

# Modélisation dynamique de stator par la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'optimisation vibroacoustique des moteurs électriques

M. Jeannerot<sup>1,2,3</sup>, M. Ouisse<sup>2</sup>, E. Sadoulet-Reboul<sup>2</sup>, J.-B. Dupont<sup>1</sup>, V. Lanfranchi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Vibratec, {martin.jeannerot, jean-baptiste.dupont}@vibratec.fr

<sup>2</sup> FEMTO-ST, Université Bourgogne Franche-Comté, morvan.ouisse@femto-st.fr, Emeline.Sadoulet-Reboul@univ-fcomte.fr

<sup>3</sup> Roberval, Université de Technologie de Compiègne, vincent.lanfranchi@utc.fr

**Résumé** — Un modèle de stator utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz est présenté. Il permet de calculer la base modale d'une géométrie simplifiée de stator incluant une carcasse cylindrique, une culasse cylindrique et des dents, puis sa réponse vibratoire aux efforts de Maxwell par superposition modale. Le modèle est validé par rapport à un modèle éléments finis d'une géométrie semblable. Il est ensuite utilisé dans une approche d'optimisation pour la réduction du bruit d'un moteur synchrone à aimants permanents à rotor vrillé.

**Mots clés** — Optimisation vibroacoustique, Moteur électrique, Modèle mécanique simplifié.

## 1 Introduction

La réduction du bruit est un enjeu important lors de la conception de moteurs électriques utilisés dans le secteur des transports, puisque leur bruit aigu et tonal est une source d'inconfort pour les utilisateurs [10]. Dans ce but, l'optimisation de leur design électromagnétique est un levier efficace car elle permet de réduire ce bruit en agissant directement à sa source, c'est à dire sur les efforts de Maxwell qui s'appliquent au stator et au rotor et dont les composantes dynamiques excitent la structure du stator. Une telle optimisation nécessite le couplage d'un modèle électromagnétique, destiné au calcul des efforts de Maxwell, et d'un modèle vibroacoustique, destiné à la simulation de la réponse de la structure du stator à ces efforts. Son principe est représenté sur la figure 1.

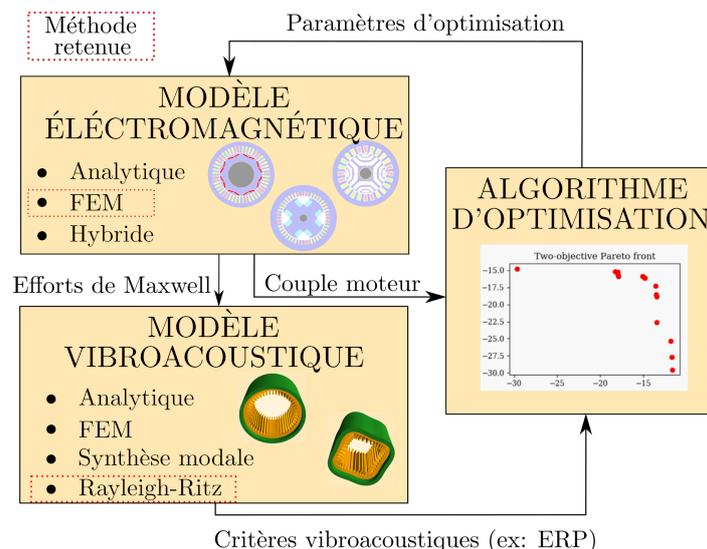


FIGURE 1 – Principe de la méthode d'optimisation vibroacoustique proposée.

L'estimation des efforts de Maxwell qui s'appliquent sur le rotor et le stator peut être effectuée à l'aide d'un modèle électromagnétique analytique [20, 4], avec de faibles temps de calcul mais des modèles qui négligent généralement la saturation des matériaux ferromagnétiques, et appliqués à des moteurs de formes géométriques simples. Des améliorations sont possibles pour prendre en compte des géométries plus complexes [15] ou la saturation des matériaux ferromagnétiques [3], au prix d'efforts

de développement importants. La méthode des éléments finis (EF) peut également être utilisée [7, 16]. Elle est plus précise et plus universelle que les méthodes analytiques, mais avec des temps de calcul plus élevés. Ceux-ci restent toutefois admissibles pour faire des optimisations quand des modèles 2D sont utilisés. Enfin, des méthodes hybrides permettent d'offrir un bon compromis entre précision et temps de calcul [6, 2]. Ici, une modélisation EF est choisie en raison de sa précision et son universalité.

