

Modélisation de l'effet de taille dans le comportement non-linéaire des nanocomposites

D.P. Bach¹, L. Cauvin¹, D. Brancherie¹, D. Kondo²

¹ Université de Technologie de Compiègne Roberval (Mechanics, energy and electricity),

Centre de recherche Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne Cedex, France, Dang-Phong.Bach@utc.fr, Ludovic.Cauvin@utc.fr, Delphine.Brancherie@utc.fr

² Sorbonne Université, Institut Jean le Rond d'Alembert, UMR 7190 CNRS, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France,

Djimeddo.Kondo@sorbonne-universite.fr

Résumé — Pour rendre compte de l'effet de taille dans les nanocomposites, un matériau constitué d'une matrice élastoplastique et de nano-inclusions élastiques a été modélisé numériquement par éléments finis dans le cas 2D état plan de déformation. L'effet de taille induit par les nano-charges est pris en compte par une élasticité surfacique de type Gurtin et Murdoch dans des éléments finis d'interface entre la matrice les inclusions. Les résultats obtenus sous chargements cycliques mettent en évidence l'influence des nano-renforts sur les distributions des contraintes dans la matrice et les inclusions.

Mots clés — Nanocomposites, Plasticité, Homogénéisation.

1 Introduction

Avec le développement des matériaux fonctionnalisés dits intelligents [1] et la constante recherche de réduction des masses, l'utilisation des nanocomposites ne cesse de croître. En effet, pour de très faibles fractions volumiques de renforts et contrairement aux composites classiques, les nanocomposites offrent de remarquables propriétés, notamment mécaniques. Ces remarquables propriétés s'expliquent par un effet de taille induit par les dimensions nanométriques des renforts. Les phénomènes locaux présents à l'interface matrice-renforts, négligeables dans le cas des composites classiques, ne le sont plus dans les matériaux nano-renforcés où le rapport (surface d'interfaces matrice-inclusions) / (volume du matériau) devient beaucoup plus grand. Cependant, la prise en compte de l'effet de taille dans la modélisation du comportement des nanocomposites reste à l'heure actuelle un grand défi. Dans le contexte de l'élasticité linéaire, de nombreux travaux, prenant en compte un effet de taille des nano-charges, ont été menés aussi bien au moyen de modélisations analytiques [2, 4] que numériques [3, 5, 6]. Toutefois, les effets induits par la taille des renforts, dans le contexte des non-linéarités matériaux restent un problème ouvert crucial. En effet, comme de nombreux matériaux composites, les matériaux nano-renforcés peuvent présenter des comportements mécaniques non linéaires, notamment en raison d'une utilisation importante de matrices polymères.

En ajoutant la théorie de l'élasticité de surface de Gurtin-Murdoch [7] aux modèles micromécaniques classiques (assemblage de sphères et de cylindres composites, modèles triphasés ou auto-consistants généralisés, modèle de Mori-Tanaka...), plusieurs contributions prenant en compte l'effet de taille dans le contexte des comportements non linéaires ont été développées [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Ces modèles se concentrent, dans le cas des matériaux nanoporeux, sur des analyses limites pour quantifier l'impact de la plasticité de la matrice et de la taille des pores sur les surfaces de plasticité. Plus récemment, toujours pour des matériaux nanoporeux, Chen et Pindera [16] se sont intéressés aux courbes contrainte-déformation macroscopiques dans le cas d'une matrice élastoplastique avec écrouissage isotrope. Dans cette étude, en utilisant trois approches différentes, à savoir le modèle classique d'assemblage de cylindres composites, la théorie des éléments finis et la théorie des volumes finis généralisés, les auteurs illustrent l'influence de l'effet de taille sur l'évolution de la réponse globale du matériau nanoporeux.

On peut noter que toutes les études citées précédemment et portant sur des phénomènes non-linéaires, se limitent aux matériaux nanoporeux. Il est important de rappeler que les effets de taille sont évidemment également présents dans les nanocomposites [6, 17]. De plus, aucune des études précédemment citées ne s'intéressent à la quantification ou à l'observation des phénomènes locaux aussi bien dans la matrice que

dans les inclusions ou à leurs interfaces. Nous proposons, dans les présents travaux, d'illustrer grâce à une modélisation numérique l'influence de l'effet de taille sur les réponses globales et locales des nanocomposites dans un contexte non linéaire.

