

Mesure de résonances non linéaires et de courbes maîtresses pour des poutres excitées paramétriquement

S. Benacchio¹, P. Chatelain¹, C. Giraud-Audine², O. Thomas¹

¹ Arts et Métiers, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques et Numériques (LISPEN EA 7515), Lille, France, {simon.benacchio,olivier.thomas}@ensam.eu

² Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance (HEI, EA 2697, Arts et Métiers Paris-Tech, Ecole Centrale de Lille, Université de Lille), F-59000 Lille, France

Résumé — Un système de boucle à verrouillage de phase est utilisé pour mesurer les courbes de résonance et les courbes maîtresses du premier et second modes de flexion de poutres excitées paramétriquement. Pour des poutres encastrées-libres, ces deux modes ont classiquement des comportements raidissant et assouplissant. Un modèle analytique est utilisé pour illustrer le comportement de ces deux types de résonances. Les résultats expérimentaux et théoriques sont comparés et discutés.

Mots clés — Excitation paramétrique, non-linéarité, boucle à verrouillage de phase.

1 Introduction

Le phénomène de résonance paramétrique, qui consiste à exciter un système en faisant varier un de ses paramètres, est utilisé dans différents domaines pour améliorer les performances des systèmes oscillants comme par exemple les appareils de microscopie en champ proche [8] ou des amplificateurs de signaux [4]. Pour ce genre de système, les non-linéarités jouent un rôle essentiel puisqu'elles stabilisent les oscillations en limitant leur amplitude. Pour l'étude expérimentale des phénomènes résonnants non linéaires, les systèmes à verrouillage de phase possèdent plusieurs avantages. Ils permettent non seulement de stabiliser les oscillations instables des oscillateurs mais également de tracer directement la courbe maîtresse (backbone en anglais) des résonances non linéaires. Si les systèmes à verrouillage de phase ont été largement utilisés pour l'étude de résonances non linéaires classiques [1], [5], ils l'ont moins été pour l'étude des systèmes paramétriques [2]. Ce papier propose d'utiliser une boucle à verrouillage de phase pour la mesure de résonances paramétriques de poutres encastrées-libres. Ces poutres sont excitées à leur extrémité encastree par un forçage longitudinal. Dans la Section 2, on présentera un modèle de poutre qui permettra d'illustrer le phénomène de résonance paramétrique appliqué à ce type de structure. Dans la Section 3, on présentera la méthode de mesure des courbes de résonances et de la courbe maîtresse des poutres. Dans la Section 4, les résultats théoriques et expérimentaux seront comparés et discutés.

2 Modélisation

2.1 Cas d'étude

Dans la suite on considère deux poutres, dites *Poutre 1* et *Poutre 2*, de longueur $L_1 = 140$ mm et $L_2 = 276$ mm et dont on excite paramétriquement le premier et second mode de flexion respectivement.

2.1.1 Équation de poutre

Pour modéliser ces poutres, on considère le modèle général de poutre non linéaire donné dans [6] qui sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli et d'inextensibilité donne l'équation du mouvement suivante

$$\rho A \ddot{w} + EI (w'''' + w' w''^2 + w'''' w'^2)' + \frac{\rho A}{2} \left[w' \int_L^X \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^{x_1} w'^2 dx_2 \right) dx_1 \right]' = -\rho A \ddot{u}_0 (w' + (X - L)w''), \quad (1)$$

avec w le déplacement transverse d'une poutre de longueur L et dont la position axiale est repérée par la variable X . Les paramètres ρ , A , E et I sont respectivement la densité, l'aire de la section, le module d'Young et le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de la poutre. Le forçage est donné par \ddot{u}_0 , l'accélération longitudinale de la base encastree de la poutre. La variable t correspond au temps et les notations \bullet' et \bullet correspondent aux dérivées spatiale et temporelle respectivement.