Le calcul de la réponse vibroacoustique de la machine électrique nécessite un modèle permettant d'estimer sa réponse dynamique sous l'effet des efforts de Maxwell s'appliquant sur les dents. La réponse du stator seul suffit généralement à obtenir une bonne approximation du bruit aérien généré par le moteur. Plusieurs types de modèles peuvent être utilisés pour la calculer :

- Les modèles analytiques reposent en général sur l'assimilation du comportement vibroacoustique du moteur à celui d'un cylindre [17, 9]. Ces méthodes sont très rapides mais manquent de précision puisqu'elles négligent l'effet des dents, calculent la réponse dynamique uniquement à la composante radiale des efforts de Maxwell, et négligent l'effet des modes impliquant la flexion longitudinale du stator (ces modes sont particulièrement susceptibles d'être excités dans les moteurs vrillés).
- Un modèle EF 3D peut être utilisé, en utilisant des méthodes de projection des efforts de Maxwell sur le maillage des dents du stator [5, 13]. Il offre une bonne précision, mais n'est pas adapté à l'optimisation en raison de son temps de calcul et de l'utilisation intensive d'outils de simulation commerciaux qu'il implique alors que le nombre de licences disponibles est souvent limité.
- La méthode de synthèse vibratoire repose sur le principe de superposition et est couramment utilisée [1, 14]. Elle permet d'atteindre des niveaux de précision comparables à ceux de modèles EF, pour des temps de calcul bien inférieurs. L'inconvénient principal est le temps nécessaire à la construction du modèle.
- Enfin, des modèles simplifiés peuvent être construits par la méthode de Rayleigh-Ritz. Un modèle complet de stator basé sur les lois d'élasticité 3D des matériaux est présenté dans [8], et validé expérimentalement dans [18, 19]. La culasse et la carcasse statorique ainsi que les masses et inerties des dents sont intégrées au modèle, et la modélisation en 3D permet la prise en compte de modes impliquant la flexion longitudinale du stator. Toutefois, l'effet de la flexion des dents n'est pas pris en compte dans ce modèle. Cela a un effet négatif sur la précision des modes de flexion circonférentielle d'ordres élevés du stator, qui sont souvent couplés à des modes de flexion des dents. De plus, l'effet de la composante tangentielle des efforts de Maxwell, qui excite ces modes de flexion des dents, ne peut pas être pris en compte.

Un modèle s'appuyant sur la méthode de Ritz a été développé et est présenté dans cet article. Il s'appuie sur les modèles existants dans la littérature, en affinant la modélisation des dents pour permettre la modélisation précise de la flexion des dents du stator.

Le modèle est présenté dans la partie 2. Son application dans un problème d'optimisation visant la réduction du bruit et des vibrations d'un moteur électrique est ensuite présentée dans la partie 3.

## 2 Présentation du modèle de stator simplifié

Le modèle développé simplifie la structure des stators en une carcasse cylindrique, une culasse cylindrique et des dents de largeur constante sans têtes de dents. Une telle géométrie est représentée sur la figure 2 (a). Elle correspond au stator qui servira d'exemple dans cette partie. Les résultats obtenus avec la méthode de Rayleigh-Ritz seront comparés à ceux obtenus par un modèle EF de la géométrie présentée sur la figure 2 (b), qui est semblable mais dans laquelle les têtes de dents sont modélisées.

Dans un premier temps, la base modale du stator simplifié est calculée par la méthode de Rayleigh-Ritz. Dans un second temps, sa réponse dynamique sous l'effet d'efforts de Maxwell est estimée par superposition modale.