En se basant sur les travaux de Bach et al [6, 18], la stratégie de l'élément d'interface/surface semble être la plus simple et la plus efficace pour des inclusions de forme simple. En considérant des renforts cylindriques, nous optons donc ici pour ce type de modélisation. Nous commencerons par poser le problème du matériau biphasé considéré. Ensuite, nous présentons sa mise en œuvre numérique. Enfin, nous illustrerons l'effet de taille sur le comportement élastoplastique d'un nanocomposite.

2 Définition du problème

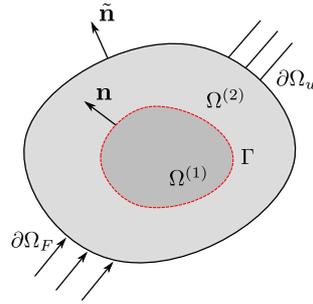


FIGURE 1 – Définition du problème : matériau biphasé à interface imparfaite.

Nous considérons ici un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) de frontière $\partial\Omega$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_u = \emptyset$). $\tilde{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$. Le domaine Ω est composé de deux phases $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ correspondant respectivement à l'inclusion et la matrice du biphasé. Ces 2 domaines sont séparés par une interface imparfaite Γ (Fig.1). On note \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à Γ , dirigé de $\Omega^{(1)}$ vers $\Omega^{(2)}$. Le saut de quantité $\{\bullet\}$ à l'interface Γ est défini tel que $[[\{\bullet\}]] = \{\bullet\}^{(1)} - \{\bullet\}^{(2)}$. Les expressions des opérateurs gradient surfacique et divergence surfacique sont :

$$\nabla_s \{\bullet\} := \nabla \{\bullet\} \cdot \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{div}_s \{\bullet\} := \nabla_s \{\bullet\} : \mathbf{P} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} := \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (1)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité du second ordre et \mathbf{P} l'opérateur projecteur (sur Γ) du second ordre.

L'équilibre dans les phases 1 et 2 du biphasé est donné par l'équation :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(l)} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega^{(l)}, \quad l = 1, 2, \quad (2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{b} correspondent respectivement au tenseur des contraintes de Cauchy et aux forces volumiques.

Les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet sont appliquées sur $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u, \quad (3)$$

où \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{u}}$ sont respectivement les forces extérieures exercées sur $\partial\Omega_F$ et les déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$.

Pour rendre compte de l'effet de taille dans les nanocomposites, l'interface Γ entre la matrice $\Omega^{(2)}$ et les inclusions $\Omega^{(1)}$ est considérée cohérente et de comportement régi par l'équation de Young-Laplace généralisée [19, 20, 21] :

$$\mathbf{div}_s \boldsymbol{\sigma}_s + [[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_s$ est le tenseur des contraintes surfaciques sur Γ .

À partir des équations (2) à (4), en supposant les interfaces Γ fermées et en n'autorisant pas de décohésion entre matrice et inclusions, on obtient la formulation faible du problème étudié :

$$\forall \delta \mathbf{u} \quad \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \nabla_s^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}_s d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{n}} dS = \mathbf{0}. \quad (5)$$

où ∇_s^s correspond à l'opérateur gradient surfacique symétrique ($\nabla_s^s\{\bullet\} = \nabla^s\{\bullet\}\mathbf{P}$).

On peut remarquer que le premier et le second terme de l'équation (5) correspondent à une énergie volumique et à une énergie surfacique. Par l'ajout au système d'une énergie d'interface, le rapport entre énergie d'interface et énergie volumique impactera donc son comportement.

Dans cette étude, le nanocomposite considéré est constitué d'inclusions élastiques plongées dans une matrice élastoplastique, le comportement de leurs interfaces est modélisé au travers de l'élasticité surfacique introduite par Gurtin et Murdoch [7] :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \tau_o \mathbf{I}_2 + 2(\mu_s - \tau_o) \boldsymbol{\varepsilon}_s + (\lambda_s + \tau_o) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \mathbf{I}_2, \quad (6)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ est le tenseur de déformation surfacique, μ_s et λ_s sont des constantes de Lamé surfaciques caractérisant le comportement élastique de l'interface, \mathbf{I}_2 est le tenseur d'ordre 2 identité surfacique et τ_o une tension superficielle.

En l'absence de tension superficielle τ_o , l'équation (6) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad (7)$$

où \mathbb{C}^s est un tenseur (d'ordre 4) d'élasticité surfacique.

