

Formulation thermodynamique et cadre variationnel pour des modèles d'élastoplasticité à état critique

G. Bacquaert^{1,2,3}, J. Bleyer¹, C. Maurini², S. Raude³

¹ Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech, goustan.bacquaert@enpc.fr

² Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université

³ Département ERMES, EDF Lab Paris-Saclay

Résumé — On propose une formulation thermodynamique pour des modèles de plasticité à état critique. À cette fin on établit une loi de comportement élastoplastique avec écrouissages cinématique et isotrope, définie à partir d'un domaine d'élasticité fermé et la règle de normalité. On régularise le modèle constitutif de réponses avec adoucissement dilatant par un cadre variationnel fidèle aux matériaux standards à gradient de plasticité et un algorithme itératif d'Uzawa. Les réponses au point matériel et sur éprouvettes sont illustrées dans de premières simulations par éléments finis.

Mots clés — matériaux standards généralisés, adoucissement, gradient de plasticité.

1 Introduction

La modélisation du comportement non linéaire des sols présente un intérêt fort dans les évaluations de sûreté des structures du Génie Civil et exige des modèles robustes pour les simulations numériques. La compréhension de la phénoménologie des géomatériaux granulaires (sables, argiles et limons) constitue une première difficulté d'analyse des essais réalisés en laboratoire. Le formalisme des modèles à état critique [1, 2] offre néanmoins un cadre fondateur définissant le comportement des sols à partir de la convergence de leur état vers un régime ultime. Les développements successifs visent à décrire l'exhaustivité des observations au cours des chargements réalisés en laboratoire et s'attachent principalement aux réponses dilatantes, contractantes, adoucissantes et durcissantes sous éventuels couplages hydromécaniques. Ces travaux s'appuient sur des raisonnements micro-mécaniques ou empiriques par une analyse des évolutions de la microstructure granulaire. Si la représentativité phénoménologique de ces modèles est extrêmement riche et permet de reproduire de très bonnes réponses au point matériel et sur échantillons en laboratoire [3, 4], leur complexité peut conduire à des difficultés d'applications dans des calculs à plus grandes échelles. Les raisons de ces difficultés proviennent du cadre non standard employé, du traitement inadapté de l'adoucissement des sols ou de l'emploi de modélisations numériquement trop coûteuses. Ces obstacles constituent cependant des enjeux clés en vue de la réalisation de calculs industriels. Dans ce travail, on propose pour y répondre une loi de comportement au point matériel synthétique mais représentative de la phénoménologie attendue des géomatériaux granulaires, conduisant à son emploi dans un cadre variationnel justifié par des arguments thermodynamiques standards.

2 Formulation de la loi de comportement mécanique locale

2.1 Méthodologie employée

On établit un cadre de modélisation du comportement mécanique au point matériel pour les modèles de sol à état critique selon le formalisme des matériaux standards généralisés [5]. Dans ce cadre, on définit le potentiel d'énergie libre ψ à partir des variables d'état observables et cachées et le critère de plasticité f à partir des forces thermodynamiques dissipatives. Les processus d'évolution étudiés sont supposés indépendants du temps physique et en conditions isothermes.

2.2 Construction du potentiel d'énergie libre

Le potentiel d'énergie libre somme à l'énergie élastique une seconde énergie stockée dans (1). Aux variables d'état classique de déformations totale et plastique, on introduit la contribution d'une nouvelle variable d'état dissipative $\underline{\underline{\epsilon}}^i$ dénommée déformation intergranulaire et responsable d'un écrouissage cinématique supplémentaire également présent dans le contexte de la plasticité cristalline et des multi-mécanismes de déformation [7]. Par commodité, le tenseur d'élasticité $\mathbb{E}$ est supposé ici isotrope. Le tenseur d'écrouissage $\mathbb{H}$ est choisi déviatorique. Ce dernier choix s'inspire des travaux référencés dans [8] et rend compte à l'échelle du grain d'une énergie bloquée par réarrangement granulaire sans changement de coordination.

$$\psi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, \underline{\underline{\epsilon}}^i) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) : \mathbb{E} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\epsilon}}^p - \underline{\underline{\epsilon}}^i) : \mathbb{H} : (\underline{\underline{\epsilon}}^p - \underline{\underline{\epsilon}}^i) \quad (1)$$