2.1.2 Adimensionnement

Afin de réduire le nombre de paramètres indépendants de l'équation (1), on adimensionne ses variables telles que

$$\begin{cases} \bar{w} = w/L \\ \bar{X} = X/L \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \end{cases}$$

L'équation (1) se réécrit alors

$$\ddot{\bar{w}} + \bar{w}'''' + (\bar{w}'\bar{w}''^2 + \bar{w}'''\bar{w}'^2)' + \frac{1}{2} \left[\bar{w}' \int_1^{\bar{X}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \left(\int_0^{\bar{x}_1} \bar{w}'^2 d\bar{x}_2 \right) d\bar{x}_1 \right]' = -\frac{\ddot{u}_0}{L} (\bar{w}' + (\bar{X} - 1)\bar{w}''). \quad (2)$$

Par souci de simplicité, on omet la notation $\bar{\bullet}$ dans la suite.

2.1.3 Projection modale

On projette ensuite le déplacement transverse de la poutre sur la base orthonormée constituée de ses modes propres de flexion en posant

$$w(X, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(X) q_k(t), \quad (3)$$

avec $q_k(t)$ les coefficients modaux et $\Phi_k(X)$ les déformées modales de la forme

$$\Phi_k(X) = \cos \beta_k X - \cosh \beta_k X - a_k (\sin \beta_k X - \sinh \beta_k X), \quad (4)$$

où $\beta_k^2 = \omega_k$ est la pulsation propre adimensionnée du $k^{\text{ième}}$ mode de flexion de la poutre. En normalisant ces déformées modales telles que $\int_0^1 \Phi_k^2 dX = 1$, on peut calculer les coefficients a_k pour chaque mode. L'équation (2) devient

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\Gamma_{p,q,r}^k q_p q_r + \Pi_{p,q,r}^k (\ddot{q}_q q_r + \dot{q}_q \dot{q}_r) \right) q_p - \frac{\ddot{u}_0}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \Lambda_p^k q_p, \quad (5)$$

avec

$$\Gamma_{p,q,r}^k = \int_0^1 (\Phi_p' \Phi_q'' \Phi_r'' + \Phi_p''' \Phi_q' \Phi_r') \Phi_k dx_1 \quad (6a)$$

$$\Pi_{p,q,r}^k = \int_0^1 \left[\Phi_p' \int_1^{x_1} \int_0^{x_2} \Phi_q' \Phi_r' dx_3 dx_2 \right]' \Phi_k dx_1 \quad (6b)$$

$$\Lambda_p^k = \int_0^1 (\Phi_p' + (x_1 - 1)\Phi_p'') \Phi_k dx_1 \quad (6c)$$

2.1.4 Réduction à un mode

On réduit ensuite le système à un mode. L'équation (5) s'écrit

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \Gamma_k q_k^3 + \Pi_k (\dot{q}_k q_k + \dot{q}_k^2) q_k = -\frac{\ddot{u}_0}{L} \Lambda_k q_k \quad (7)$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma_k = \int_0^1 (\Phi_k' \Phi_k'' \Phi_k'' + \Phi_k''' \Phi_k' \Phi_k')' \Phi_k dx_1 & (8a) \\ \Pi_k = \int_0^1 \left[\Phi_k' \int_1^{x_1} \int_0^{x_2} \Phi_k' \Phi_k' dx_3 dx_2 \right]' \Phi_k dx_1 & (8b) \\ \Lambda_k = \int_0^1 (\Phi_k' + (x_1 - 1) \Phi_k'') \Phi_k dx_1 & (8c) \end{cases}$$

Pour le premier et second mode de flexion de la *Poutre 1* et de la *Poutre 2*, les paramètres définis précédemment sont donnés dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Paramètres liés aux premier et second modes de flexion d'une poutre.

| k | β_k | a_k | Γ_k | Π_k | Λ_k |
|-----|-----------|--------|------------|----------|-------------|
| 1 | 1.8751 | 0.7341 | 40.4407 | 4.5968 | 1.5709 |
| 2 | 4.6941 | 0.9831 | 13418 | 144.7256 | 8.6471 |

