*\}$ sous la forme d'une série entière du paramètre ε et tronquée à un ordre N :

$$\{X\} = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \{X_j\} \quad (8)$$

Dans l'expression de la matrice $K^*(\omega)$ (2) apparaît les modules \mathcal{M}^* . Cette dernière est également décomposée comme une série entière par rapport au paramètre ε :

$$[K^*(\omega)] = [K^*] = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [K^*_j] = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \{[\Lambda_L] \cdot E_{L_j}^* + [\Lambda_T] \cdot E_{T_j}^* + [\Lambda_{LT}] \cdot G_{LT_j}^*\} \quad (9)$$

Où $[K_0^*]$ est calculée en prenant ω égal à ω_0 , soit $[K_0^*] = [K(\omega_0^*)]$.

L'introduction des développements asymptotiques ((8) et (9)) dans l'équation modifiée (7) et l'identification suivant les puissances de ε conduisent aux systèmes linéaires suivant:

Ordre 1 :

$$[L]\{U_1^*\} + C_1^* [M]\{U_0\} = -R_0 \quad (10)$$

Ordre 2 :

$$(11)$$

$$[L]\{U_2^*\} + C_2^* [M]\{U_0\} = -[K_1^*]\{U_0\} - C_1^* [M]\{U_1^*\} - [K_1^*]\{U_1^*\}$$

Ordre $k \geq 2$:

$$[L]\{U_k^*\} + C_k^* [M]\{U_0\} = -[K_{k-1}^*]\{U_0\} - \sum_{j=1}^{k-1} \left(C_j^* [M]\{U_{k-j}^*\} + [K_j^*]\{U_{k-j}^*\} \right) \quad (12)$$

La difficulté de cette étude réside dans la dépendance des modules de comportement \mathcal{M}^* à la fréquence ω . Ainsi, l'équation (3) définissant cette relation est fortement non linéaire. L'identification à chaque ordre k des coefficients de \mathcal{M}_k^* et de η_k^* (4) n'est ainsi pas simple à réaliser. L'introduction des développements asymptotique dans ces équations suppose donc de modifier ces dernières afin d'identifier les relations de récurrence. L'idée générale est d'introduire de nouvelles variables afin de réécrire les équations à traiter sous une forme quadratique plus adaptée à l'insertion des développements asymptotiques [8]. Ainsi les équations (4) sont réécrites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}^* = \frac{\mathcal{M}_0 (1+D B^* + c A^*)}{1+F B^* + A^*} \\ \eta^* = \frac{H B^*}{1+D B^* + c A^*} \end{array} \right. \quad \text{Avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^* = v^{*2\alpha} \\ B^* = v^{*\alpha} \\ v^{*2} = (\omega_n^2 + \xi) \\ A^* dv^* - 2\alpha v^* dA^* = 0 \\ B^* dv^* - \alpha v^* dB^* = 0 \\ D = (1+c) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ F = 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ H = (c-1)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \end{array} \right. \quad (13)$$

Où ξ , est un paramètre de régularisation dont la valeur est définie par l'utilisateur. Dans les applications numériques, ce paramètre varie entre $\xi=10^{-6}$ et 10^{-9} . Cette régularisation permet d'éviter des difficultés numériques au voisinage d'une pulsation nulle. Le symbole « d » désigne la différentielle de la variable.

Après avoir modifié les équations à résoudre, les développements asymptotiques peuvent alors être introduits. Ainsi, nous identifions suivant les puissances du paramètre ε et nous obtenons à chaque ordre :

A l'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}'_0 = \frac{\mathcal{M}_0 (1+D B^*_0 + c A^*_0)}{1+F B^*_0 + A^*_0} \\ \eta_0 = \frac{H B^*_0}{1+D B^*_0 + c A^*_0} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = \sqrt{\omega_{n_0}^2 + \xi} \\ A^*_0 = \omega_{n_0}^{2\alpha} \\ B^*_0 = \omega_{n_0}^\alpha \\ dv^*_0 = v^*_1 \\ dA^*_0 = \frac{A^*_0 dv^*_0}{2\alpha v^*_0} \\ dB^*_0 = \frac{B^*_0 dv^*_0}{\alpha v^*_0} \end{array} \right.$$