La matrice du nanocomposite est considérée comme étant un matériau élastoplastique suivant le critère de von Mises. Dans ce résumé, seul le cas avec un régime plastique supposé parfait sera présenté :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y), \quad (8)$$

où σ_y correspond à la limite d'élasticité de la matrice.

Des cas complémentaires, écrouissage isotrope (linéaire et non linéaire) et écrouissage cinématique, seront présentés lors de la communication orale et ne sont pas illustrés ici pour des raisons de place et de clarté du propos.

S'agissant d'un problème non-linéaire, les lois de comportement de la matrice (2) et des inclusions (1) s'expriment en vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{(l)} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega^{(l)}, (l = 1, 2), \quad (9)$$

avec

$$\mathbb{C}^{(l)} = \begin{cases} \mathbb{C}^{(1)} & x \in \Omega^{(1)} \\ \mathbb{C}^{(2)} & x \in \Omega^{(2)} \quad \text{réponse élastique} \\ \mathbb{C}^{ep} & x \in \Omega^{(2)} \quad \text{réponse plastique} \end{cases} \quad (10)$$

$\mathbb{C}^{(1)}$ et $\mathbb{C}^{(2)}$ sont les tenseurs d'ordre 4 définissant respectivement le comportement élastique des inclusions $\Omega^{(1)}$ et de la matrice $\Omega^{(2)}$. Pour le cas d'un chargement plastique, le tenseur \mathbb{C}^{ep} , module tangent élastoplastique, est déterminé à chaque incrément de temps à partir de $\mathbb{C}^{(2)}$ (voir [22]).

En supposant la microstructure du nanocomposite étudié périodique, la cellule (voir Fig. 2), dans le cas 2D, est considérée, en état plan de déformation. Des conditions aux limites périodiques sont donc appliquées aux bords de la cellule. La fraction volumique d'inclusions cylindriques dans le VER est fixée à 17% ($f = 0.17$). Pour évaluer l'effet de leur taille, plusieurs rayons d'inclusions seront considérés.

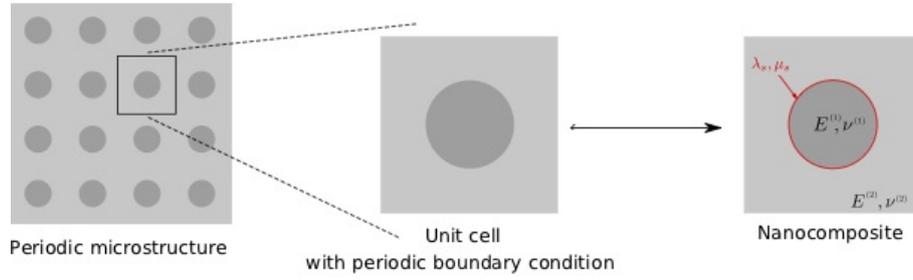


FIGURE 2 – Volume Élémentaire Représentatif (représentation dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$)

Le VER est soumis à un chargement radial cyclique piloté en taux de déformation macroscopique (voir Fig. 3) :

$$\mathbf{E}(t) = E_{11}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 0 (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (11)$$

\mathbf{e}_3 correspond à la direction des inclusions cylindriques.

