

Modélisation de l'interaction fluide - solides néo-hookéen par la méthode de Lattice Boltzmann

Erwan Liberge, Claudine Béghein

LaSIE UMR 7356 CNRS, Université de La Rochelle, {erwan.liberge,claudine.beghein}@univ-lr.fr

Résumé — Nous proposons dans cet article une méthode permettant de traiter les problèmes d'interaction fluide - solides néo-hookéens incompressibles par la méthode lattice boltzmann (LBM). Une formulation LBM adaptée à une formulation multiphasique du problème est proposée. Pour cela, les fonctions d'équilibres de l'opérateur de collision sont modifiées afin de prendre en compte les contraintes du domaine solide. La méthode proposée est appliquée sur deux cas de la littérature sur les matériaux néo-hookéens.

Mots clés — Matériaux néo-hookéens, Interaction Fluide Structure, Méthode de Lattice Boltzmann.

1 Introduction

L'approche la plus intuitive pour modéliser les problèmes physiques d'interaction fluide structure est de considérer un solveur fluide, un solveur structure et de développer un algorithme de couplage. On bénéficie ainsi des algorithmes les plus efficaces pour chacun des sous-problèmes fluide et structure, la problématique de déplaçant vers les algorithmes et méthodes de couplage (couplage en temps, couplage des domaines).

Une autre approche est de trouver une formulation multiphasique permettant de représenter la physique du fluide et de la structure sous les mêmes équations. Dans le cas de matériaux néo-hookéens incompressibles, la loi de comportement pouvant s'établir en eulérien, une équation similaire à Navier-Stokes, le tenseur des contraintes étant modifié, permet de modéliser la structure. En combinant avec les équations du fluide, on obtient une formulation multiphasique pour l'interaction fluide-solides néo-hookéens.

Cette approche a été étudiées par éléments finis avec raffinement de maillage [4], éléments finis avec frontières immergées pour renforcer l'impact de l'interface fluide-solide [9, 11]. Nous proposons dans cet article d'utiliser la méthode de lattice Boltzmann pour résoudre ce problème multiphasique.

La méthode de lattice Boltzmann (LBM) est utilisée en mécanique des fluides depuis les années 90 [3], et a connu un regain d'intérêt avec l'essor du calcul sur carte graphique (GPU) [5]. En effet, son algorithme qui consiste en des calculs locaux sur les nœuds du maillage et des échanges d'informations sur les nœuds voisins est particulièrement adapté à l'architecture des GPUs et permet des gains importants en terme de temps de calcul. Pour ces raisons, la plupart des méthodes développées pour les approches classiques (éléments finis, volumes finis) ont été adaptées pour l'interaction fluide structure (IFS). A chaque fois le déplacement de la structure est résolu par un solveur externe, sa modélisation dans le solveur fluide étant introduite via des méthodes de frontières immergées ou de pénalisation volumique [2, 1]. Il n'y a pas de formulation LBM pour les domaines solides.

Nous proposons dans cet article une formulation LBM pour des matériaux néo-hookéens incompressibles à partir d'une formulation multiphasique du problème d'interaction fluide structure. La formulation obtenue peut ainsi se résoudre entièrement sur GPU sans faire appel à un solveur externe. La méthode développée est testée sur deux cas classiques de la littérature sur les matériaux néo-hookéens.

2 Cadre théorique / Formulation mathématique

2.1 Formulation multiphasique pour l'interaction fluide - matériaux néo-hookéens

On considère un domaine fluide Ω_f , un domaine solide Ω_s constitué d'un matériau néo-hookéen incompressible et Γ l'interface entre ces 2 domaines. On note $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma$. On note également $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de vitesse en $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, $\mathbf{d}$ le champ de déplacement, ρ la masse volumique et σ le tenseur des contraintes.

Les domaines fluide et solide sont suivis via une fonction caractéristique χ telle que :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_f(t) \end{cases} \quad (1)$$

Ainsi, les variables et paramètres peuvent s'écrire en fonction de leurs appartenance au domaine fluide (indice f) ou solide (indice s) :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_f(1 - \chi) + \rho_s\chi \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_f(1 - \chi) + \mathbf{u}_s\chi \\ \sigma &= \sigma_f(1 - \chi) + \sigma_s\chi \end{aligned} \quad (2)$$

La formulation multiphasique du problème d'interaction fluide structure s'écrit ([8]) :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{f} \text{ in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Pour le domaine fluide on retrouve le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\sigma_f = -p_f Id + 2\nu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}_f) \text{ avec } \mathbf{D}(\mathbf{u}_f) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_f + \nabla^T \mathbf{u}_f), \quad (4)$$

et dans le domaine solide, σ_s est exprimé pour des matériaux néo-hookéens incompressibles [4, 11] :

$$\sigma_s = -p_s Id + \mu_s (\mathbf{F} \mathbf{F}^T - Id). \quad (5)$$

μ_s est le coefficient de Lamé du matériau et $\mathbf{F}$ le tenseur gradient des déformations défini par :

$$\mathbf{F} = (Id - \nabla \mathbf{d})^{-1}.$$

Les opérateurs de dérivation sont exprimés dans le cadre eulérien.