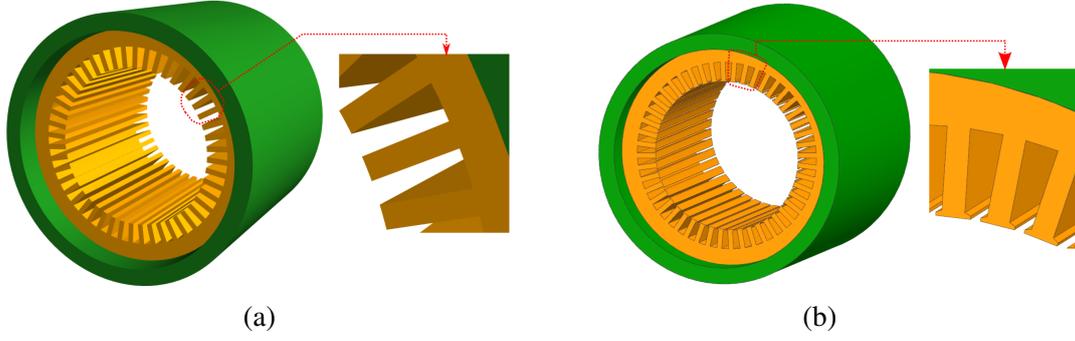


FIGURE 2 – Géométrie du modèle de stator incluant une carcasse (en vert), une culasse et 48 dents (en orange). (a) Géométrie du modèle de Rayleigh-Ritz. (b) Géométrie du modèle EF.

## 2.1 Calcul de la base modale

Cette sous-partie détaille le calcul de la base modale des stators par la méthode de Rayleigh-Ritz, en prenant l'exemple de la structure représentée sur la figure 2 (a). Pour cela, le problème de vibrations libres de la structure est traité. Les inconnues de ce problème sont les fonctions de déplacement  $w(r, \theta, z, t)$ ,  $v(r, \theta, z, t)$  et  $u(r, \theta, z, t)$  exprimées dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ . On note  $\vec{d}(r, \theta, z, t)$  le vecteur de déplacement défini par les trois composantes  $w$ ,  $v$  et  $u$ .

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode numérique approchée qui repose sur le principe de Hamilton. Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , la fonctionnelle de Hamilton s'écrit :

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt, \quad (1)$$

où :

- $T$  est l'énergie cinétique de la structure et s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_{D_{str}} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r dr d\theta dz, \quad (2)$$

où  $D_{str}$  est la région couverte par la géométrie de la structure et  $\rho$  la masse volumique.

- $V$  correspond au travail des forces élastiques internes et s'écrit :

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int_{D_{str}} \left( \underbrace{\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \sigma_{rz} \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z}}_{\sigma \cdot \varepsilon} \right) r dr d\theta dz, \quad (3)$$

où  $\sigma$  est le vecteur contenant toutes les composantes des contraintes normales ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_z$ ) et de cisaillement ( $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{rz}$  and  $\sigma_{\theta z}$ ), et  $\varepsilon$  est le vecteur contenant les composantes des déformations normales ( $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  and  $\varepsilon_z$ ) et de cisaillement ( $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{rz}$  and  $\gamma_{\theta z}$ ). Le travail  $V$  peut être exprimé en fonction des composantes de déplacement  $w$ ,  $v$  et  $u$  en introduisant les relations déformation-déplacement ainsi que les lois de comportement des matériaux. Pour un matériau donné, la loi de déformation peut être exprimée sous la forme :

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon, \quad (4)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'élasticité du matériau de taille  $6 \times 6$ . Sans perte de généralité, tous les matériaux sont considérés isotropes dans cette étude, seuls leur module d'Young  $E$ , leur coefficient de Poisson  $\nu$  et leur masse volumique  $\rho$  sont donc nécessaires à la définition de leur matrice d'élasticité. En pratique, le comportement de l'empilement de tôles utilisé pour certains composants des machines électriques peut plutôt être modélisé par un matériau homogène de propriétés isotropes transverses [12].

- $W$  correspond au travail des forces externes et des forces dissipatives, égal à zéro dans le problème de vibrations libres.

Le principe d'Hamilton énonce que parmi tous les champs de déplacements  $\vec{d}(r, \theta, z, t)$  possibles, la solution qui respecte les lois de Newton rend la fonctionnelle de Hamilton stationnaire. L'écriture de ces conditions de stationnarité fournit une formulation générale de l'équation de mouvement de la structure en vibrations libres :

$$\mathbb{M}_d \left\{ \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \right\} + \mathbb{K}_d \left\{ \vec{d} \right\} = 0, \quad (5)$$

où  $\mathbb{M}_d$  un opérateur linéaire de masse, et  $\mathbb{K}_d$  est un opérateur différentiel de contrainte.

