

Analyse incrémentale basée sur les résolutions alternées pour la modélisation d'endommagement et la rupture fragile par champ de phase

T.H.T. Tran¹, J. Rahmoun², H. Naceur², D. Kondo³

¹ LAMIH, Université Polytechnique Hauts-de-France, thanhhaituan.tran@uphf.fr

² LAMIH, INSA Hauts-de-France, {jamila.rahmoun,hakim.naceur}@insa-hdf.fr

³ Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, djimedo.kondo@sorbonne-universite.fr

Résumé — Dans cette étude, nous proposons une technique numérique de champ de phase pour la modélisation de l'endommagement de structures. Cette approche incrémentale est basée sur une résolution alternée des variables cinématiques et d'endommagement à chaque pas. La condition d'irréversibilité d'endommagement est imposée à chaque pas par pénalité. La technique proposée a été validée sur deux applications numériques de structures incluant l'amorçage et la propagation de fissure, en confrontant nos résultats à ceux de la méthode non locale périodynamique et aux mesures expérimentales.

Mots clés — Non local, champ de phase, endommagement, éléments finis.

1 Introduction

La fissuration est le mécanisme principal d'endommagement et de rupture de la plupart des matériaux fragiles (verres, céramiques, (bio)composites à matrice fragile, certaines roches ou bétons, etc.). La modélisation prédictive et quantitative de l'initiation et la propagation de la rupture dans de tels milieux a connu d'importantes avancées qui ont permis le développement et la mise au point d'outils théoriques et numériques robustes. Les approches énergétiques basées sur une formulation variationnelle constituent un cadre théorique clair pour établir les liens entre les modèles d'endommagement [1] et les modèles de rupture [2]. En particulier, les méthodes de champ de phase constituent aujourd'hui une des voies les plus prometteuses [3] pour l'analyse de la transition endommagement-rupture quasi-fragile. Leur interprétation à l'aide de modèles à gradient d'endommagement leur confère de plus une assise physique et mécanique solide.

Dans cette étude, nous proposons de développer une technique numérique de champ de phase pour la modélisation d'endommagement et de rupture de structures constituées de matériaux fragiles. L'approche développée est basée sur la méthode variationnelle de champ de phase proposée par Ambrosio et Tortorelli [4] et adaptée à la rupture fragile par Bourdin et al. [5]. Cette méthode permet de s'affranchir de l'utilisation de technique particulière pour représenter les discontinuités liées aux fissures et permettant ainsi d'utiliser un cadre Éléments Finis standard. L'approche incrémentale de résolution du problème est basée sur une résolution alternée des variables cinématiques et d'endommagement à chaque pas en utilisant la technique des directions conjuguées. La condition d'irréversibilité d'endommagement (positivité des incréments d'endommagement) est imposée à chaque pas par la méthode de pénalité, pour sa simplicité mais aussi pour son efficacité car elle ne fait pas augmenter la taille du problème. La technique proposée s'est avérée efficace et rapide, elle a été validée à travers la résolution de deux applications numériques de structures incluant l'amorçage et la propagation de fissure. Les résultats obtenus ont été confrontés d'une part, à ceux numériques issus de la méthode non locale périodynamique, et d'autre part aux mesures expérimentales du front de propagation de fissures.

2 Formulation variationnelle

2.1 Modèle à gradient d'endommagement élastique isotrope

Le modèle d'endommagement à gradient considéré est formulé comme un problème de minimisation de la fonctionnelle énergie totale suivante [4] :

$$\Psi(\mathbf{u}, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega + \frac{3G_c}{8} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha}{\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext} ds \quad (1)$$

avec $\mathbf{u}$ le champ de déplacement, $\alpha > 0$ le champ irréversible scalaire d'endommagement, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ les déformations élastiques, $\mathbf{A}_0$ le tenseur d'élasticité du matériau non endommagé, G_c la ténacité du matériau, $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u})$ le champs de contraintes dans le matériau non endommagé tel que : $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = (1 - \alpha)^2 \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u})$ le champ de contraintes vrai du matériau endommagé. $\mathbf{f}_{ext}$ représente le vecteur des sollicitations externes appliquées sur le contour $\partial\Omega$ et ℓ une longueur interne liée à la résistance en traction du matériau et sa ténacité.