A l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}'^*_1 = \frac{\mathcal{M}_0 (D B^*_1 + c A^*_1) - \mathcal{M}'^*_0 (F B^*_1 + A^*_1)}{1 + F B^*_0 + A^*_0} \\ \eta^*_1 = \frac{H B^*_1 - \eta_0 (D B^*_1 + c A^*_1)}{1 + D B^*_0 + c A^*_0} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} v^*_1 = \frac{2 \omega_{n_0} \omega_{n_1}}{2 v^*_0} \\ A^*_1 = \frac{A^*_0 dv^*_0}{2 \alpha v^*_0} \\ B^*_1 = \frac{B^*_0 dv^*_0}{\alpha v^*_0} \\ dv^*_1 = 2v^*_2 \\ dA^*_1 = \frac{A^*_0 dv^*_1 + A^*_1 dv^*_0 - 2 \alpha v^*_1 dA^*_0}{2 \alpha v^*_0} \\ dB^*_1 = \frac{B^*_0 dv^*_1 + B^*_1 dv^*_0 - \alpha v^*_1 dB^*_0}{\alpha v^*_0} \end{array} \right.$$

A l'ordre $k \geq 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}'^*_k = \frac{\mathcal{M}_0 (D B^*_k + c A^*_k) - \mathcal{M}'^*_0 (F B^*_k + A^*_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{M}'^*_j (F B^*_{k-j} + A^*_{k-j})}{1 + F B^*_0 + A^*_0} \\ \eta^*_k = \frac{H B^*_k - \eta_0 (D B^*_k + c A^*_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j (D B^*_{k-j} + c A^*_{k-j})}{1 + D B^*_0 + c A^*_0} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} v^*_k = \frac{2 \omega_{n_0} \omega_{n_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{n_j} \omega_{n_{k-j}} - \sum_{j=1}^{k-1} v^*_j v^*_{k-j}}{2 v^*_0} \\ A^*_k = \frac{A^*_0 dv^*_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} A^*_j dv^*_{k-1-j} + A^*_{k-1} dv^*_0 - 2 \alpha (\sum_{j=1}^{k-2} v^*_j dA^*_{k-1-j} + v^*_{k-1} dA^*_0)}{k 2 \alpha v^*_0} \\ B^*_k = \frac{B^*_0 dv^*_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} B^*_j dv^*_{k-1-j} + B^*_{k-1} dv^*_0 - \alpha (\sum_{j=1}^{k-2} v^*_j dB^*_{k-1-j} + v^*_{k-1} dB^*_0)}{k \alpha v^*_0} \\ dv^*_k = k v^*_k \\ dA^*_k = \frac{A^*_0 dv^*_k + \sum_{j=1}^{k-1} A^*_j dv^*_{k-j} + A^*_k dv^*_0 - 2 \alpha (\sum_{j=1}^{k-1} v^*_j dA^*_{k-j} + v^*_k dA^*_0)}{2 \alpha v^*_0} \\ dB^*_k = \frac{B^*_0 dv^*_k + \sum_{j=1}^{k-1} B^*_j dv^*_{k-j} + B^*_k dv^*_0 - \alpha (\sum_{j=1}^{k-1} v^*_j dB^*_{k-j} + v^*_k dB^*_0)}{\alpha v^*_0} \end{array} \right.$$

A noter que pour des raisons de facilité de lecture, nous n'avons pas fait la distinction entre parties réelle et imaginaire dans les expressions précédentes.