2.2 Résolution par la méthode d'équilibrage harmonique

2.2.1 Solutions générales

On cherche maintenant une solution à l'équation (7) en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique. En ne considérant qu'une seule harmonique, la réponse de la poutre forcée paramétriquement à sa base par une accélération $\ddot{u}_0 = -4\Omega^2 U_0 \cos(2\Omega t)$ est de la forme

$$q_k(t) = Q_k \cos(\Omega t + \psi_k). \quad (9)$$

Le terme non linéaire inertiel peut donc se réécrire

$$\Pi_k (\ddot{q}_k q_k + \dot{q}_k^2) q_k = \Pi_k (-\Omega^2 q_k^2 + \Omega^2 Q_k^2 \sin^2(\Omega t + \psi_k)) q_k \quad (10)$$

$$= \Pi_k (-\Omega^2 q_k^3 + \Omega^2 Q_k^2 (1 - \cos^2(\Omega t + \psi_k)) q_k) \quad (11)$$

$$= \Pi_k (-\Omega^2 q_k^3 + \Omega^2 Q_k^2 q_k - \Omega^2 q_k^3) \quad (12)$$

En ajoutant un terme d'amortissement linéaire de coefficient μ au système, l'équation (7) se réécrit

$$\ddot{q}_k + \mu \dot{q}_k + (\omega_k^2 + \Pi_k Q_k^2 \Omega^2 + \delta \cos(2\Omega t)) q_k + (\Gamma_k - 2\Omega^2 \Pi_k) q_k^3 = 0 \quad (13)$$

avec $\delta = -\frac{4\Omega^2 U_0 \Lambda_k}{L}$. Les solutions de l'équation (13) sont [7]

$$Q_k^2 = -\frac{4}{3\Gamma_k - 2\Omega^2 \Pi_k} \left((\omega_k^2 - \Omega^2) \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \mu^2 \Omega^2} \right) \quad (14)$$

$$\tan(2\psi_k) = \frac{\Omega \mu}{\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \mu^2 \Omega^2}} \quad (15)$$

2.2.2 Remarques sur la phase

La phase de la poutre par rapport à l'excitation est calculée avec l'équation (15). Comme la fonction $\tan(2\psi_k)$ est définie à $\pi/2$ près, cette équation a deux solutions ψ_k^- et ψ_k^+ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ces deux solutions sont déphasées de π telles que $\psi_k^+ = \psi_k^- + \pi$ comme illustré sur la Figure 1. Sur cette figure, on constate bien qu'en régime permanent les deux signaux à Ω et déphasés de π sont similaires vis à vis du signal à 2Ω . Lors de l'utilisation d'une boucle à verrouillage de phase, la consigne de phase ψ_c peut donc a priori prendre deux valeurs pour observer une même solution.

La résonance de phase correspond à la phase pour laquelle la courbe de résonance décrite par Q_k dans l'équation (14) croise sa courbe maîtresse obtenue par cette même équation (14) lorsque le terme $\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \mu^2 \Omega^2}$ est nul. Dans ce cas, l'équation (15) donne deux solutions données par $\psi_{k,res}^- = -3\pi/4$ et $\psi_{k,res}^+ = \pi/4$.

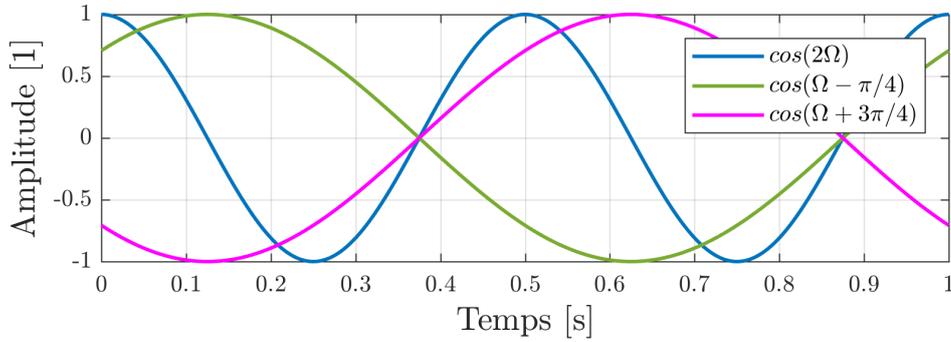


FIGURE 1 – Signaux temporels périodiques à 2Ω (bleu) et Ω déphasés de π (vert et magenta).