La positivité de la variable d'endommagement $\alpha > 0$ au cours de la résolution, peut être forcée soit par la technique des multiplicateurs de Lagrange ou par la technique de pénalité. C'est cette dernière méthode qui a été adoptée dans ce travail, pour sa simplicité et efficacité, puisqu'elle ne fera pas augmenter la taille du problème.

L'introduction de la pénalité sur la variable α dans la fonctionnelle (1) donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{u}, \alpha) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega + \frac{3G_c}{8} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha}{\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext} ds + \int_{\Omega} \kappa < \alpha >^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

où κ est un coefficient de pénalité ($\kappa \approx 10^6$) et $< \alpha >^2 = \begin{cases} \alpha^2 & \text{if } \alpha \leq 0 \\ 0 & \text{if } \alpha > 0 \end{cases}$

L'équation (2) est composée de l'énergie élastique de déformation $\tilde{\Psi}_e$, l'énergie dissipée totale $\tilde{\Psi}_d$, le travail des forces externes $\tilde{\Psi}_{ext}$ et de la fonction de pénalité $\tilde{\Psi}_{\kappa}$ sous la forme :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{u}, \alpha) = \tilde{\Psi}_e(\mathbf{u}, \alpha) + \tilde{\Psi}_d(\alpha) - \tilde{\Psi}_{ext}(\mathbf{u}) + \tilde{\Psi}_{\kappa}(\alpha) \quad (3)$$

L'équilibre mécanique de la structure en régime statique est réalisé par la minimisation de la fonctionnelle énergie (3), avec comme variables le champ de déplacement $\mathbf{u}$ et le champ de variable scalaire endommagement $\alpha > 0$. Ainsi, la formulation variationnelle du problème (3) s'écrit :

$$\delta \tilde{\Psi}(\mathbf{u}, \alpha) = \delta \tilde{\Psi}_e(\mathbf{u}, \alpha) + \delta \tilde{\Psi}_d(\alpha) - \delta \tilde{\Psi}_{ext}(\mathbf{u}) + \delta \tilde{\Psi}_{\kappa}(\alpha) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}; \delta \alpha \neq 0) \quad (4)$$

Les expressions finales des termes variationnelles sont :

$$\begin{cases} \delta \tilde{\Psi}_e(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \alpha (1 - \alpha) \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \\ \delta \tilde{\Psi}_d(\alpha) = \frac{3G_c}{8} \int_{\Omega} \left(\frac{\delta \alpha}{\ell} + 2\ell \delta \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) d\Omega \\ \delta \tilde{\Psi}_{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext} ds \\ \delta \tilde{\Psi}_{\kappa}(\alpha) = 2\kappa \int_{\Omega} \delta \alpha \alpha d\Omega \end{cases} \quad (5)$$

La résolution numérique de l'équation (4) permettra d'obtenir le champ de variables d'état $(\mathbf{u}, \alpha)$.

2.2 Discrétisation en éléments finis

Nous proposons de discrétiser l'équation (4) en utilisant la méthode des éléments finis. L'élément Q4 isoparamétrique [6] est utilisé en formulation mixte de type déplacement et endommagement avec 3

degrés de liberté par noeud i : deux translations u_i, v_i suivant x et y respectivement et une troisième variable d'endommagement α_i . Ainsi l'élément formulé possède 12 degrés de liberté au total. L'approximation éléments finis du vecteur de déplacement $\mathbf{u}$ et de la variable d'endommagement α est effectuée sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_n \quad \text{et} \quad \alpha = \overline{\mathbf{N}} \cdot \alpha_n$$

avec : $\mathbf{u}_n = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T$ le vecteur des 8 degrés de liberté classiques de type translation,
 $\alpha_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}^T$ le vecteur des variables nodales d'endommagement,
 $\overline{\mathbf{N}} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ le vecteur des fonctions de forme de l'élément Q4 [6],

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Les champs de gradients s'en déduisent : $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u}_n$; $\nabla \alpha = \nabla \overline{\mathbf{N}} \alpha_n$

La forme variationnelle de l'énergie élastique s'écrit :

$$\delta \tilde{\Psi}_{int}(\mathbf{u}, \alpha) = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_u \mathbf{u}_n + \delta \alpha_n^T (\mathbf{K}_\alpha \alpha_n - \mathbf{F}_\alpha) \quad (6)$$

avec : $\mathbf{K}_u = \int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B} d\Omega$; $\mathbf{K}_\alpha = \int_{\Omega} \overline{\mathbf{N}}^T \overline{\mathbf{N}} \sigma_0(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega$; $\mathbf{F}_\alpha = \int_{\Omega} \overline{\mathbf{N}}^T \sigma_0(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega$