La dérivation de ψ par rapport aux variables dissipatives $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^i$ fournit leurs forces associées dans (2). À côté de la contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ dans $\underline{\underline{X}}$ est présent une nouvelle force de rappel $\underline{\underline{Y}}$ dont l'évolution n'est pas seulement pilotée par la déformation plastique comme pour l'écrouissage linéaire mais par sa différence avec la déformation intergranulaire.

$$\underline{\underline{X}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^p} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{Y}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{Y}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^i} = \mathbb{H} : (\underline{\underline{\epsilon}}^p - \underline{\underline{\epsilon}}^i) \quad (2)$$

2.3 Sélection du critère de plasticité

Le domaine d'élasticité dans (3) est défini par une unique fonction de charge f dans l'espace des forces thermodynamiques dissipatives $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{Y}}$. La convexité et la régularité du critère sont assurées pour les six paramètres $\sigma_c > 0$, $M > 0$, $N > 0$, $\alpha \in]0; 2[$, $m > 1$ et $\beta > 1$ [6]. D'une part, le domaine est fermé et s'ovalise dans le plan des contraintes méridiennes à l'aide de la variation des paramètres α et m , deux propriétés recherchées dans le souhait d'une modélisation versatile des argiles et des sables. D'autre part, la forme d'écrouissage cinématique est pilotée par les paramètres N et β . Les cas asymptotiques $N \rightarrow 0, +\infty$ et $\beta \rightarrow 1, +\infty$ conduisent à des écrouissages linéaires, bilinéaires ou non linéaires avec la déformation plastique, favorisant par ailleurs la modularité de la loi proposée ici à partir de sa particularisation vers ces modèles plus usuels. Deux coupes à $\underline{\underline{Y}} = 0 \leftrightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{\sigma}}$ et $X_m = Cte$ sont représentées sur la Figure 1 dans lesquelles différentes valeurs α et β sont évaluées à autres paramètres du critère fixé, permettant d'apprécier les distorsions possibles du domaine d'élasticité.

$$f(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{Y}}) = \left(\left(\frac{X_{eq}}{M} \right)^\beta + \left(\frac{Y_{eq}}{N} \right)^\beta \right)^{1/\beta} - \sigma_c \sqrt{(\phi - \phi^m)(2(1 - \alpha)\phi + \alpha)} \quad \text{avec} \quad \phi = -\frac{X_m}{\sigma_c} \in [0; 1] \quad (3)$$

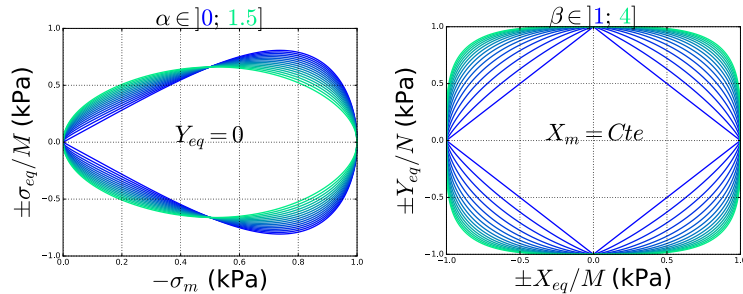


FIGURE 1 – Coupes du domaine d'élasticité à $Y_{eq} = 0$ et $X_m = Cte$ selon les variations de α et β

La pression de consolidation σ_c paramétrise un écrouissage bilatéral avec la déformation plastique volumique. Elle est prise sous la forme exponentielle $\sigma_c = \sigma_0 \exp(-\omega \epsilon_v^p)$ avec $\sigma_0 > 0$ et $\omega > 0$. Il en résulte, par respect de la règle de normalité, un adoucissement lors de réponses avec dilatance $\dot{\epsilon}_v^p > 0$, sur la frontière du domaine d'élasticité à faibles pressions moyennes, et d'un durcissement lors de réponses avec contractance $\dot{\epsilon}_v^p < 0$, sur la frontière du domaine d'élasticité à fortes pressions moyennes.

2.4 Illustration des prédictions numériques du modèle local

La loi de comportement est intégrée dans le générateur de code MFront et le solveur MTest [9] en résolvant les équations non linéaires au point matériel ; puis des essais numériques sous chargements monotones, cycliques, déviatoriques ou triaxiaux valident la pertinence du critère de plasticité et de la forme d'écrouissage proposés. Des compressions triaxiales sont illustrées ici à confinements croissants. Les réponses sont données dans les plans $(\sigma_{eq}, \epsilon_{zz})$, (σ_{eq}, σ_m) , $(\epsilon_v^p, \epsilon_{zz})$ et (ϵ_v^p, σ_m) , sur la Figure 2, couramment considérés pour analyser la convergence de ces matériaux vers leur état critique. Le domaine d'élasticité initial et le chemin des contraintes maximales sont représentés en noir. On observe une linéarité à faible confinement permettant de représenter avec satisfaction la phénoménologie des sables sous ce mode de chargement triaxial.