3 Méthode de mesure des résonances et courbe maîtresse

Pour mesurer les résonances de la poutre, un système de boucle à verrouillage de phase est utilisé [2]. A partir de la mesure du forçage et de la réponse de la poutre, ce système réalise un contrôle de l'excitation pour imposer le déphasage entre ces deux grandeurs. Ce type de système a l'avantage de stabiliser les solutions instables des résonances non linéaires et de permettre la mesure directe de leur courbe maîtresse [1]. Le principe de fonctionnement du montage utilisé est présenté sur la Figure 2. La poutre est excitée longitudinalement au niveau de sa base par une table vibrante dont l'accélération

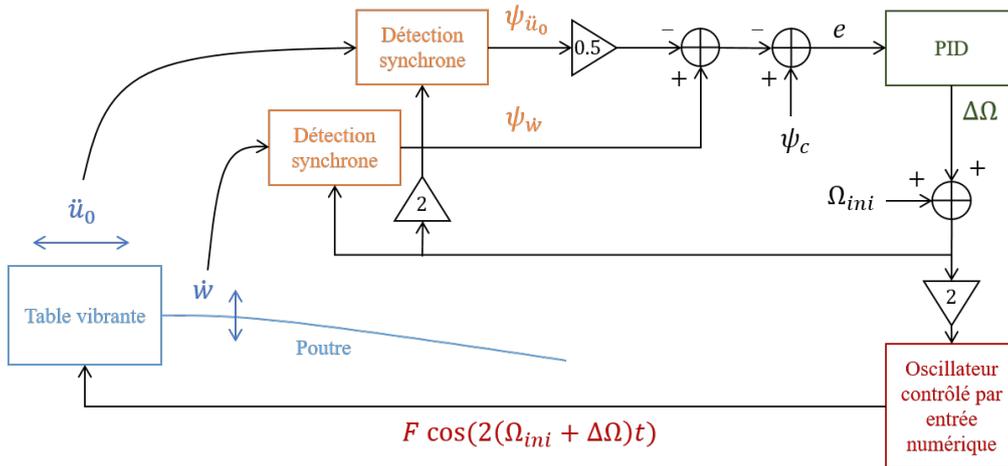


FIGURE 2 – Schéma de principe du système de boucle à verrouillage de phase.

est mesurée par un accéléromètre PCB Piezotronics 352C03. La vitesse des oscillations transverses de la poutre est mesurée par un vibromètre laser Polytec OFV-505 Sensor Head. L'amplitude et la phase de l'accélération et de la vitesse sont ensuite extraites grâce à une démodulation synchrone réalisée par rapport à un signal de référence respectivement à 2Ω et Ω . La phase de l'accélération est ensuite divisée par deux et comparée à celle de la vitesse de la poutre. Cette différence de phase est ensuite comparée à une consigne qui est soit fixée à $\psi_c = -\pi/4$ (pour la cas d'une comparaison entre vitesse et accélération) pour mesurer une courbe maîtresse soit balayée autour de $-\pi/4$ pour mesurer une courbe de résonance. L'erreur entre la consigne et la différence de phase est ensuite envoyée dans un contrôleur PID qui calcule une correction de fréquence à imposer à un oscillateur contrôlé par entrée numérique pour atteindre la consigne de phase. La sortie de cet oscillateur virtuel sert de signal d'excitation de la poutre.