De manière analogue, la forme variationnelle de l'énergie de dissipation s'écrit :

$$\delta \tilde{\Psi}_f(\alpha) = \delta \alpha_n^T (\mathbf{K}_G \alpha_n + \mathbf{G}_\alpha) \quad (7)$$

avec : $\mathbf{K}_G = \frac{3G_c}{4} \int_{\Omega} \ell \nabla \overline{\mathbf{N}}^T \cdot \nabla \overline{\mathbf{N}} d\Omega$; $\mathbf{G}_\alpha = \frac{3G_c}{8} \int_{\Omega} \frac{1}{\ell} \overline{\mathbf{N}}^T d\Omega$

La forme variationnelle de l'énergie externe est écrite de la manière suivante :

$$\delta \tilde{\Psi}_{ext}(\mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{F}_{ext} \quad (8)$$

avec : $\mathbf{F}_{ext} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_{ext} ds$

Enfin, la forme variationnelle de la fonction de pénalité est :

$$\delta \tilde{\Psi}_\kappa(\alpha) = \delta \alpha_n^T \mathbf{K}_\kappa \alpha_n \quad (9)$$

avec : $\mathbf{K}_\kappa = 2\kappa \int_{\Omega} \overline{\mathbf{N}}^T \overline{\mathbf{N}} d\Omega$

L'assemblage de tous les termes conduit à la condition d'équilibre discrétisée finale suivante :

$$\delta \tilde{\Psi}(\mathbf{u}, \alpha) = \delta \mathbf{u}_n^T (\mathbf{K}_u \mathbf{u}_n - \mathbf{F}_{ext}) + \delta \alpha_n^T ((\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\kappa) \alpha_n + \mathbf{G}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha) \quad \forall (\delta \mathbf{u}_n, \delta \alpha_n) \neq \mathbf{0} \quad (10)$$

On obtient alors ce système non linéaire augmenté suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_u \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_{ext} & 2n \text{ inconnues} \\ (\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\kappa) \alpha_n = \mathbf{F}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha & n \text{ inconnues} \end{cases} \quad (11)$$

avec : n le nombre de noeuds total.

Pour résoudre le système augmenté (11), une formulation incrémentale est nécessaire, en imposant des incréments de charge externe $\lambda \mathbf{F}_{ext}$ à chaque pas, avec λ le facteur de charge qui varie de 0 à 1.

Dans cette étude, nous proposons une première approche pour résoudre le système (11) basée sur l'algorithme de recherche séquentielle itérative ci-dessous :

- Pour chaque pas t , on connaît : $\lambda^t, \mathbf{u}_n^t, \alpha_n^t$
 - Incrémenter le facteur de charge externe $\lambda^{t+\Delta t} = \lambda^t + \Delta\lambda$
 - Poser $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_n^t, \alpha^1 = \alpha_n^t$
- FOR $i = 1 : niter$
1. Fixer $\alpha^i \rightarrow$ résoudre : $\mathbf{K}_u \mathbf{u}^{i+1} = \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext}$
 2. Avec la solution obtenue $\mathbf{u}^{i+1}$, calculer : $\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{K}_G, \mathbf{K}_\kappa, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{G}_\alpha$
 3. Résoudre $(\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\kappa) \alpha^{i+1} = \mathbf{F}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha$
 4. Test de convergence si : $|\max(\alpha^{i+1} - \alpha^i)| \leq 10^{-6} \rightarrow \text{STOP}$
- END
- Poser $\mathbf{u}_n^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^i, \alpha_n^{t+\Delta t} = \alpha^i$

FIGURE 1 – Algorithme de résolution alternée

Il est à noter que dans cette approche incrémentale la condition d'irréversibilité d'endommagement est imposée sur l'incrément d'endommagement de chaque pas $\Delta\alpha = \alpha^i - \alpha_n^t$.

L'algorithme de la Fig.1 a été mis en oeuvre dans un code maison développé sous MATLAB et utilisant un élément fini de type Q4, permettant de prédire la réponse mécanique de structures fragiles sous chargement statique.