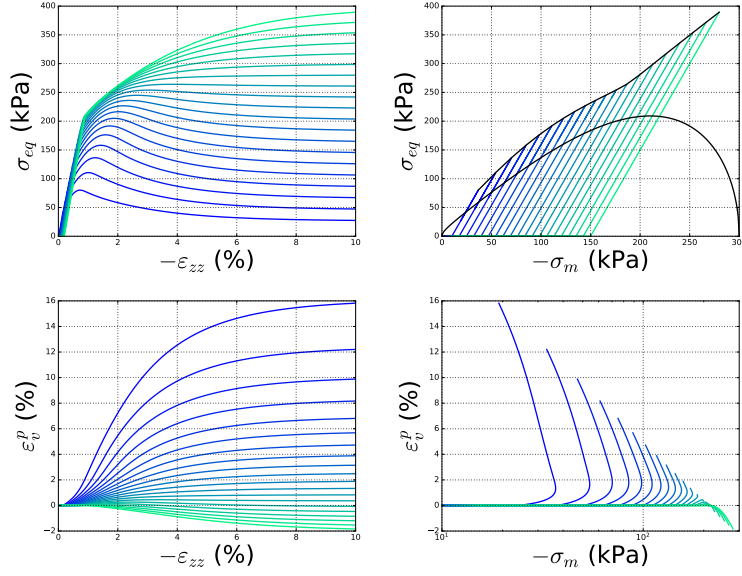


FIGURE 2 – Réponses au point matériel de la loi de comportement sous chargements monotones triaxiaux

3 Régularisation par gradient de la variable interne

La loi de comportement est ici composée d'un écrouissage isotrope piloté par la déformation plastique volumique dans la pression de consolidation. Dans des évolutions avec dilatance, l'écrouissage est négatif comme illustré sur la Figure 2. Il conduit à des solutions numériques dépendantes de la discrétisation spatiale du maillage. On propose pour dépasser cette difficulté d'enrichir l'énergie locale par un terme de régularisation via le gradient du champ de déformation plastique volumique, en s'inspirant des modèles standards à gradient de plasticité [5].

3.1 Équations constitutives du modèle standard à gradient de plasticité

La description du comportement s'appuie sur le gradient de la déformation plastique volumique $\nabla \epsilon_v^p$ comme une nouvelle variable d'état interne dans (4). Son incorporation intervient dans le potentiel d'énergie libre $\hat{\psi}$. En supposant l'aspect non dissipatif du terme régularisant, le critère de plasticité $\hat{f}$ reste inchangé par rapport au modèle local mais prend pour argument une nouvelle expression de la force thermodynamique dissipative $\hat{X}$ associée à la déformation plastique. Le terme non local hydrostatique $\sigma_0 l^2 \nabla^2 \epsilon_v^p \underline{1}$ introduit une longueur caractéristique l dans le modèle caractérisant la distribution spatiale de la déformation plastique volumique.

$$\hat{\psi}(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}^p, \underline{\epsilon}^i, \nabla \epsilon_v^p) = \psi(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}^p, \underline{\epsilon}^i) + \frac{\sigma_0}{2} |l \nabla \epsilon_v^p|^2 \quad \text{et} \quad \hat{f}(\hat{X}, \underline{Y}) = f(\underline{X} + \sigma_0 l^2 \nabla^2 \epsilon_v^p \underline{1}, \underline{Y}) \quad (4)$$

3.2 Algorithme de régularisation par approche variationnelle

On adopte un algorithme itératif de type Uzawa et une approche variationnelle de la formulation du modèle matériau régularisé par le gradient de la déformation plastique volumique. Le Lagrangien augmenté ajoute deux champs supplémentaires des multiplicateurs de Lagrange λ et de la copie γ de la variable interne d'adoucissement ε_v^p définis aux nœuds. Sa minimisation est réalisée par la résolution de deux sous-problèmes à chaque itération j . Le premier consiste à résoudre aux points de Gauss les équations fortes du problème élasto-plastique, par un algorithme de type Newton-Raphson, dont la coercivité est intensifiée par $\lambda^{(j-1)}$ et $\gamma^{(j-1)}$ et le facteur d'augmentation r , précédant la minimisation d'une fonctionnelle quadratique portée sur le champ $\gamma^{(j)}$. Le critère de convergence est établi sur la correspondance de $\gamma^{(j)}$ avec la déformation plastique volumique $\varepsilon_v^{p(j)}$.