4 Résultats

4.1 Mode 2 de la Poutre 2

L'amplitude de la vitesse mesurée par la boucle à verrouillage de phase pour le mode 2 de la Poutre 2 est présentée sur la Figure 3. Comme attendu, le deuxième mode de flexion de la poutre est assouplissant

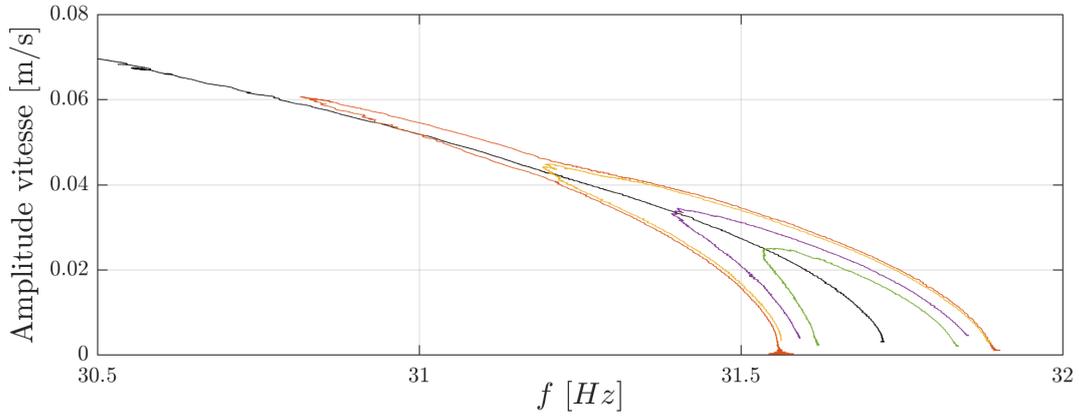


FIGURE 3 – Amplitude de la vitesse de la *Poutre 2* excitée sur son deuxième mode à différentes amplitudes de forçage. Les courbes de résonance sont en couleurs et la courbe maîtresse en noire.

[3]. On remarque que la boucle a verrouillage de phase permet bien de mesurer les parties instables (voir Fig. 4) des courbes de résonance ainsi que leur courbe maîtresse.

On compare maintenant ces résultats à ceux obtenus avec le modèle de poutre décrit dans la Section 2. En utilisant les équations (3) et (14), on trace sur la Figure 4(a) l'amplitude de la vitesse de la poutre $Q_k \Phi(X_{mes}) \Omega L$ mesurée à la position $X_{mes} = 11$ mm. Les paramètres utilisés pour tracer ces courbes sont