3 Validation du modèle par des applications numériques

3.1 Analyse de la fissuration d'une plaque carrée chargée diagonalement

Le premier exemple d'application du modèle développé est le test proposé initialement par Ayatollahi et Aliha [7]. C'est une plaque carrée chargée diagonalement par deux déplacements imposés opposés $u = 0.5mm$, de longueur $2w = 150mm$ et d'épaisseur $t = 5mm$ et qui contient une fissure centrale inclinée d'un angle $\alpha = 62.5^\circ$ et de longueur $2a = 45mm$ (Fig.2). Les propriétés mécaniques utilisées pour la simulation numériques sont ceux du polymère Plexiglas fragile : $E = 2940MPa$, $\nu = 0.38$ et $G_c = 0.089N/mm$. Les paramètres de la simulation sont : nombre de pas égale à 250, tolérance égale à 10^{-3} , coefficient de pénalité égale à 10^9 , longueur interne $\ell = 5mm$ et valeur initiale d'endommagement $\alpha = 0$.

Une comparaison, pour trois tailles de maille différentes (3mm, 2.5mm et 2mm), des profils d'endommagement obtenus par notre modèle à gradient d'endommagement, par les essais expérimentaux et par la méthode périodynamique décrits dans [7], est représenté sur la figure 3. On observe que la plaque est fracturée brutalement en mode 2 comme en expérimental, à partir des pointes de la fissures ce qui montre le comportement de rupture fragile de la plaque. De plus, la largeur de la région endommagée augmente constamment au fur et à mesure que l'endommagement évolue et se rapproche du mécanisme de propagation de la fissure observé expérimentalement et numériquement par la méthode périodynamique [8]. L'étude reflète également l'efficacité de l'algorithme de la méthode de champ de phase et sa capacité à capturer le mécanisme d'initiation et de propagation de fissures dans ce type de matériau.

La variation en fonction du changement de la force de réaction et des énergies élastique et des énergies dissipées est tracée sur la figure 4 pour différentes tailles de maille considérées précédemment. On observe que la force de réaction et l'énergie élastique augmentent en fonction du temps jusqu'à atteindre des valeurs maximales et ensuite chutent brutalement. De plus, les courbes se chevauchent dans le régime élastique pour les trois tailles de maille. Cependant, la rupture fragile est atteinte plus rapidement en augmentant la taille de maille. En particulier, plus on raffine la maille plus les pics d'effort et d'énergie élastique augmentent. En ce qui concerne l'énergie de dissipation, ses valeurs restent nulles jusqu'à l'initiation de la rupture où on observe une légère augmentation de cette énergie. Le tableau 1 résume les données prédites par le modèle numériques.