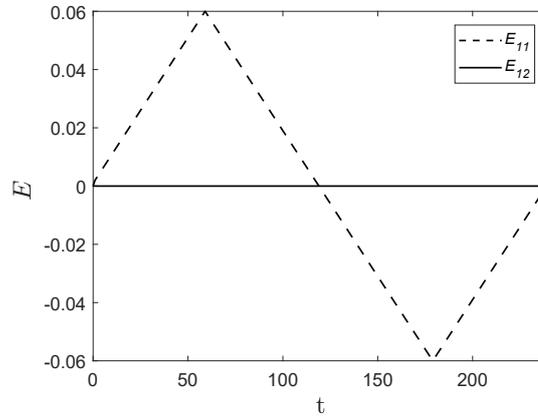


FIGURE 3 – chargement radial cyclique

3 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

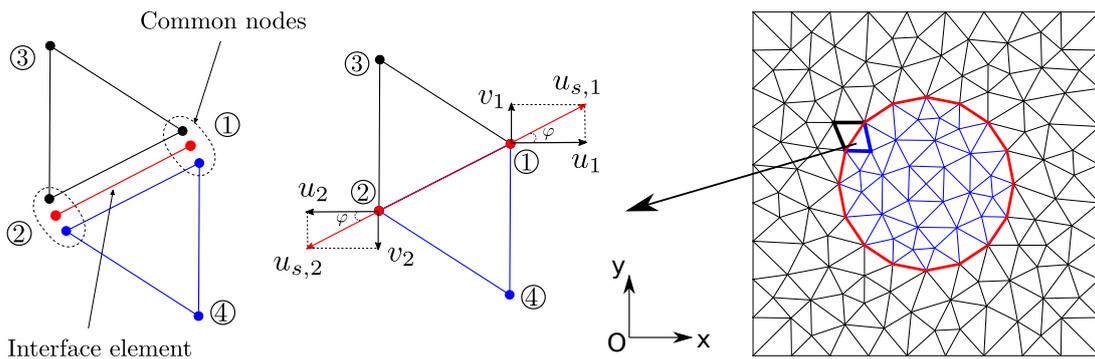


FIGURE 4 – Éléments finis pour la matrice, l'inclusion et leur interface.

Comme déjà mis en œuvre en régime élastique linéaire [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30], on utilise ici des éléments d'interface pour rendre compte du comportement d'une interface cohérente élastique pour étudier des phénomènes non-linéaire dans les nanocomposites. Une interpolation classique des déplacement est utilisée dans la matrice et dans les inclusions alors que les champs de déplacement sur les interfaces matrice/inclusions sont interpolés de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_s^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{N}}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{s,i} , \quad (12)$$

où $\bar{\mathbf{N}}_i$ est la fonction de forme associée au nœud i d'un élément d'interface et $\mathbf{u}_{s,i}$ correspond aux déplacements de ce nœud obtenu par projection des déplacements dans le repère local de l'interface (voir Figure 4) :

$$\begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

où φ est l'angle entre l'interface et la direction x du repère global.

Les déformations dans un élément d'interface e sont obtenues de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{(e)} = \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \mathbf{T} \mathbf{u}, \quad (14)$$

où $\bar{\mathbf{B}}^{(e)}$ correspond au cas d'un élément 1D standard dans un problème 2D.

Le comportement de la matrice du nanocomposite étant élastoplastique, une résolution incrémentale par la méthode itérative de Newton-Raphson est adoptée.

Pour le pseudo-temps " $n + 1$ ", le déplacement et la déformation à l'itération $i + 1$ sont :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^{e,(i+1)}. \quad (15)$$

La matrice \mathbf{B} est obtenue par la " Méthode du Retour Radial " [22, 23].

La résolution du problème nécessite sa linéarisation :

$$0 = \text{Lin}(r(\mathbf{u}_{n+1})) \quad \text{avec} \quad r(\mathbf{u}_{n+1}) = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} (\mathbf{f}^{e,int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{ext}) \quad (16)$$

A l'itération i , le problème peut s'écrire :

$$r(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) + \frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(i)} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = 0 \quad (17)$$

avec

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(i)} = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} (\mathbf{K}_{n+1}^{\Omega_e,(i)} + \mathbf{K}_{n+1}^{\Gamma_e,(i)}) \quad (18)$$

où

$$\mathbf{K}_{n+1}^{\Omega_e,(i)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^{(l),(i)} \mathbf{B} d\Omega \quad ; \quad \mathbf{K}_{n+1}^{\Gamma_e,(i)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^s \bar{\mathbf{B}} \mathbf{T} d\Gamma \quad (19a)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int,\Omega_e,(i)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} d\Omega \quad ; \quad \mathbf{f}_{n+1}^{int,\Gamma_e,(i)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}_{s,n+1}^{(i)} d\Gamma \quad (19b)$$

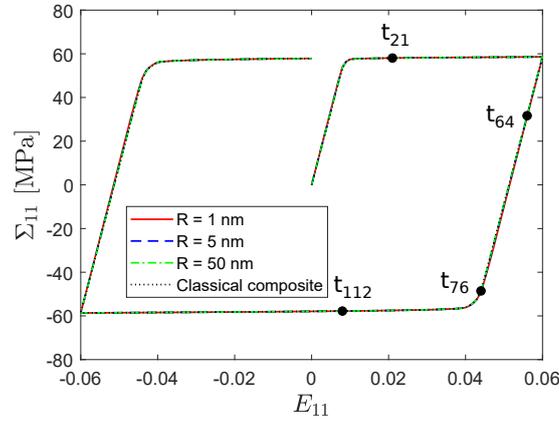
$$\boldsymbol{\sigma}_{s,n+1}^{(i)} = \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}_{s,n+1}^{(i)} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s,n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{T} \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \quad (19c)$$