En développant chacun des termes dépendant de ω , sous sa forme asymptotique et en identifiant suivant les puissances de ε dans l'équation (7), on a obtenu une série de problèmes linéaires. Pour avoir autant d'équations que d'inconnues, une condition de normalisation sur le mode est rajoutée :

$$\{ {}^t U_k \} [M] \{ U_0 \} = 0$$

A l'ordre k , le problème s'écrit alors:

$$[L_t] \begin{Bmatrix} U_k \\ p_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [M] \{ U_0 \} \\ {}^t ([M] \{ U_0 \}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ p_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_k^{nl} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le second membre, $\{ F_k^{nl} \}$, dépendra seulement des termes précédents et l'opérateur tangent $[L_t]$ sera actualisé à chaque itération.

4. Résultats numériques

Afin de valider la méthode de Newton d'ordre élevée (MNOE) proposée, nous considérons une plaque composite encadrée libre. Nous prenons l'exemple présenté par Hafidi *et al.* [3]. La plaque composite en époxy renforcée par des fibres de lin ($V_f = 40\%$) a les caractéristiques géométriques suivantes : ($170 \times 10 \times 1 \text{ mm}^3$). Elle est constituée de 4 plis dont les paramètres matériaux sont donnés dans la Table 1. Les coefficients de Poisson ν_{LT} , ν_{TL} et la masse volumiques sont respectivement égaux à 0,43, 0,11 et 1289 kg/m^3 . La loi viscoélastique est de type Zener fractionnaire dont les paramètres sont définis dans la Table 1.

	\mathcal{M}_0 (GPa)	\mathcal{M}_∞ (GPa)	τ (s)	α
E_L (0°)	19,2	20,7	$1,50 \cdot 10^{-5}$	0,422
E_T (90°)	5,03	5,63	$1,59 \cdot 10^{-5}$	0,422
G_{LT} ($\pm 45^\circ$)	2,65	2,9	$1,50 \cdot 10^{-5}$	0,422

Table 1 – Paramètres rhéologiques des modèles de Zener Fractionnaire d'un pli fibres de lin/polymère

Les résultats de la figure 1 représente l'évolution du coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence de vibration pour les modules E_L^* et permet de comparer nos résultats numériques aux résultats expérimentaux et numériques de Hafidi *et al.* [3].