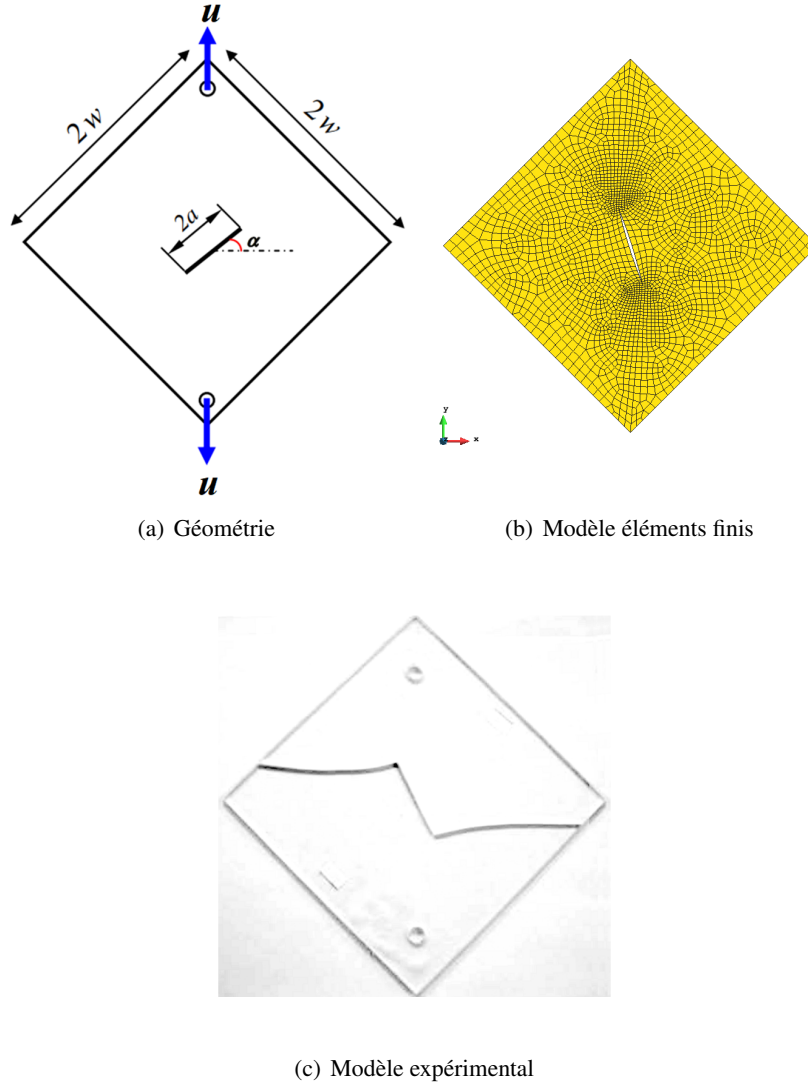


FIGURE 2 – Modèle de la plaque carrée chargée diagonalement

3.2 Plaque entaillée soumise à un chargement de flexion trois points

Nous allons étudier à présent l'évolution de d'endommagement et de rupture pour une plaque entaillée soumise à un chargement de flexion trois points décrite dans les travaux de Zhou et al. [10]. La plaque, de dimensions $320mm \times 70mm \times 30mm$, est chargée par un déplacement imposé $u = 0.5mm$. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les suivantes : $a = 17.5mm$, $S = 150mm$, $\gamma = \frac{x}{S} = \frac{1}{2}$, $E = 32800MPa$, $\nu = 0.25$ et $G_c = 0.01N/mm$. On considère pour la simulation numérique une maille progressif avec une taille minimale des éléments de $1mm$ à partir de la zone de fissure jusqu'à une taille maximale de $20mm$ au bord de la plaque (Voir Fig.5). On considère : un nombre de pas de 50, une tolérance de 10^{-3} , un coefficient de pénalité de 10^9 et une longueur interne $\ell = 3mm$.

Sur la figure 6 sont représentés, pour deux tailles de maille différentes, les évolutions du profil d'endommagement prédites par le modèle à gradient d'endommagement en comparaison avec ceux obtenus expérimentalement par [9] et numériquement par [10] en utilisant la méthode périodynamique. On observe que le profil d'endommagement prédit par le modèle numérique concorde bien avec celui obtenu expérimentalement. En particulier, le modèle estime une moyenne, à partir des trois mailles, de l'angle de propagation de fissure de 13° contre 16° pour l'expérimental, alors que la méthode périodynamique prédit un angle plus important d'environ 55° .

La figure 7 représente, pour trois tailles de maille différentes, la variation en fonction du temps de la force de réaction et des énergies élastique et de dissipation. On remarque, pour les trois types de maille, que les