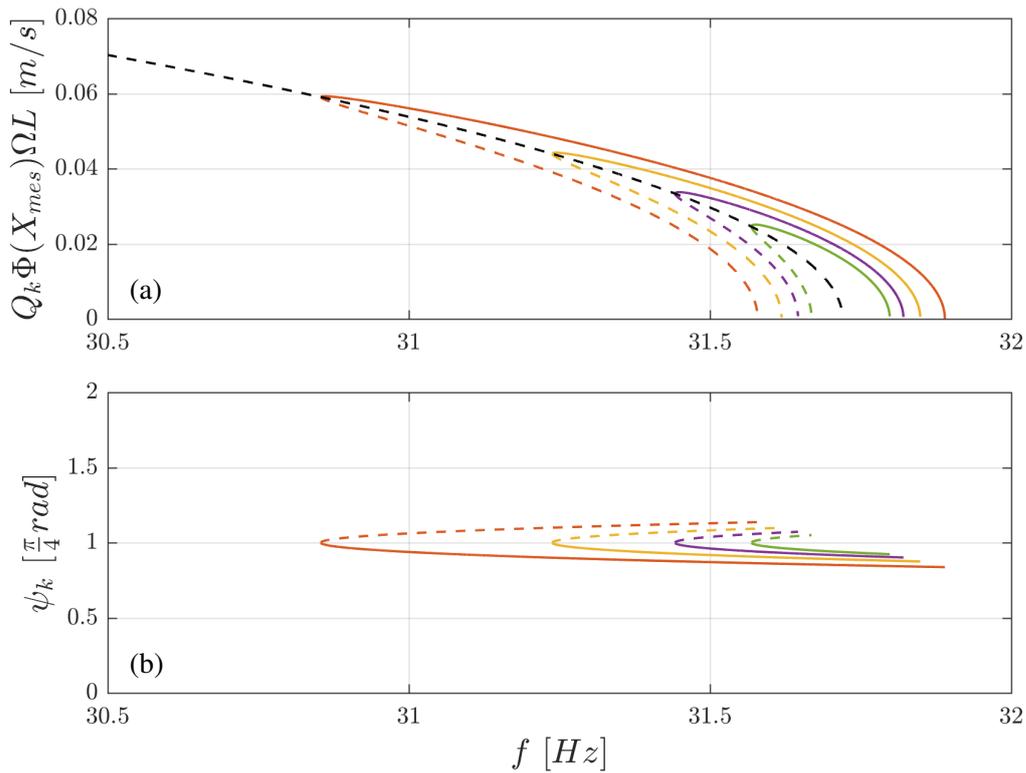


FIGURE 4 – Courbes de résonance (couleurs) et courbe maîtresse (noire pointillée) théorique de la *Poutre 2* excitée paramétriquement par différentes amplitudes de forçage : $\delta/\Omega^2 = 0.0821$ (vert), 0.0824 (violet), 0.083 (jaune) et 0.084 (rouge).

données dans le Tableau 2. Pour la *Poutre 1* et la *Poutre 2*, le module d'Young a été ajusté manuellement autour de la valeur théorique de l'acier ($E_{acier} = 210GPa$) pour obtenir la même fréquence de résonance linéaire que dans le cas expérimental. Les coefficients μ ont également été réglés manuellement pour obtenir des amortissements proches de ceux observés expérimentalement.

La phase ψ_k donnée par l'équation (15) est tracée sur la Figure 4(b). Par souci de clarté, seule la solution ψ_k^+ est représentée. La seconde phase donnée par l'équation (15) est décalée de $-\pi$ par rapport

TABLE 2 – Paramètres géométriques et matériaux de la *Poutre 1* et de la *Poutre 2*.

| Poutre | Largeur [mm] | Épaisseur [mm] | ρ [kg/m ³] | E [GPa] | μ [1] |
|--------|--------------|----------------|-----------------------------|-----------|-----------|
| 1 | 13 | 0.51 | 8010 | 183 | 0.55 |
| 2 | 13 | 0.51 | 8010 | 175 | 0.9 |

à celle de la Figure 4(b). On observe sur cette figure que les résonances de phase interviennent bien à $\Psi_{k,res}^+ = \pi/4$ et que ces valeurs de phase correspondent bien au croisement des courbes de résonance avec la courbe maîtresse.

4.2 Mode 1 de la *Poutre 1*

On s'intéresse maintenant à la résonance paramétrique de la *Poutre 1* excitée sur son premier mode de flexion. Les résultats obtenus avec la boucle à verrouillage de phase sont présentés sur la Figure 5. Alors que l'on s'attend à un comportement raidissant pour le premier mode de la poutre [3], on observe