4 Effet de taille des inclusions sur le comportement mécanique du nanocomposite

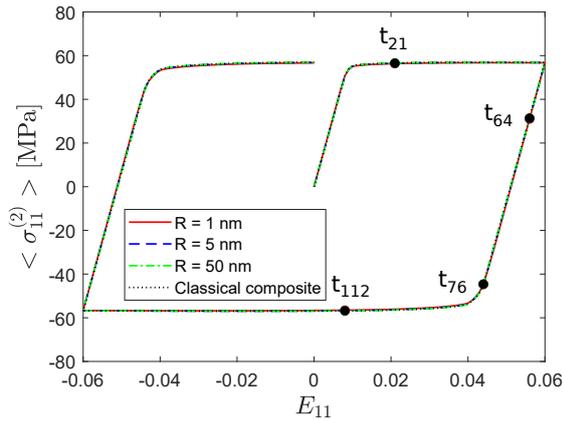
Le VER du nanocomposite étudié est illustré sur la figure 2. Les propriétés de la matrice et des inclusions cylindriques sont inspirées de celles introduites dans des travaux sur l'homogénéisation de composites classiques [31, 32] et définies dans le tableau 1. Les propriétés de l'interface cohérente sont celles obtenues par des simulations de dynamiques moléculaires par Miller et Shenoy [33] : $\lambda^{(s)} = 6.842$ N/m, $\mu^{(s)} = -0.375$ N/m $\rightarrow k^{(s)} = 6.0905$ N/m. Pour illustrer l'effet de taille des nano-inclusions, 3 rayons de renforts cylindriques sont testés : $R = 1$ nm, $R = 5$ nm et $R = 50$ nm .

	Paramètre	Inclusions élastiques	Matrice Élastoplastique
Élasticité	k	20 GPa	10 GPa
	μ	6 GPa	3 GPa
Plasticité parfaite	σ_y		100 MPa

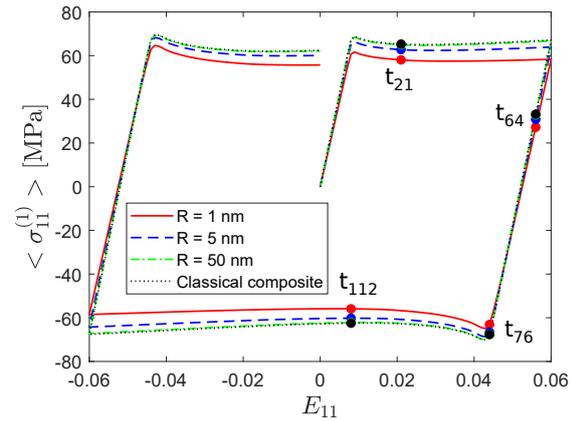
TABLE 1 – Propriétés matériaux



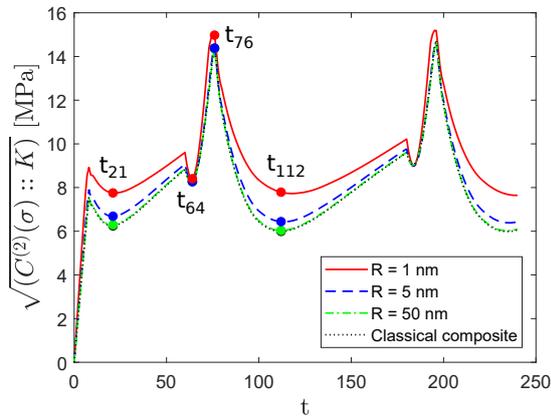
(a) Contraintes macroscopiques



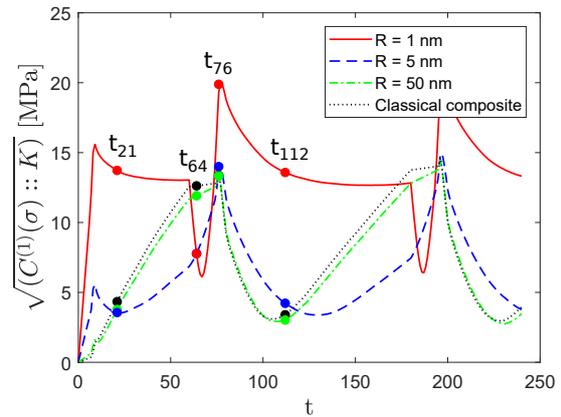
(b) Contraintes moyennes dans la matrice



(c) Contraintes moyennes dans les inclusions



(d) Fluctuation des contraintes dans la matrice



(e) Fluctuation des contraintes dans les inclusions

FIGURE 5 – Effets de taille dans des nanocomposites constitués d'une matrice élastique-parfaitement plastique, d'inclusions élastiques et d'interfaces élastiques sous un chargement radial cyclique.