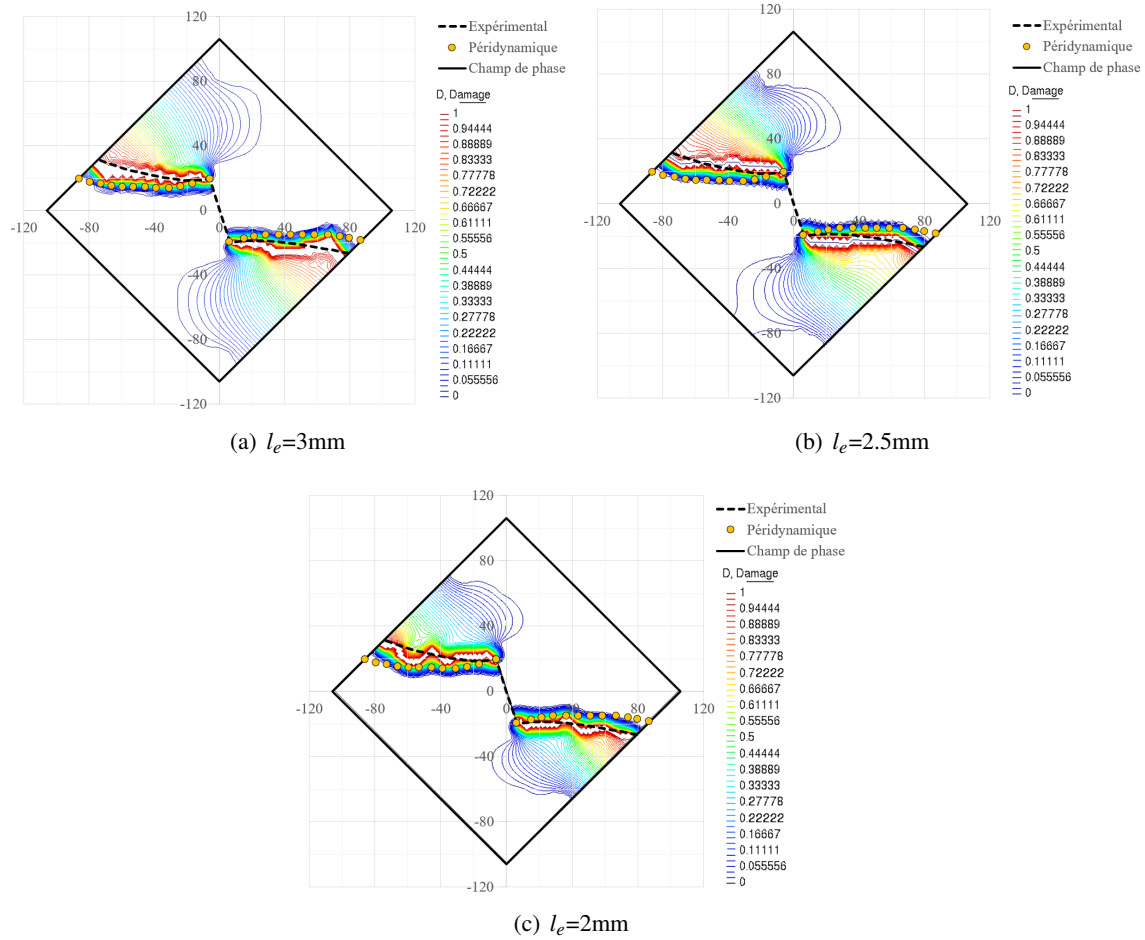


FIGURE 3 – Évolution du profil d'endommagement de la plaque chargée diagonalement

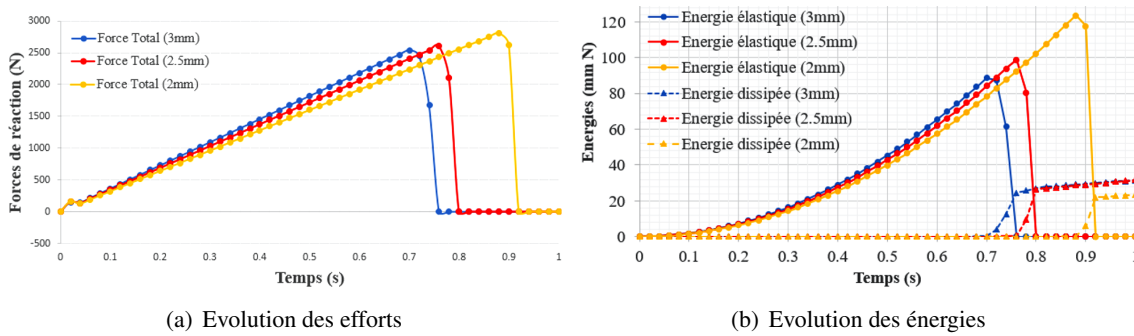


FIGURE 4 – Variation de la force de réaction et des énergies élastique et de dissipation en fonction du temps de la plaque carrée

courbes de la force de réaction se superposent dans la partie élastique jusqu'au premier pic où les valeurs sont différentes. Ensuite, une chute de l'effort est constaté de manière similaire puis une augmentation jusqu'au second pic qui précède la rupture. De plus, plus la taille de maille augmente plus le premier pic de la force de réaction diminue. Une tendance contraire est observée pour le deuxième pic. Pour l'énergie élastique, elle augmente progressivement jusqu'à la rupture. Ces résultats sont également listés dans le tableau 2.