Le champ de déplacement est résolu via l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{d} = \mathbf{u} \quad (6)$$

Le suivi des domaines par la fonction χ se fait par l'intermédiaire de l'équation de Cahn-Hilliard [7] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = M \nabla^2 \mu_\phi, \quad (7)$$

avec M : paramètre de mobilité et μ_ϕ potentiel chimique :

$$\mu_\phi = 4\beta (\phi - \phi_{\Omega_s}) (\phi - \phi_{\Omega_f}) (\phi - \bar{\phi}) - k \nabla^2 \phi, \quad (8)$$

et χ est ensuite calculé en fonction de ϕ par

$$\chi = -\frac{\phi - \phi_{\Omega_s}}{\phi_{\Omega_f} - \phi_{\Omega_s}} + 1 \quad (9)$$

On remarque que avec cette formulation, le transfert des efforts fluides vers la structure est intrinsèque. Les efforts fluides ne nécessitent pas d'être calculés explicitement.

2.2 Formulation via la méthode de Lattice Boltzmann

Basée sur l'équation de Boltzmann, la méthode de Lattice Boltzmann est utilisée comme solveur en mécanique depuis les années 90. Nous résumerons ci-dessous le principe général de la méthode. Une bibliographie complète peut être trouvée dans [6].

2.2.1 Schéma LBM à deux temps de relaxation pour l'équation de Navier-Stokes

Le schéma à deux temps de relaxation (TRT) sur réseau de discrétisation D2Q9 (Figure 1) s'écrit :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau^+} \left(f_\alpha^+(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq+}(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{\Delta t}{\tau^-} \left(f_\alpha^-(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq-}(\mathbf{x}, t) \right) + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau^+} \right) F_\alpha \quad (10)$$

$$\text{avec } f_\alpha^+ = \frac{f_\alpha + f_{\bar{\alpha}}}{2}, f_\alpha^- = \frac{f_\alpha - f_{\bar{\alpha}}}{2}, \tau^- = \frac{\Delta t}{\tau^+ - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}, \tau^+ = 3\nu_f \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}.$$

$f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est la densité de probabilité de trouver une particule à l'instant t à la position $\mathbf{x}$ ayant une vitesse $\mathbf{c}_\alpha$, et f_α^{eq} :

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : (\mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I})}{2c_s^4} \right). \quad (11)$$

Les variables macroscopiques sont ensuite obtenues via :

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha; \quad \rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \rho \mathbf{f}; \quad p = \rho c_s^2, \quad (12)$$

où $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est la vitesse du son associée au réseau D2Q9, avec la contrainte $\frac{\mathbf{u}}{c_s} \ll 1$. La méthode de Chapman-Enskog fait le lien entre l'équation (10) et les équations de Navier-Stokes.

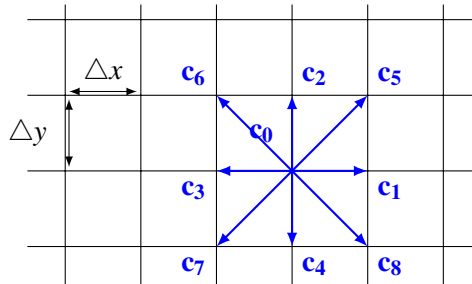


FIGURE 1 – Schéma de discrétisation D2Q9

2.2.2 Adaptation de la LBM pour les solides néo-hookéens

L'approche consiste à utiliser l'équation de Navier-Stokes étendue au domaine solide Ω_s , d'y soustraire les contraintes visqueuses $\tau_s^v = 2\nu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}_s)$ et d'y ajouter les contraintes néo-hookéennes $\tau_s^\mu = \mu_s (\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}d)$.