Cette équation différentielle ne peut pas être résolue de manière exacte. La recherche d'une solution approchée par la méthode de Rayleigh-Ritz se fait à travers la définition d'un champ de déplacements admissibles prédéfini pour chaque composante du déplacement :

$$\begin{aligned} w^p(r, \theta, z, t) &= \sum_{i=1}^{N_{w_r}^p} \sum_{j=1}^{N_{w_\theta}^p} \sum_{k=1}^{N_{w_z}^p} \Phi_{w_{r_i}}^p(r) \Phi_{w_{\theta_j}}^p(\theta) \Phi_{w_{z_k}}^p(z) q_{w_{ijk}}^p(t), \\ v^p(r, \theta, z, t) &= \sum_{i=1}^{N_{v_r}^p} \sum_{j=1}^{N_{v_\theta}^p} \sum_{k=1}^{N_{v_z}^p} \Phi_{v_{r_i}}^p(r) \Phi_{v_{\theta_j}}^p(\theta) \Phi_{v_{z_k}}^p(z) q_{v_{ijk}}^p(t), \\ u^p(r, \theta, z, t) &= \sum_{i=1}^{N_{u_r}^p} \sum_{j=1}^{N_{u_\theta}^p} \sum_{k=1}^{N_{u_z}^p} \Phi_{u_{r_i}}^p(r) \Phi_{u_{\theta_j}}^p(\theta) \Phi_{u_{z_k}}^p(z) q_{u_{ijk}}^p(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Les fonctions  $\Phi$  sont des polynômes de Legendre ou des fonction sinusoidales dépendant d'une seule coordonnée spatiale, et les nouvelles inconnues du problème sont les fonctions temporelles  $q$  qui pondèrent chaque fonction admissible d'indices  $ijk$ . L'exposant  $p = \{\text{culasse, carcasse, dent}_1, \dots, \text{dent}_N\}$  indique que les fonctions admissibles sont relatives à une partie du stator : sa culasse, sa carcasse, et chaque dent. Dans ces conditions, en notant  $\mathbf{q}$  le vecteur contenant toutes les inconnues  $q_{u,v,w_{ijk}}^p$ , l'équation 5 devient :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

où les matrices de masse  $\mathbb{M}$  et de raideur  $\mathbb{K}$  peuvent directement être déduites des équations 2 et 3. La détermination de l'équation aux valeurs propres et sa résolution peuvent ensuite être conduites classiquement.

Les bases modales calculées par la méthode de Rayleigh-Ritz et des modèles EF sont maintenant comparées. Les propriétés du stator faisant l'objet de cette comparaison sont présentées dans le tableau 1. Deux modèles EF, présentés dans la figure 3, sont comparés. Le modèle standard est constitué de 268151 noeuds, et le modèle allégé de 152939 noeuds. De même, deux modèles de Rayleigh-Ritz sont comparés, avec deux niveaux de finesse au niveau du nombre de fonctions admissibles choisies.

	Rayon int.	Rayon ext.	Longueur	Module d'Young	Coeff. de Poisson	Masse vol.
Carcasse	90 mm	103 mm	180 mm	70000 MPa	0.33	2700 kg/m <sup>3</sup>
Culasse	76.8 mm	90 mm	140 mm	205000 MPa	0.3	7800 kg/m <sup>3</sup>
	Rayon de la surface int.	Rayon de la surface ext.	Largeur	Module d'Young	Coeff. de Poisson	Masse vol.
Dents	61 mm	76.8 mm	4.1 mm	205000 MPa	0.3	7800 kg/m <sup>3</sup>

TABLE 1 – Caractéristiques géométriques et mécaniques du stator modélisé.

Les résultats des différents modèles sont présentés dans le tableau 2. Les modes sont classifiés selon le nombre de lobes sur la circonférence du stator  $n_{lobes}$ , et le nombre de cercles nodaux sur sa longueur  $n_{circ}$ . Le modèle de Rayleigh-Ritz permet d'obtenir une approximation précise des différents modes en un temps plus court que les modèles EF. Il convient de noter que les temps de calcul affichés pour le modèle de Rayleigh-Ritz sont ceux nécessaires à l'estimation de l'ensemble des modes à 0, 2, 3 et 4 lobes. Toutefois, l'excitation des efforts de Maxwell est généralement bien connue et n'excite pas tous les modes de la structure. Il n'est alors pas nécessaire de les calculer, ce qui réduit le temps de calcul. Par exemple, comme indiqué dans le tableau dans le cas où seuls les modes à 0 lobe circonférentiel sont

calculés, le temps de calcul est encore très fortement réduit.