En conclusion, cette étude avait pour objectif le développement d'un modèle d'endommagement à gradient en 2D capable de prédire le processus d'endommagement et de rupture des matériaux fragiles sous sollicitations statiques. Ce modèle est basé sur une approche variationnelle de minimisation de l'énergie totale. La formulation en Éléments Finis du modèle d'endommagement régularisée est effectuée à l'aide d'un algorithme de recherche séquentielle itérative. Le modèle obtenu est implémenté dans un code mai-

TABLE 1 – Résultats de la simulation numérique de la plaque carrée

Taille de maille (mm)	3	2.5	2
Force de réaction maximale (N)	2534.74	2601.36	2810.12
Énergie élastique maximale (mmN)	88.68	98.798	123.62
Temps (s)	0.7	0.76	0.88

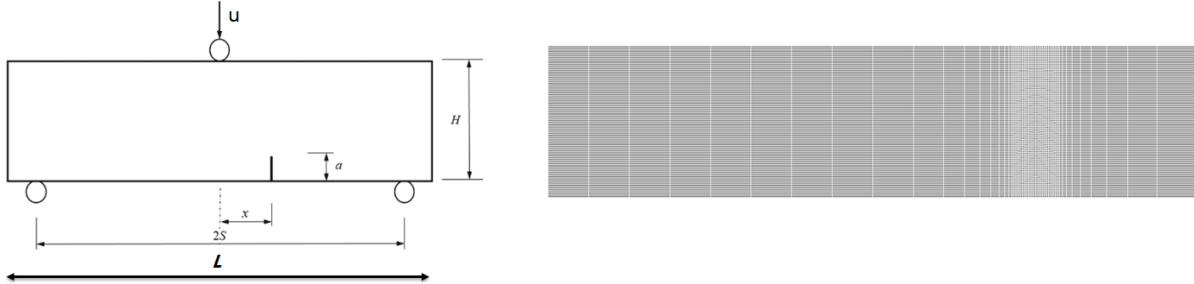


FIGURE 5 – Modèle de la plaque entaillée soumise à un chargement de flexion trois points

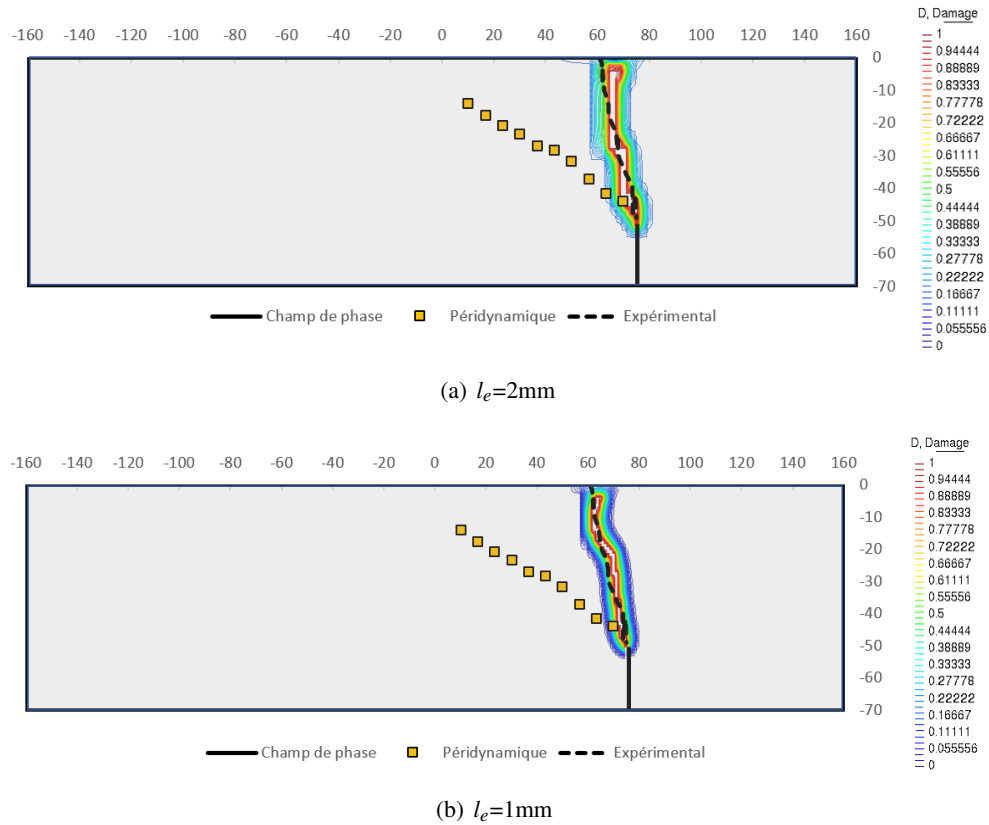


FIGURE 6 – Evolution du profil d'endommagement de la plaque entaillée soumise à un chargement de flexion trois points

son développé sous MATLAB et utilisant un élément solide quadrilatéral.