Les contraintes visqueuses sont calculées à partir des fonctions de distribution f_i :

$$\tau_s^v = - \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad (13)$$

On note $\mathbf{T}$ le tenseur défini par :

$$\mathbf{T} = (\tau_s^v - \tau_s^\mu) \chi. \quad (14)$$

Les fonctions d'équilibre (11) sont modifiées en $\tilde{f}_\alpha^{eq}$:

$$\tilde{f}_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{\mathbf{T}}{\rho} \right) : (\mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I})}{2c_s^4} \right), \quad (15)$$

de sorte que $\mathbf{T}$ intervienne dans l'expression du moment d'ordre 3 :

$$\Pi_{ij}^{\text{eq}} = \sum_{\alpha} \tilde{f}_{\alpha}^{\text{eq}} c_{\alpha i} c_{\alpha j} = \rho u_i u_j + \rho c_s^2 \delta_{ij} + T_{ij} \quad (16)$$

Le développement de Chapman-Enskog montre que cette opération agit sur l'équation macroscopique en rajoutant au second membre un terme en $-\nabla \cdot \mathbf{T}$. La restriction de l'équation à Ω_s donne :

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s^v - \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_s \text{ in } \Omega_s \quad (17)$$

En prenant en compte l'expression de $\mathbf{T}$ (14), on obtient, restreint sur Ω_s l'équation suivante :

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s^{\mu} + \mathbf{f}_s \text{ in } \Omega_s \quad (18)$$

Le terme $\boldsymbol{\tau}_s^{\mu}$ est calculé par un schéma de différences finies.

L'équation de Cahn-Hilliard (7) est résolue par LBM, l'algorithme de la section (2.2.1), étant adaptée à l'équation précitée, selon le modèle proposé par [12].

3 Application

3.1 Application 1 - Cavité entraînée 1

La premier exemple que nous présentons est un cas abondamment traité dans la littérature (Dunne [4], Wang *et al.* [9], Zhang *et al.* [10], Zhao *et al.* [11]). Il s'agit d'une cavité entraînée dont la partie inférieure est constituée d'un matériau néo-hookéen (Figure 2). Sous l'effet de l'écoulement le fond va se déformer jusqu'à atteindre une configuration stationnaire.

La configuration traitée est la suivante : $L = 2 \text{ cm}$; $L_s = 0.5 \text{ cm}$, $\rho_f = \rho_s = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\nu_f = 0.2 \text{ dyn} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-1}$ et $\mu_s = 0.2 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ et la vitesse dans le haut de la cavité est imposée :

$$\mathbf{u}(x, L, t) = U_0 \begin{cases} \sin^2(\pi x / 0.6) \mathbf{x} & x \in [0.0, 0.3] \\ \mathbf{x} & x \in [0.3, 1.7] \\ \sin^2(\pi(x - 2) / 0.6) \mathbf{x} & x \in [1.7, 2] \end{cases} \quad (19)$$

avec $U_0 = 0.5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

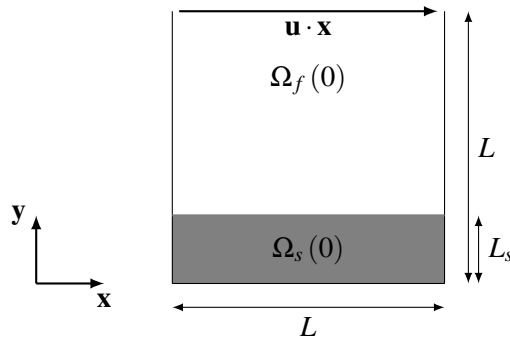


FIGURE 2 – Cavité entraînée constituée d'un fond néo-hookéen

On compare sur la Figure 3(a) la solution obtenue pour un temps de $t = 8 \text{ s}$ avec celle obtenue par Zhao *et al.* [11] au même instant. La même déformation d'interface est obtenue. Sous l'effet du fluide, le domaine solide s'affaisse à droite. Dans le même temps, dû à l'incompressibilité du matériau étudié, cela entraîne une élévation sur la partie gauche. Cette nouvelle configuration a pour conséquence de modifier l'écoulement comme le montrent les lignes de courant qui viennent tangenter l'interface fluide solide. Par ailleurs, les lignes de courant montent bien une non pénétrabilité du domaine solide par le fluide. La Figure 3(b) montre l'évolution de l'énergie cinétique au cours du temps. On observe une convergence vers un état stationnaire à partir d'un temps de 4.5 s.