La réponse du nanocomposite au chargement radial cyclique Eq. (11) est présentée en figure 5 pour

les 3 rayons d'inclusions considérés. Pour illustrer l'influence de la taille de ces inclusions, le cas du composite classique (sans effet de taille) est également reporté sur cette figure. Les résultats présentés sont les réponses macroscopiques du matériau ainsi que les contraintes moyennes et les fluctuations des contraintes dans la matrice et dans les inclusions.

Bien que l'effet de la taille des inclusions ne soit pas assez significatif sur la réponse macroscopique du matériau (Fig. 5a) ou sur la moyenne des contraintes dans la matrice (Fig. 5b), les fluctuations des contraintes dans la matrice (Fig. 5b et 5d) et le comportement dans l'inclusion (Figures. 5c et 5e) sont quant à eux sensibles à la taille des inclusions. En effet, la fluctuation des contraintes dans la matrice augmente avec la réduction de la taille des inclusions. Dans les inclusions, les contraintes moyennes diminuent quand on réduit la taille des inclusions et les fluctuations de contraintes sont très différentes en fonction de la taille des inclusions. Ces résultats montrent l'importance d'un examen minutieux des champs locaux dans le nanocomposite ; ce type de résultats sera d'ailleurs présenté lors de la communication orale.

5 Conclusion

Dans ce travail, une stratégie numérique basée sur la méthode des éléments finis utilisant des éléments d'interface a été mise en œuvre pour rendre compte de l'effet de taille dans les nanocomposites, dans le contexte de l'élastoplasticité. Cet effet de taille, a, dans le cas de la plasticité parfaite, permis de mettre en évidence l'importance des phénomènes locaux, la fluctuation des contraintes dans les inclusions étant fortement impactée par la taille nanométrique des inclusions. Lors de la communication orale des résultats complémentaires avec des illustrations de distributions locales de contraintes mais également d'autres lois de plasticité (isotrope non-linéaire et cinématique linéaire) ainsi que l'influence de chargements tournants seront présentés.

Références

- [1] K. Hamdi, Z. Aboura, W. Harizi, K. Khellil. *Improvement of the electrical conductivity of carbon fiber reinforced polymer by incorporation of nanofillers and the resulting thermal and mechanical behavior*, Journal of Composite Materials, 52(11),1495-1503, 2018.
- [2] Duan, H., Wang, J.-x., Huang, Z., Karihaloo, B. L. *Size dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress.*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(7), 1574-1596, 2005.
- [3] Yvonnet, J., Quang, H. L., He, Q.-C. *An xfm/level set approach to modelling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites.*, Computational Mechanics, 42(1), 119-131, 2008.
- [4] Brisard, S., Dormieux, L., Kondo, D. *Hashin-shtrikman bounds on the bulk modulus of a nanocomposite with spherical inclusions and interface effects.*, Computational Materials Science, 48(3), 589-596, 2010.
- [5] Javili, A., Steinmann, P., Mosler, J. *Micro-to-macro transition accounting for general imperfect interfaces.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 317, 274-317, 2017.
- [6] Bach, D. P., Brancherie, D., Cauvin, L. *Size effect in nanocomposites : Xfm/level set approach and interface element approach.*, Finite Elements in Analysis and Design, 165,41-51, 2019.
- [7] Gurtin, M. E. et Ian Murdoch, A. *A continuum theory of elastic material surfaces.*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 57(4),291-323, 1975.
- [8] Zhang, W. et Wang, T. *Effect of surface energy on the yield strength of nanoporous materials.*, Applied Physics Letters, 90(6), 063104, 2007.
- [9] Goudarzi, T., Avazmohammadi, R., Naghdabadi, R. *Surface energy effects on the yield strength of nanoporous materials containing nanoscale cylindrical voids.*, Mechanics of Materials, 42(9), 852-862, 2010.
- [10] Zhang, W., Wang, T., Chen, X. *Effect of surface/interface stress on the plastic deformation of nanoporous materials and nanocomposites.*, International Journal of Plasticity, 26(7), 957-975, 2010.
- [11] Moshtaghin, A., Naghdabadi, R., Asghari, M. *Effects of surface residual stress and surface elasticity on the overall yield surfaces of nanoporous materials with cylindrical nanovoids.*, Mechanics of Materials, 51, 74-87, 2012.