Une première validation du modèle proposé est effectuée en considérant deux applications issues de la littérature. Le modèle numérique prédit une bonne estimation de l'évolution du profil d'endommagement et de rupture des matériaux fragiles sous sollicitations statiques. Des améliorations sont en cours de développement pour étendre le modèle aux structures minces sous chargements quasi-statiques et dynamiques.

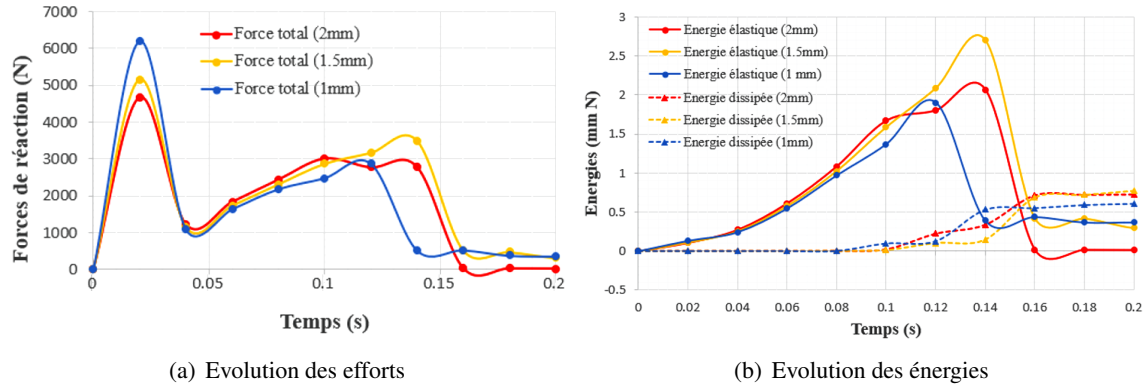


FIGURE 7 – Variation de la force de réaction et des énergies élastique et de dissipation en fonction du temps de la plaque entaillée

TABLE 2 – Résultats de la simulation numérique de la plaque entaillée

Taille de maille (mm)	2	1.5	1
1 ^{er} pic d'effort (N)	4684.32	5164.92	6198.21
2 ^e pic d'effort (N)	2787.179	3498.2	2874.872
Énergie élastique maximale (mmN)	2.0696	2.7039	1.9032
Temps au 1 ^{er} pic d'effort (s)	0.02	0.02	0.02
Temps au 2 ^e pic d'effort (s)	0.14	0.14	0.12

Références

- [1] E. Lorentz, V. Godard. *Gradient damage models : Toward full-scale computations*, computer methods in applied mechanics and engineering, Vol 200, 1927-1944, 2011.
- [2] G. Francfort, J-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, Journal of the mechanics and physics of solids, Vol 46, 1319-1342, 1998.
- [3] T. Li, J-J. Marigo, D. Guilbaudand, S. Potapov. *Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol 108, 1381-1405, 2016.
- [4] L. Ambrosio, V.M. Tortorelli. *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence*, Commun. Pure Appl. Math, Vol 43 (8), 999-1036, 1990.
- [5] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture*, Journal of the mechanics and physics of solids, Vol 48 (4), 797-826, 2000.
- [6] G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois. *Méthode des éléments finis*, édition Hermes, 614 pages, ISBN-13 :978-2746246669, 2015.
- [7] M.R. Ayatollahi, M.R.M. Aliha. *Analysis of a new specimen for mixed mode fracture tests on brittle materials*, Engineering Fracture Mechanics, Vol 76, 1563-1573, 2009.
- [8] R. Bai, H. Naceur, A. Laksimi. *Nonlinear transient analysis of shell composite structures under dynamic loading by PERIDYNAMICS*, Int. Workshop on Comp. Mech. of Materials IWCMM?2018, Glasgow, UK, September 10-12, 2018.
- [9] Y.S. Jenq, S.P. Shah. *Mixed-mode fracture of concrete*, International Journal of Fracture, Vol 38, 123-142, 1988.
- [10] X. Zhou, Y.Wang, X. Xu. *Numerical simulation of initiation, propagation and coalescence of cracks using the non-ordinary state-based peridynamics*, Int. J. Fract., Vol 201, 213-234, 2015.