Les déformées modales peuvent ensuite être reconstruites à partir de l'équation 6. Des exemples de déformées modales calculées à partir du modèle de Rayleigh-Ritz sont présentés dans la figure 4.

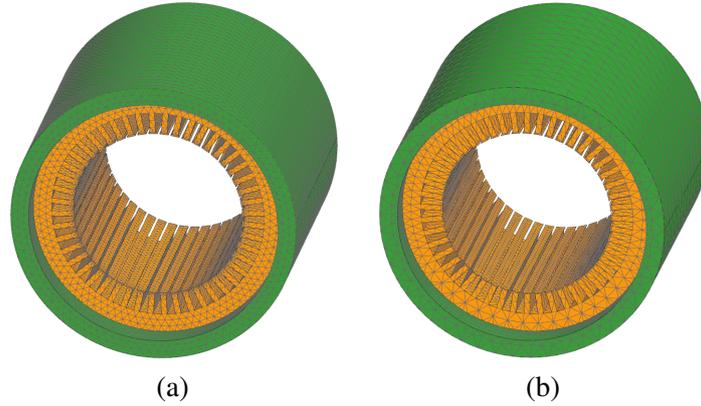


FIGURE 3 – Modeles EF utilisés pour la comparaison. (a) Modèle standard. (b) Modèle allégé.

$n_{lobes}$	$n_{circ}$	Modèle EF standard	Modèle EF allégé	Rayleigh-Ritz Modèle standard	Rayleigh-Ritz Modèle affiné
2	0	1665 Hz	+0.54%	-0.60%	-1.32%
2	1	2180 Hz	+0.46%	+1.83%	+1.51%
3	0	4253 Hz	+0.54%	+0.45%	-0.24%
3	1	4963 Hz	+0.52%	+2.74%	+2.34%
4	0	7135 Hz	+0.55%	+2.99%	+1.89%
4	1	7803 Hz	+0.56%	+5.02%	+4.31%
0	1	7925 Hz	+0.14%	-2.37%	+0.23%
0	0	8134 Hz	+0.19%	+0.41%	-0.61%
<b>Erreur relative moyenne</b>		0%	0.44%	2.05%	1.56%
<b>Temps de calcul</b> $n_{lobes} = 0$		N/A	N/A	3.9 s	7.8 s
<b>Temps de calcul total</b>		947 s	354 s	52.7 s	357 s

TABLE 2 – Fréquences modales estimées avec les modèles EF et les modèles de Rayleigh-Ritz.

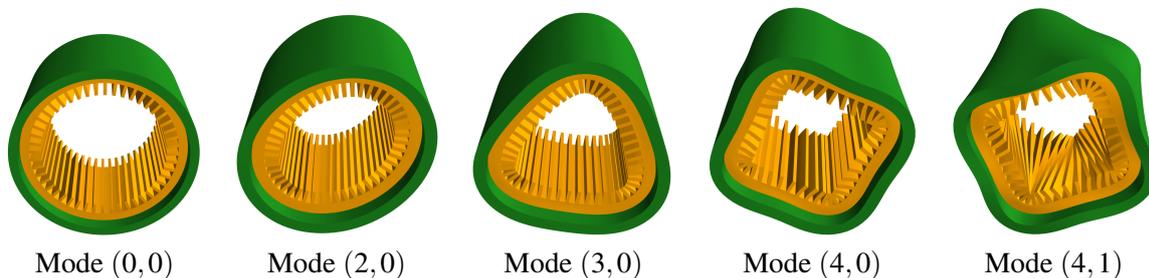


FIGURE 4 – Exemple de déformées modales du modèle standard de Rayleigh-Ritz.

## 2.2 Calcul de réponse dynamique

La base modale du stator pouvant être estimée précisément par la méthode de Rayleigh-Ritz, sa réponse vibratoire sous l'effet d'efforts de Maxwell peut être calculée par superposition modale. Les réponses du stator de la figure 2 aux efforts de Maxwell d'un moteur à rotor vrillé sont donc calculées dans cette sous-partie. Pour chaque mode, un taux d'amortissement modal de 3% ( $\zeta = 0.03$ ) est défini. Cette

modélisation simplifiée de l'amortissement pourrait être améliorée, notamment pour prendre en compte les propriétés viscoélastiques des résines isolant les conducteurs des bobines [11]. Quatre résultats sont comparés : ils correspondent aux réponses calculées à partir des bases modales des deux modèles de Rayleigh-Ritz et des deux modèles EF comparées dans le tableau 2. Leur niveau global d'ERP (Equivalent Radiated Power, qui correspond à la puissance acoustique du moteur dans l'hypothèse où son facteur de rayonnement est égal à 1) est calculé sur toute une montée en régime du moteur. La comparaison des niveaux d'ERP estimés par les différents modèles est présentée dans la figure 5. Elle montre une bonne adéquation entre les différents modèles. Seul le modèle de Rayleigh-Ritz standard présente des écarts avec les autres modèles à haut régime car sa base de fonctions admissible ne permet pas de reconstruire le mode (0,2), dont la réponse est prédominante à haut régime.