Algorithme 1 : Algorithme itératif d'Uzawa

Entrée : Champs solution $\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n^p$ et $\underline{\varepsilon}_n^i$ au pas de temps précédent.

Sortie : Champs solution $\underline{u}, \underline{\varepsilon}^p$ et $\underline{\varepsilon}^i$ au pas de temps actuel.

- 1: Initialiser les itérations avec $j = 0$ et $\{\underline{u}^{(0)}, \underline{\varepsilon}^{p(0)}, \underline{\varepsilon}^{i(0)}\} = \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n^p, \underline{\varepsilon}_n^i\}$.
- 2: **répéter**
- 3: Itérer $j \leftarrow j + 1$.
- 4: Résoudre le problème non linéaire d'évolution élasto-plastique pour $\{\underline{u}^{(j)}, \underline{\varepsilon}^{p(j)}, \underline{\varepsilon}^{i(j)}\}$.
- 5: Résoudre le problème linéaire de minimisation quadratique pour $\gamma^{(j)}$.
- 6: Actualiser le multiplicateur de Lagrange $\lambda^{(j)} \leftarrow \lambda^{(j-1)} + r(\gamma^{(j)} - \varepsilon_v^{p(j)})$.
- 7: **jusqu'à** $\|\lambda^{(j)} - \lambda^{(j-1)}\| < \text{TOL}$.
- 8: Retourner $\{\underline{u}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\varepsilon}^i\} = \{\underline{u}^{(j)}, \underline{\varepsilon}^{p(j)}, \underline{\varepsilon}^{i(j)}\}$.

3.3 Simulations numériques 2d sur éprouvettes

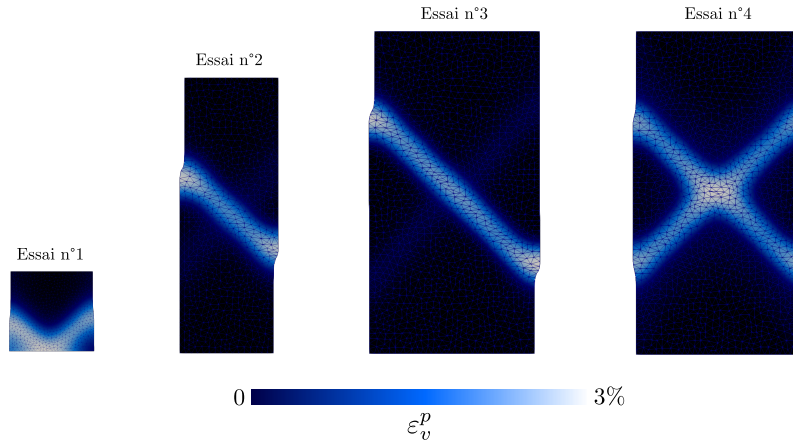


FIGURE 3 – Champs de déformation plastique volumique ε_v^p en fin de chargement $U/H = 8\%$

La méthodologie de régularisation proposée a fait l'objet de premiers tests numériques sur des essais de compression biaxiale en déformations planes. On recourt à la bibliothèque éléments finis FEniCS et au projet mgis [10] pour appliquer l'algorithme itératif précédent d'Uzawa. Pour une même longueur caractéristique $l = 0.2$, quatre essais avec des dimensions géométriques (hauteur H et largeur L) et conditions limites en déplacement (appui simple ou encastrement) différentes sont réalisés sous un même confinement latéral et une déformation maximale U/H en compression identique. La Figure 3 illustre les champs de déformation plastique volumique ε_v^p au chargement maximal $U/H = 8\%$ (avec une amplification de 25% de la déformée) et indique un mode de localisation propre à la géométrie de chaque éprouvette et des conditions limites appliquées. Les réponses macroscopiques en effort F et en déformation plastique

volumique $\langle \varepsilon_v^p \rangle$ sont données sur la Figure 4. On constate une très forte divergence de $\langle \varepsilon_v^p \rangle$ associée à la précocité de l'émergence d'une ou de plusieurs bandes principales de localisation. Les évolutions de F sont identiques jusqu'à l'initiation de la localisation. Ces observations sont en accord avec des expériences reportées dans [11, 12]. Sur cette même Figure 4 on évalue le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme d'Uzawa à chaque incrément du chargement U/H . Elles sont plus nombreuses à l'initiation de la localisation avant de diminuer lorsque le gradient de la déformation plastique volumique $\nabla \varepsilon_v^p$ évolue peu dans une phase ultérieure (la comparaison entre les essais n°1 et n°3 est la plus illustratrice).