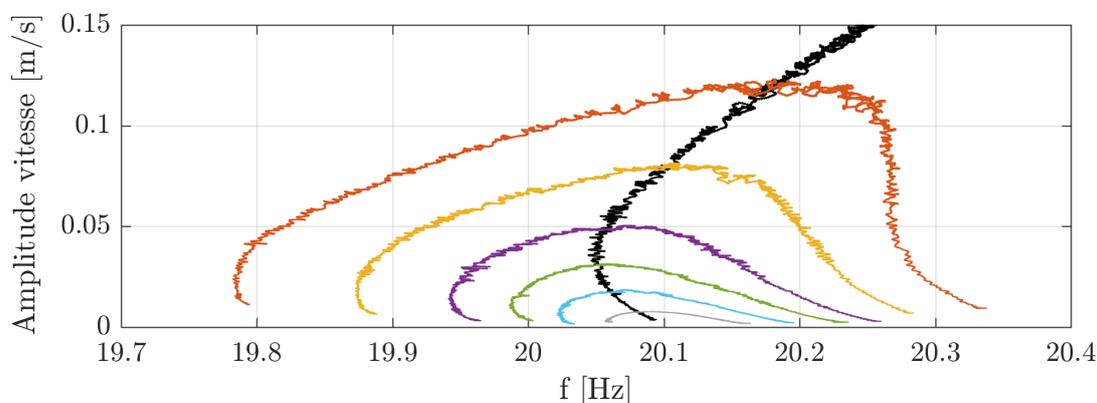


FIGURE 5 – Amplitude de la vitesse de la *Poutre 1* excitée sur son premier mode de flexion à différentes amplitudes de forçage. Les courbes de résonance sont en couleurs et la courbe maîtresse en noire.

que la courbe maîtresse s'incline d'abord vers les basses fréquences avant de repartir vers les hautes fréquences. Un défaut d'encastrement pourrait être à l'origine de ce phénomène à faible amplitude. Pour observer le caractère raidissant du mode 1 de la *Poutre 1*, on constate que les amplitudes des vibrations doivent être plus élevées que pour observer un assouplissement pour la *Poutre 2*.

On compare maintenant ces résultats à ceux obtenus avec le modèle de la Section 2. Pour cela, il est nécessaire de modifier légèrement le modèle puisqu'avec le type d'excitation choisie dans la partie 2.2.1, c'est à dire un déplacement imposé constant, les solutions stables et instables données par l'équation (14) ne se rejoignent jamais. En effet, le terme \ddot{u}_0 incluant la pulsation d'excitation au carré, il augmente avec la fréquence. Pour corriger cela, on utilise à la place une excitation à accélération constante en posant $\delta = U_0 \Lambda_k / L$. Avec ce type d'excitation on obtient les courbes de résonance de la Figure 6(a). L'amplitude de la vitesse de la poutre est calculée à la position $X_{mes} = 12$ mm. On constate que les résultats obtenus analytiquement ont une allure proche des résultats expérimentaux mais que le modèle ne représente que grossièrement le comportement de la poutre. Du fait de l'amortissement élevé et de fortes amplitudes de vibration, la courbe maîtresse ne passe plus par les maximums des courbes de résonance. Le phénomène d'assouplissement aux faibles amplitudes n'est pas non plus capturé par le modèle.

5 Conclusion

Dans cette étude, un système de boucle à verrouillage de phase est utilisé pour mesurer les courbes de résonance et les courbes maîtresses du premier et second mode de flexion de poutres excitées paramétriquement. Ce système permet la mesure des parties instables des courbes de résonance. Dans le