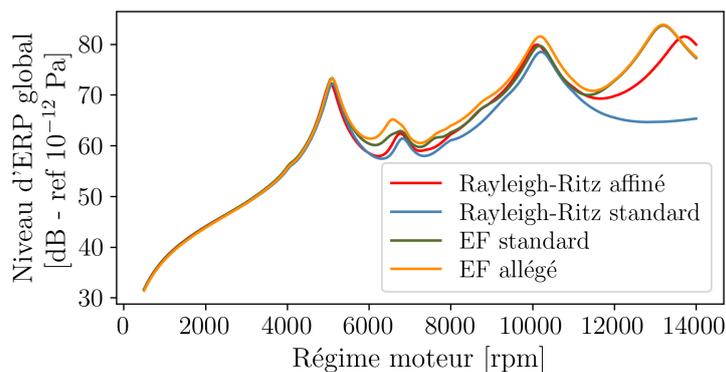


FIGURE 5 – Comparaison des niveaux d'ERP estimés par les modèles de Rayleigh-Ritz et les modèles EF.

### 3 Utilisation du modèle pour l'optimisation d'un moteur électrique

Des algorithmes d'optimisation peuvent donc être utilisés pour réduire les niveaux d'ERP estimés par le modèle de Rayleigh-Ritz développé, en modifiant le design électromagnétique de la machine (ces modifications géométriques sont considérées sans incidence sur le comportement de la structure, le modèle de Rayleigh-Ritz reste donc inchangé pendant l'optimisation). L'exemple d'un moteur synchrone à aimants permanents (MSAP) vrillé à 8 pôles et 48 encoches est présenté dans cette partie. Ce moteur de traction automobile est intégré dans un groupe motopropulseur avec une boîte de vitesse et un boîtier d'électronique de puissance. Son modèle EF complet intègre tous ces composants et permet d'estimer précisément les niveaux d'ERP du design initial, correspondant à la courbe rouge de la figure 6. Il montre trois régimes critiques :

- A 4150 rpm et 8300 rpm à cause de l'excitation du mode (0,0) par les contributions harmoniques d'ordres moteur 96 et 48 des forces de Maxwell.
- A 9250 rpm à cause de l'excitation du mode (0,2) par la contribution harmonique d'ordre moteur 48 des pressions de Maxwell.

Ce modèle EF ne peut pas être utilisé directement pour l'optimisation, donc un modèle de Rayleigh-Ritz suivant la méthodologie décrite dans la partie 2 est utilisé à sa place. Le niveau d'ERP estimé par ce modèle simplifié pour le design initial correspond à la courbe rouge sur la figure 7. Ce modèle est recalé pour faire correspondre la fréquence de son mode (0,0) avec celle du modèle EF (6400 Hz), on retrouve donc bien les régimes critiques à 4150 rpm et 8300 rpm. Toutefois, un décalage subsiste entre les fréquences du mode (0,2) des deux modèles, la résonance de ce mode a donc lieu à 10500 rpm avec le modèle de Rayleigh-Ritz. La difficulté à recalé le mode (0,2) à la fréquence du modèle EF est probablement en partie due à la définition isotrope du stator et des dents dans le modèle de Rayleigh-Ritz, alors que des propriétés isotropes transverses plus proches de celles des empilements de tôles ferromagnétiques sont adoptées dans le modèle EF.

L'optimisation vise donc à réduire les niveaux d'ERP estimés par le modèle de Rayleigh-Ritz à 4150

rpm, 8300 rpm et 10500 rpm. Pour obtenir des réductions importantes des niveaux d'ERP, une réduction du couple moyen fourni par le moteur de 8 % a été autorisée. Les comparaisons des figures 6 et 7 montrent que de fortes réductions des niveaux d'ERP estimées par le modèle de Rayleigh-Ritz sont obtenues, et qu'elles sont confirmées par le modèle EF du groupe motopropulseur complet.