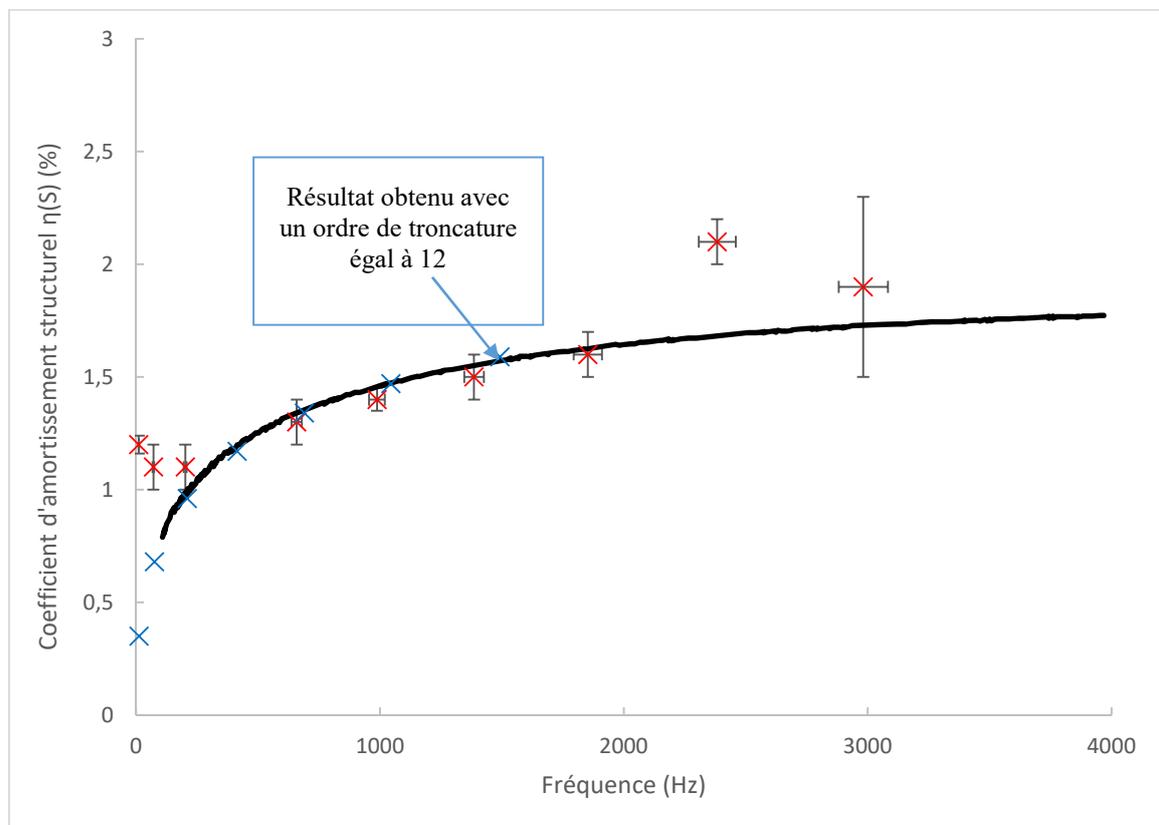


Figure 1 : Dépendance en fréquence du coefficient d'amortissement η_s pour un composite $[\pm 60^\circ]_s$. Comparaison entre les résultats numériques (—) et expérimentaux (x) de Hafidi *et al.* [3] et les résultats numériques MNOE (x).

Les points représentant les résultats numériques obtenus par la méthode MNOE suivent les courbes expérimentale et numérique obtenus par Hafidi *et al.* [3]. Cela nous montre que le calcul des fréquences amorties, nécessaire pour calculer les coefficients d'amortissement est correctement réalisé par la méthode proposée.

Nous considérons maintenant une plaque carrée ($0.5*0.5*0.05 \text{ m}^3$) en appui simple et constituée d'un matériau isotrope (Litewka et Lewandowski [6]). Les coefficients de Poisson ν_{LT} , ν_{TL} et la masse volumique sont respectivement égaux à 0,45 , 0,45 et 1000 kg/m^3 . Le matériau suit la loi viscoélastique de type Zener fractionnaire dont les paramètres sont $\tau \text{ (s)} = 0.016$, $\alpha = 0.52$ et $\frac{E_\infty}{E_0} = 2$. Le temps de relaxation est de 0.016 s, ce qui signifie que nous sommes dans un cas très amorti.

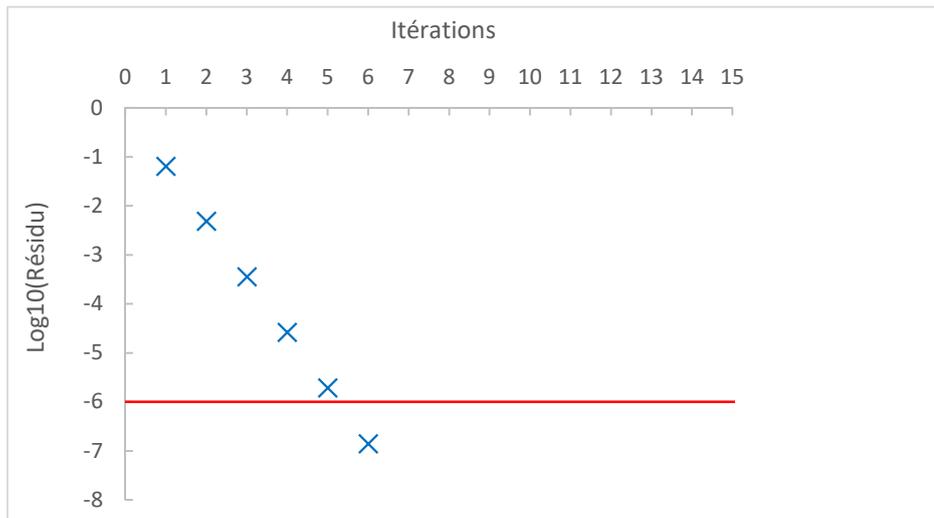


Figure 2 : Evolution du log10 du résidu en fonction du nombre d'itérations pour le premier mode de l'exemple de la plaque composite carrée de Litewka et Lewandowski [6] avec $\tau = 0,016$, $\alpha = 0,52$, $\frac{E_\infty}{E_0} = 2$. Méthode de Newton Classique.