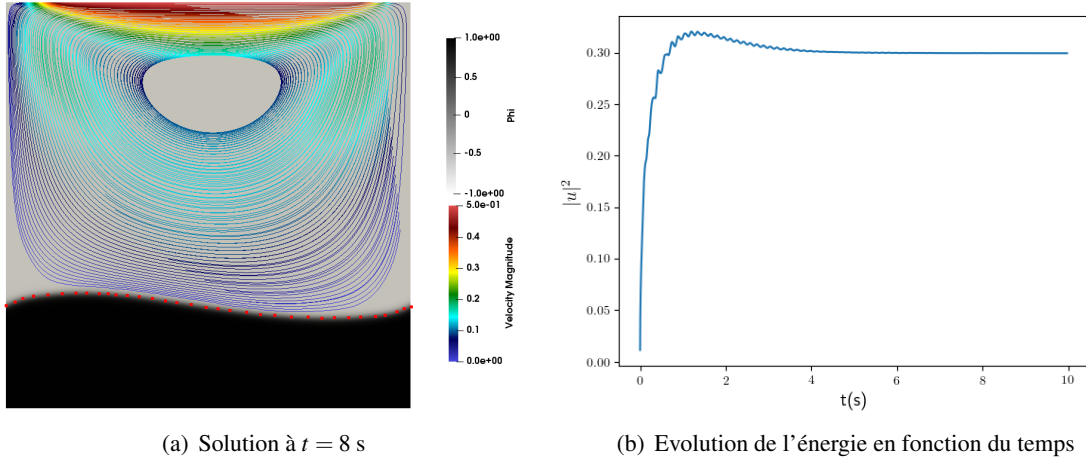


FIGURE 3 – figure 3(a) : Lignes de courant et fonction ϕ pour le temps physique de $t = 8$ s (solution stationnaire), ■ solution stationnaire de l'interface issue de la littérature (Zhao, 2008), figure 3(b) Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps

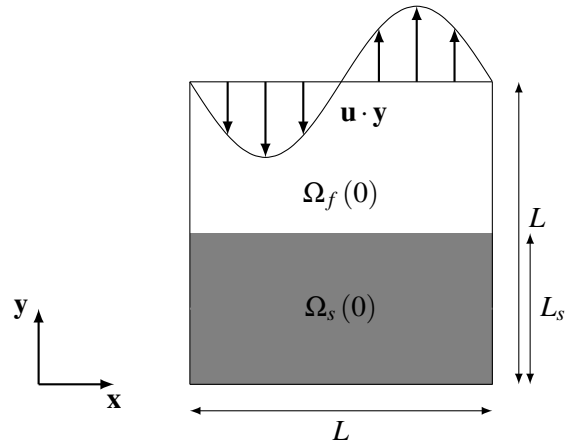


FIGURE 4 – Cavité carrée avec vitesse périodique en temps en entrée et matériau néo-hookéen dans le fond

3.2 Application 2 - Cavité entrain e 2

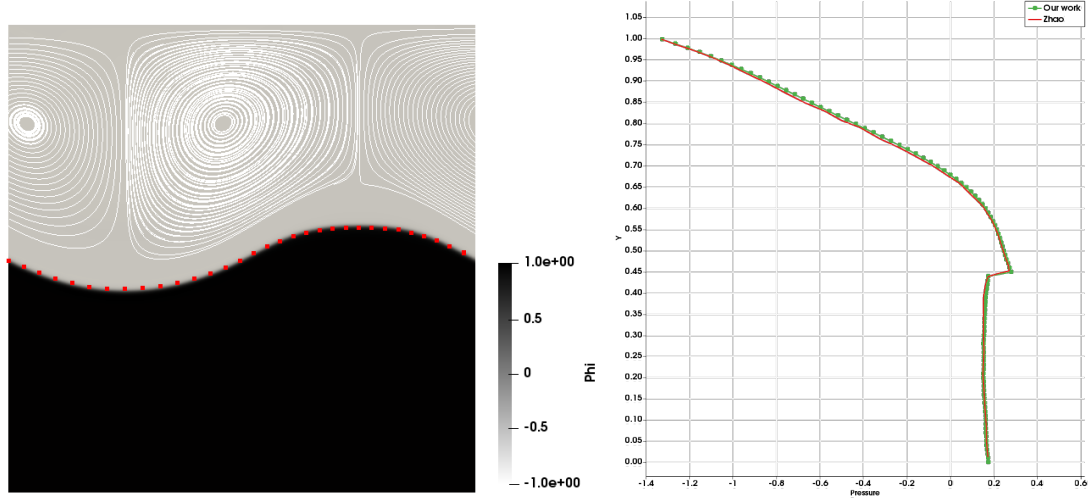
Le second exemple est celui d'une cavité carrée, périodique sur les côtés, de dimension L (Figure 4). Sur la paroi supérieure est imposé un écoulement normal instationnaire :

$$\mathbf{u}(x, L) = -U_0 (1 - \cos(2\pi t)) \sin(2\pi x) \mathbf{y} \quad (20)$$

La configuration étudiée est la suivante :

$$L = 1 \text{ m}; L_s = 0.5L; U_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \rho_f = \rho_s = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \nu_f = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}; \mu_s = 0.25 \text{ Pa}$$