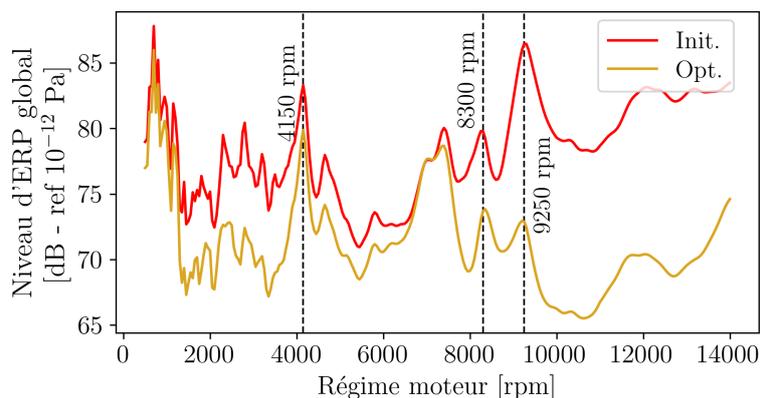


FIGURE 6 – Comparaison des niveaux d'ERP du design initial et du design optimisé, estimés avec le modèle EF complet du groupe motopropulseur.

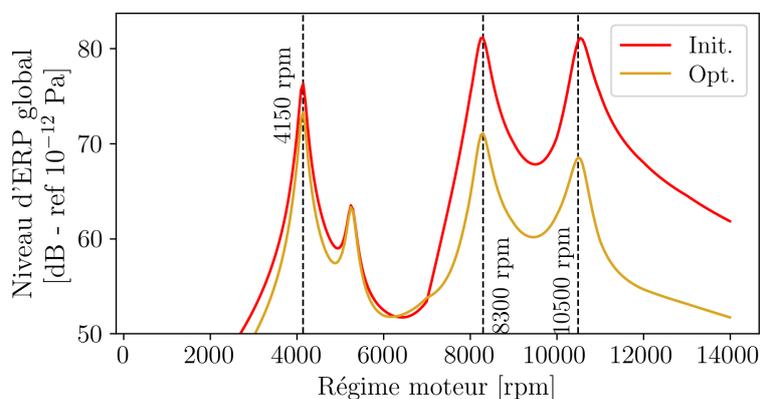


FIGURE 7 – Comparaison des niveaux d'ERP du design initial et du design optimisé, estimés avec le modèle de Rayleigh-Ritz du stator simplifié.

## 4 Conclusion

Le modèle simplifié de stator présente donc de nombreux avantages pour l'optimisation vibroacoustique des moteurs électriques. Il est plus précis que les modèles analytiques généralement utilisés, et contrairement aux méthodes de synthèse vibratoire il est très simple d'utilisation une fois développé car il est totalement paramétrique. De plus, bien que cette possibilité n'ait pas été explorée ici, certains de ses paramètres peuvent eux-mêmes être définis comme des paramètres d'optimisation.

Un exemple d'application du modèle pour l'optimisation d'une MSAP à rotor vrillé intégrée dans un groupe motopropulseur électrique a été présenté. Ceci n'est pas possible avec des modèles vibroacoustiques analytiques. Les résultats montrent que la minimisation de la sortie du modèle de Rayleigh-Ritz aux régimes critiques conduit bien à une réduction du niveau d'ERP estimé par le modèle EF du groupe motopropulseur complet.

Dans le futur, une amélioration du modèle de Rayleigh-Ritz peut être envisagée afin de prendre en compte les propriétés isotropes transverses des empilements de tôles de la culasse et des dents [12].