Figure 3 : Evolution du log10 du résidu en fonction de l'ordre de troncature des séries pour le premier mode de vibration de l'exemple de la plaque composite carrée de Litewka et Lewandowski [6] avec $\tau = 0,016$, $\alpha = 0,52$, $\frac{E_\infty}{E_0} = 2$. (MNOE).

Les figures 2 et 3 permettent de comparer le nombre d'itérations et l'ordre de troncature respectivement de la méthode de Newton classique et de MNOE pour obtenir la convergence au premier mode de vibration ($\omega_{am} = 51.3$ rad/s et $\eta_s = 0.08$). L'objectif étant d'atteindre un résidu inférieur à 10^{-6} , la méthode de Newton classique nécessite 6 itérations (soit six calculs de matrice à inverser) alors que la méthode de Newton d'ordre élevé ne nécessite qu'une itération et 12 ordres (soit un seul calcul de matrice à inverser et 12 résolutions de systèmes linéaires).

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme itératif d'ordre élevé (MNOE) pour résoudre le problème de vibration d'une structure composite. Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Elle permet de passer d'un problème non-linéaire en une série de problèmes linéaires. La particularité de ce travail réside dans le fait que la loi de comportement des modules de chaque pli est de type Zener fractionnaire : Ces derniers varient en fonction d'une puissance de la fréquence. Ceci implique l'introduction de variables intermédiaires et une modification des équations initiales pour écrire une série de problèmes linéaires à résoudre. Dans ce cas, le second membre est calculé en fonctions des inconnues aux ordres précédents. Une comparaison avec les résultats expérimentaux et numériques présentés par Hafidi *et al.* [3] et Litewka et Lewandowski [6] permet de valider l'ensemble des développements pour un composite présentant des plis identiques en fibres de lin/époxy. Dans ce travail, nous n'avons présenter qu'une loi de type Zener fractionnaire mais des développements identiques ont été réalisés pour les lois de type Zener Maxwell et Maxwell généralisé.

Une campagne d'essais expérimentaux va être également réalisée dans les prochains mois afin de déterminer précisément les coefficients matériaux nécessaires à la simulation numérique de ces structures composites à base de fibres de lin.

Références bibliographiques

- [1] F. Duc, P.E. Bourban, C.J.G. Plummer, J.-A.E. Manson. Damping of thermoset and thermoplastic flax fibre composites. *Composites: Part A*, 64, 115-123, 2014.
- [2] L. Duigou, E.M. Daya and M. Potier-Ferry, Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12): p. 1323-1335, 2003.
- [3] A. El-Hafidi, P.B. Gning, B. Piezel, M. Belaïd, S. Fontaine. Determination of dynamic properties of flax fibres reinforced laminate using vibration measurements. *Polymer testing*, 57, 219-225, 2017.
- [4] D. Gay, *Matériaux composites*, Editions Lavoisier, 690 pages, 1987.
- [5] A. Hallal, F. Fardoun, R Younes, F Hage Chehade. Evaluation of longitudinal and transversal Young's moduli for unidirectional composite material with long fibers. *Advanced Materials Research* 324, pp 189-192, 2011.
- [6] P. Litewka, R. Lewandowski. Dynamic characteristics of viscoelastic Mindlin plates with influence of temperature, *Computers & Structures*, Volume 229, 2020.
- [7] M. Matter. Identification modale numérique-expérimentales des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites, Thèse de doctorat en Mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- [8] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao and A. Elhage Hussein. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t.324, Série II b, 171-177, 1997.