La solution obtenue par la méthode proposée dans cet article est comparée avec celle obtenue par Zhao



(a) Déformation de l'interface à un temps physique de $t = 1 \text{ s}$, (b) Courbe de pression en $x = 0.25$   $t = 0.75 \text{ s}$
■ solution de l'interface de la littérature pour le même temps (Zhao, 2008)

FIGURE 5 – Comparaison des résultats obtenus pour la deuxième application avec la littérature

et al. [11] pour un temps de simulation de 1s (Figure 5(a)). Comme dans l'exemple pr c dent on observe une bonne reproduction de la déformation de l'interface. On observe également la présence de deux tourbillons, dont la position est conforme à la littérature. La courbe de pression à la position $x = 0.25 \text{ m}$ est également comparée pour un temps de simulation de 0.75 s. Au delà d'une bonne représentation de l'allure globale de la courbe de pression, on observe que le saut de pression à l'interface est bien capturé.

4 Conclusion

On a proposé dans cet article une méthode pour traiter par la méthode de lattice Boltzmann l'interaction entre les fluides et les matériaux néo-hookéens incompressibles. Pour cela, il est d'abord considéré une formulation macroscopique multiphasique permettant de traiter via une seule équation les domaines fluide et solide. L'équation de Navier-Stokes est étendue au domaine solide, via une modification du tenseur des contraintes, le tenseur des contraintes visqueuses étant remplacé par le tenseur des contraintes du matériau néo-hookéen. Le suivi des domaines est quant à lui assuré par la résolution d'une équation de Cahn-Hilliard. Ainsi, le transfert des efforts du domaine fluide vers le domaine structure est intrinsèque à la formulation, et il n'y a pas besoin de calculer explicitement les efforts du fluide. Ensuite, une formulation LBM correspondant à cette formulation macroscopique est proposée. Les fonctions d'équilibre du modèle LBM sont modifiées de manière à introduire dans les équations macroscopiques un tenseur permettant dans le domaine solide de modéliser le comportement d'un matériau néo-hookéen. La méthode est appliquée sur deux exemples de la littérature avec succès. Dans chacun des cas, la déformation des interfaces est bien reproduite. De même, des analyses sur le champ de vitesse ou le champ de pression valident la méthode proposée.

Références

- [1] M. Benamour, E. Liberge, and C. Béghein. Lattice Boltzmann method for fluid flow around bodies using volume penalization. *International Journal of Multiphysics*, 9(3) :299–315, 2015.
- [2] M. Benamour, E. Liberge, and C. Béghein. A volume penalization lattice boltzmann method for simulating flows in the presence of obstacles. *Journal of Computational Science*, 2020.
- [3] R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola. The lattice Boltzmann equation : theory and applications. *Physics Reports*, 222(3) :145–197, 1992.
- [4] Th. Dunne. An eulerian approach to fluid - structure interaction and goal-oriented mesh adaptation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51 :1017–1039, 2006. cited By 55.
- [5] Z. Fan, F. Qiu, A. Kaufman, and S. Yoakum-Stover. GPU cluster for high performance computing. *IEEE/ACM SC2004 Conference, Proceedings*, pages 297–308, 2004.
- [6] T. Kruger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggien. *The Lattice Boltzmann Method - Principles and Practice*. Graduate Texts in Physics. Springer International Publishing, 2017.
- [7] M. Petcu L. Cherfils. On the viscous cahn-hilliard-navier-stokes equations with dynamic boundary conditions. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 15(4) :1419–1449, 2016.
- [8] E. Longatte, E. Liberge, M. Pomarede, J.-F. Sigrist, and A. Hamdouni. Parametric study of flow-induced vibrations in cylinder arrays under single-phase fluid cross flows using pod-rom. *Journal of Fluids and Structures*, 78 :314–330, 2018.
- [9] X. Wang and L. T. Zhang. Interpolation functions in the immersed boundary and finite element methods. *Computational Mechanics*, 45(4) :321, December 2009.
- [10] Z.-Q. Zhang, G. R. Liu, and B. C. Khoo. Immersed smoothed finite element method for two dimensional fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(10) :1292–1320, 2012.
- [11] H. Zhao, J.B. Freund, and R.D. Moser. A fixed-mesh method for incompressible flow-structure systems with finite solid deformations. *Journal of Computational Physics*, 227(6) :3114–3140, 2008. cited By 76.
- [12] Y. Q. Zu and S. He. Phase-field-based lattice boltzmann model for incompressible binary fluid systems with density and viscosity contrasts. *Phys. Rev. E*, 87 :043301, April 2013.