## Références

- [1] M. Boesing, T. Schoenen, A. K. Kasper, R. De Doncker. *Vibration Synthesis for Electrical Machines Based on Force Response Superposition*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 46, pages 2986-2989, 2010.
- [2] N. Bracikowski, M. Hecquet, P. Brochet, S. V. Shirinskii *Multiphysics Modeling of a Permanent Magnet Synchronous Machine by Using Lumped Models*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Volume 59, pages 2426-2437, 2012.
- [3] Z. Djelloul-Khedda, K. Boughrara, F. Dubas, R. Ibtouen, *Nonlinear Analytical Prediction of Magnetic Field and Electromagnetic Performances in Switched Reluctance Machines*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 53, pages 1-11, 2017.
- [4] F. Dubas, C. Espanet *Analytical Solution of the Magnetic Field in Permanent-Magnet Motors Taking Into Account Slotting Effect : No-Load Vector Potential and Flux Density Calculation*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 45, pages 2097-2109, 2009.
- [5] J.-B. Dupont, P. Bouvet and J.-L. Wojtowicki. *Simulation of the Airborne and Structure-Borne Noise of Electric Powertrain : Validation of the Simulation Methodology*, SAE International, 2013.
- [6] M. Fakam, M. Hecquet, V. Lanfranchi, A. Randria, *Design and Magnetic Noise Reduction of the Surface Permanent Magnet Synchronous Machine Using Complex Air-Gap Permeance*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 51, pages 1-9, 2015.
- [7] A. Frias, P. Pellerey, A. K. Lebouc, C. Chillet, V. Lanfranchi, G. Friedrich, L. Albert, L. Humbert, *Rotor and stator shape optimization of a synchronous machine to reduce iron losses and acoustic noise*, 2012 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, pages 98-103, 2012.
- [8] R. S. Girgis, S. P. Verma. *Method for accurate determination of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines*, IEE Proceedings B - Electric Power Applications, Volume 128, 1981.
- [9] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, G. Friedrich, P. Brochet. *Characterisation of radial vibration force and vibration behaviour of a PWM-fed fractional-slot induction machine*, IET Electric Power Applications, Pages 197-208, 2008.
- [10] P. Millithaler, E. Sadoulet-Reboul, M. Ouisse, J.-B. Dupont, N. Bouhaddi. *Structural dynamics of electric machine stators : Modelling guidelines and identification of three-dimensional equivalent material properties for multi-layered orthotropic laminates*, Journal of Sound and Vibration, Pages 185-205, 2015.
- [11] P. Millithaler, J.-B. Dupont, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, N. Bouhaddi. *Viscoelastic property tuning for reducing noise radiated by switched-reluctance machines*, Journal of Sound and Vibration, Pages 191-208, 2017.
- [12] P. Millithaler, E. Sadoulet-Reboul, M. Ouisse, J.-B. Dupont, N. Bouhaddi. *Identification of representative anisotropic material properties accounting for friction and preloading effects : A contribution for the modeling of structural dynamics of electric motor stators*, Journal of Vibration and Control, Pages 237-259, 2018.
- [13] P. Pellerey, V. Lanfranchi, G. Friedrich. *Coupled Numerical Simulation Between Electromagnetic and Structural Models. Influence of the Supply Harmonics for Synchronous Machine Vibrations.*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 48, Pages 983-986, 2012.
- [14] A. Saito, H. Suzuki, M. Kuroishi, H. Nakai. *Efficient forced vibration reanalysis method for rotating electric machines*, Journal of Sound and Vibration, Volume 334, Pages 388-403, 2015.
- [15] A. S. Sidi Babe, V. Lanfranchi, S. Vivier, R. Missoum, M.E. Zaïm, *Analytical Modelling of Doubly Salient Electric Machines using Conformal Mapping Method*, 2020 International Conference on Electrical Machines (ICEM), pages 66-71, 2020.
- [16] M. Valavi, A. Nysveen, R. Nilssen, R. D. Lorenz, T. Rølvåg, *Influence of Pole and Slot Combinations on Magnetic Forces and Vibration in Low-Speed PM Wind Generators*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 50, pages 1-11, 2014.
- [17] G. Verez, C. Espanet, *Limits of commonly used analytical models for the determination of electric machines natural frequencies*, Symposium de génie électrique, Grenoble, 2016.
- [18] S. P. Verma, R. S. Girgis. *Experimental verification of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines. Part 1 : Models, experimental procedure and apparatus.*, Electric Power Applications, IEE Proceedings B, Volume 128, Pages 12-21, 1981.
- [19] S. P. Verma, R. S. Girgis. *Experimental verification of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines. Part 2 : Experimental investigations and results*, Electric Power Applications, IEE Proceedings B, Volume 128, Pages 22-32, 1981.
- [20] Z. Q. Zhu, Z. P. Xia, L. J. Wu, G. W. Jewell, *Analytical Modeling and Finite-Element Computation of Radial Vibration Force in Fractional-Slot Permanent-Magnet Brushless Machines*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume 46, pages 1908-1918, 2006.