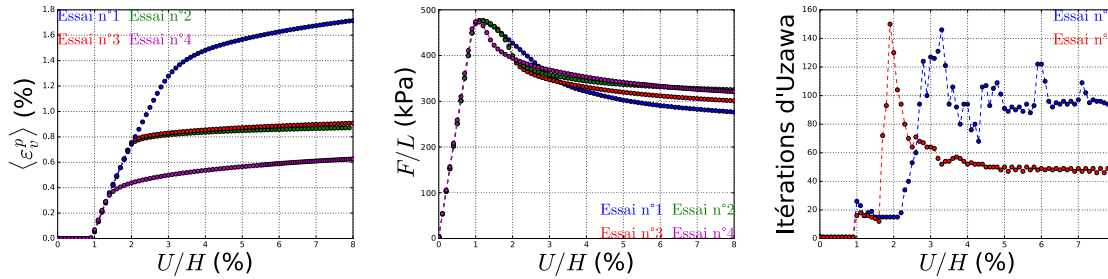


FIGURE 4 – Réponses macroscopiques et itérations de l'algorithme d'Uzawa

4 Conclusions et perspectives

Les ingrédients constitutifs de la loi de comportement au point matériel permettent d'englober de manière satisfaisante la phénoménologie des géomatériaux granulaires à l'aide d'une modélisation synthétique, versatile et pertinente pour les comportements des sables et argiles sous chargements monotones et cycliques. La régularisation adoptée dans le cadre propre aux matériaux standards à gradient de plasticité et la formulation variationnelle établie permettent de reproduire des effets de structures expérimentalement observés en laboratoire. Les premières simulations numériques suggèrent une possible compatibilité entre la description de la localisation des déformations plastiques et la transposition d'état critique du matériau à la structure. En perspective du travail réalisé ci-dessus, des applications à plus grandes échelles sont visées (stabilité de pente d'une fondation, tassement d'une semelle filante) en introduisant de possibles couplages hydromécaniques via une contrainte plastique effective. Ces simulations permettront d'évaluer les performances en termes de robustesse, de fiabilité et de coût numériques de l'algorithmie proposée.

Références

- [1] A. Schofield, P. Wroth. *Critical State Soil Mechanics*, Lecturers in Engineering at Cambridge University, 1968.
- [2] J.B. Burland, K.H. Roscoe. *On the Generalized Stress-Strain Behavior of Wet Clays*, Engineering Plasticity Cambridge University Press, 1968.
- [3] E. Andò, J.E. Andrade, R. Kawamoto, G. Viggiani. *All you need is shape : Predicting shear banding in sand with LS-DEM*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 111, 375-392, 2018.
- [4] D. Mašín. *Modelling of Soil Behaviour with Hypoplasticity*, Springer Series in Geomechanics and Geoengineering, 2019.
- [5] Q.S. Nguyen. *On standard gradient plasticity and visco-plasticity*, International Journal of Solids and Structures, 225, 111038, 2021.
- [6] D. Bigoni, A. Piccolroaz. *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials : A generalization to surfaces with corners*, International Journal of Solids and Structures, 46 (20), 3587-3596, 2009.
- [7] G. Cailletaud, K. Sai, L. Taleb. *Multi-mechanism Modeling of Inelastic Material Behavior*, ISTE-Wiley, 2018.
- [8] I. Herle, A. Niemunis. *Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range*, Mechanics of Cohesive-frictional Materials, 2 (4), 279-299, 1997.
- [9] O. Fandeur, D. Geoffroy, T. Helfer, et al. *New functionalities of Versions 3.1 and 3.2 of TFEL/MFront*, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, 2019.

- [10] J. Bleyer, T. Frondelius, T. Helfer, et al. *The ‘MFrontGenericInterfaceSupport’ project*, Journal of Open Source Software, 5 (48), 2003, 2020.
- [11] J. Desrues, G. Viggiani. *Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28 (4), 279-321, 2004.
- [12] T. Wichtmann, *Soil behaviour under cyclic loading - experimental observations, constitutive description and applications*, Habilitation thesis, 2016.