- [12] Monchiet, V. et Kondo, D. *Combined voids size and shape effects on the macroscopic criterion of ductile nanoporous materials.*, International Journal of Plasticity, 43, 20-41, 2013.
- [13] Brach, S., Dormieux, L., Kondo, D., Vairo, G. *Nanoporous materials with a general isotropic plastic matrix : exact limit state under isotropic loadings.*, International Journal of Plasticity, 89, 1-28, 2017.
- [14] Brach, S., Anoukou, K., Kondo, D., Vairo, G. *Limit analysis and homogenization of nanoporous materials with a general isotropic plastic matrix.*, International Journal of Plasticity, 105, 24-61 2018.
- [15] Chen, Q., Wang, G., Pindera, M.-J. *Homogenization and localization of nanoporous composites-a critical review and new developments.*, Composites Part B : Engineering, 155, 329-368, 2018.
- [16] Chen, Q., Pindera, M.-J. *Homogenization and localization of elastic-plastic nanoporous materials with gurtin-murdoch interfaces : an assessment of computational approaches.*, International Journal of Plasticity, 124, 42-70, 2020.
- [17] Blivi, A. S. *Effet de taille dans les polymères nano-renforcés : caractérisation multi-échelles et modélisation.*, Thèse de doctorat en Mécanique Avancée, Université de Technologie de Compiègne, 2020.
- [18] Bach, D. P., Brancherie, D., and Cauvin, L. *An Embedded-FEM approach accounting for the size effect in nanocomposites.*, Computational Mechanics, under review.
- [19] Povstenko Y.Z. *Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids.*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 41(9), 1499–1514, 1993.
- [20] Gurtin M.E., Weissmüller J., Larche F. *A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium*, Philosophical Magazine A, 78(5), 1093–1109, 1998.
- [21] Chen T., Chiu M.S., Weng C.N. *A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium*, Journal of Applied Physics, 100(7), 074308, 2006.
- [22] Simo J. C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*, Springer Science & Business Media, 7, 2006.
- [23] Ibrahimbegovic A. *Nonlinear solid mechanics : theoretical formulations and finite element solution methods*, Springer Science & Business Media, 160, 2009.
[24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]
- [24] Gao W., Yu S., Huang G. *Finite element characterization of the size-dependent mechanical behaviour in nanosystems*, Nanotechnology, 17(4), 1118, 2006.
- [25] Monteiro E., He Q-C., Yvonnet J. *Hyperelastic large deformations of two-phase composites with membrane-type interface*, International journal of engineering science, 49(9), 985–1000, 2011.
- [26] Javili A., McBride A., Mergheim J., Steinmann P., Schmidt U. *Micro-to-macro transitions for continua with surface structure at the microscale*, International Journal of Solids and Structures, 50(16-17),2561–2572 , 2013.
- [27] Javili A., Chatzigeorgiou G., McBride A., Steinmann P., Linder C. *Computational homogenization of nano-materials accounting for size effects via surface elasticity*, GAMM-Mitteilungen, 38(2), 285–312, 2015.
- [28] Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Javil, A. *Generalized interfacial energy and size effects in composites*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 106, 257–282, 2017.
- [29] Javili A., Steinmann P., Mosler J. *Micro-to-macro transition accounting for general imperfect interfaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 317, 274–317, 2017.
- [30] Firooz S. and Chatzigeorgiou G. and Meraghni F. and Javili A. *Bounds on size effects in composites via homogenization accounting for general interfaces*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 32(1), 173–206, 2020.
- [31] Lahellec N., Suquet P. *Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non-radial loadings*, International Journal of Plasticity, 42, 1–30, 2013.
- [32] Lucchetta A., Auslender F., Bornert M., Kondo D. *A double incremental variational procedure for elasto-plastic composites with combined isotropic and linear kinematic hardening*, International Journal of Solids and Structures, 158, 243–267, 2019.
- [33] Miller R.E., Shenoy V.B. *Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements*, Nanotechnology, 11(3), 139, 2000.