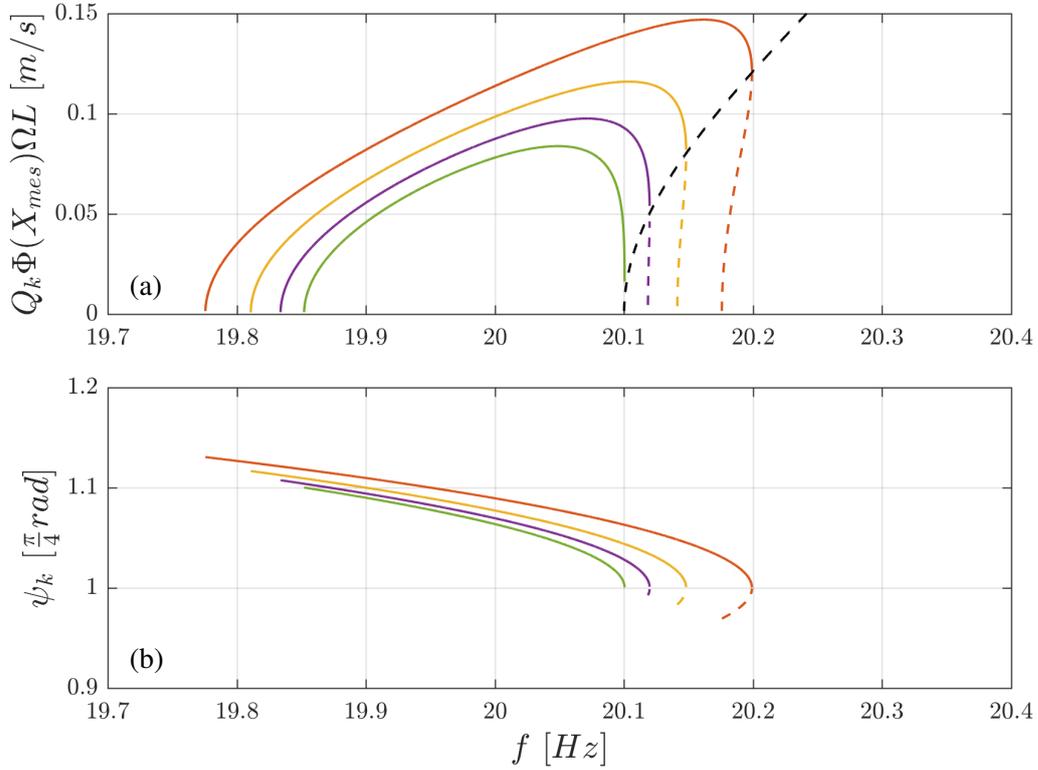


FIGURE 6 – Courbes de résonance (couleurs) et courbe maîtresse (noire pointillée) théorique de la *Poutre I* excitée paramétriquement par différentes amplitude de forçage : $\delta = 3.8677$ (vert), 3.8714 (violet), 3.8769 (jaune) et 3.8867 (rouge).

cas d'une résonance assouplissante, le système donne des résultats très proches de ceux obtenus à l'aide d'un modèle analytique de poutre. Cependant, la mesure d'une résonance raidissante semble plus complexe comme l'ont déjà notés d'autres auteurs [2]. De plus, le modèle de poutre utilisé nécessite des ajustements pour bien représenter le comportement de ce phénomène. Pour aller plus loin, la stabilité du système de boucle à verrouillage de phase doit aussi être étudiée pour assurer que ce dernier ne perturbe pas la mesure des courbes de résonance dans le cas d'une excitation paramétrique.

Références

- [1] V. Denis, M. Jossic, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault, O. Thomas. *Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form*, Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 2018.
- [2] J. M.L. Miller, D. Shin, H.-K. Kwon, S. W. Shaw, T. W. Kenny. *Phase Control of Self-Excited Parametric Resonators*, Phys. Rev. Applied, 12(4), page44053-44062, 2019.
- [3] P.F. Pai, A.H. Nayfeh. *Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations*, Int. J. Non-Linear Mech., 25(5), page455–474, 1990.
- [4] L. Papariello, O. Zilberberg, A. Eichler, R. Chitra. *Ultrasensitive hysteretic force sensing with parametric nonlinear oscillators*, Phys. Rev. E 94, page022201, 2016.
- [5] S. Peter, R. I. Leine. *Excitation power quantities in phase resonance testing of nonlinear systems with phase-locked-loop excitation*, Mechanical Systems and Signal Processing, 96, page139-158, 2017.
- [6] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü. *Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams*, Nonlinear Dyn., Springer, page1293–page1318, 2016.
- [7] J.J. Thomsen. *Vibrations and stability : advanced theory, analysis, and tools*, Springer, 2003.
- [8] K. L. Turner, S. A. Miller, P. G. Hartwell, N. C. Mac-Donald, S. H. Strogatz, and S. G. Adams. *Five parametric resonances in a microelectromechanical system*, Nature, 396, 149, 1998.