

15ème Colloque National en Calcul des Structures

A. Nassor¹, S. Chaillat¹, M. Bonnet¹, B. Leblé², G. Barras³

¹ Laboratoire Poems (CNRS, ENSTA Paris, INRIA) - Institut Polytechnique de Paris, {alice.nassor,stephanie.chaillat,marc.bonnet}@ensta-paris.fr

² Naval Group Research (Bouguenais), {bruno.leble}@naval-group.com

³ DGA Techniques navales (Groupe Coque et structures), {guillaume.barras}@intradef.gouv.fr

Résumé — Une méthode itérative convergente pour le couplage FEM-BEM élastodynamique-acoustique global en temps, permettant de traiter un problème d'interaction fluide-structure est proposée. Les équations structures sont résolues en éléments finis (FEM), tandis que la partie fluide est traitée par éléments de frontière (BEM), formulée en temps discrets par Convolution Quadrature method (CQM). Le couplage présenté se base sur la formulation de conditions de transmission de Robin. La convergence est démontrée et illustrée. Un deuxième couplage itératif en temps à convergence garantie est proposé.

Mots clés — Couplage FEM-BEM, couplage itératif global-en-temps, interaction fluide-structure, explosion sous-marine, explosion lointaine, onde de choc.

1 Introduction

La modélisation du comportement des navires soumis à des explosions sous-marines lointaines est un enjeu majeur dans l'industrie de la construction navale. Des essais fournissent des données expérimentales pour l'étude du comportement des navires, mais en raison des coûts et des limitations techniques, il n'est pas toujours possible de mettre en œuvre des essais à l'échelle réelle. La modélisation numérique permet pallier ces lacunes.

Dans le cas d'une explosion sous-marine à distance, le fluide transmet des sollicitations intervenant à deux échelles de temps distinctes : quelques millisecondes après l'explosion une onde acoustique primaire à front raide (excitation rapide, fluide considéré comme acoustique linéaire) atteint le navire, puis cette perturbation est suivie par un second mouvement d'ensemble plus lent de fluide lourd, qui sollicite le navire à basses fréquences et sur un intervalle de temps plus long. Ces deux phénomènes peuvent être étudiés de façon décorrélée [7]. La thèse de Damien Mavaleix-Marchessoux [9] propose un modèle du phénomène d'interaction fluide-structure (IFS) ainsi qu'un outil numérique permettant de modéliser de façon rapide et réaliste le comportement du navire soumis à une telle sollicitation intervenant à deux échelles de temps distinctes. Dans ce travail, le domaine fluide infini est pris en compte au moyen d'une formulation intégrale, utilisant une méthode BEM (boundary element method). La réponse du fluide à l'échelle de temps rapide est formulée dans le domaine temporel en temps discret au moyen de la Convolution Quadrature Method (CQM) et le calcul est accéléré à l'aide de la méthode multipolaire rapide (FMM). Le navire est traité de manière conventionnelle, avec une méthode éléments finis (FEM). Le couplage itératif FEM/CQM-BEM alternant des résolutions CQM-BEM (fluide) et FEM (navire) sur tout l'intervalle de temps, s'est cependant avérée non-convergente. À titre palliatif, un couplage proposé dans [9] utilise le champ réfléchi par le navire immobile (obtenu par un calcul CQM-BEM) comme donnée d'un traitement du calcul IFS par couplage FEM-FEM (le fluide étant maillé seulement dans le voisinage de la structure).

En se basant sur cette première modélisation théorique et numérique proposée précédemment [9], le travail présenté ici se concentre sur la modélisation de l'interaction fluide-structure (IFS) générée par l'onde primaire uniquement, et vise à construire un algorithme itératif à convergence garantie pour le problème élastodynamique-acoustique global en temps. L'objectif est de remplacer le traitement FEM-FEM actuellement employé pour le calcul de la réponse à l'onde de choc rapide et qui nécessite un maillage volumique très fin, par un couplage FEM/CQM-BEM plus efficace.

La Section 2 présente la formulation du problème couplé ainsi La Section 3 présente un couplage itératif

global en temps basé sur la définition, dans chaque domaine, de problèmes d'évolution ayant des conditions limite de Robin. L'étude du caractère bien posé de ces problèmes d'évolution permet de mettre en évidence la conservation de la régularité de la solution sur l'interface par rapport à la régularité de la donnée. Cette conservation de régularité permet de montrer ensuite la convergence de la procédure itérative basée sur les résolutions successives de ces problèmes d'évolution de Robin dans chaque sous-domaine. Cette procédure est ensuite validée numériquement dans le cas de problèmes d'interaction fluide-structure 2D. La section 4 propose une deuxième procédure itérative globale en temps basée sur une décomposition de domaine différente et une interface acoustique-acoustique. Cette procédure, qui consiste à résoudre successivement des problèmes d'évolution de Robin dans chaque sous-domaine, est également à convergence garantie. L'objectif est ensuite de mettre en oeuvre cette procédure afin de comparer les taux de convergence des deux procédures.

2 Formulation du problème couplé

On considère un solide élastique borné Ω_s immergé dans un fluide acoustique (densité de masse ρ_f , vitesse d'onde acoustique c_f) occupant la région fluide non bornée $\Omega_f := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_s}$ (où d est la dimension spatiale). On note $\Gamma := \partial\Omega_f = \partial\Omega_s$ l'interface séparant les domaines solide et fluide, et par $\mathbf{n}$ la normale extérieure unitaire à Γ . Les variables fluides sont le potentiel de vitesse ϕ , la vitesse $\mathbf{v} = \nabla\phi$ et la pression $p = -\rho_f\partial_t\phi$. Les variables solides sont le déplacement $\mathbf{u}$ et le vecteur de contrainte $\mathbf{t} := \sigma[\mathbf{u}]\cdot\mathbf{n}$.

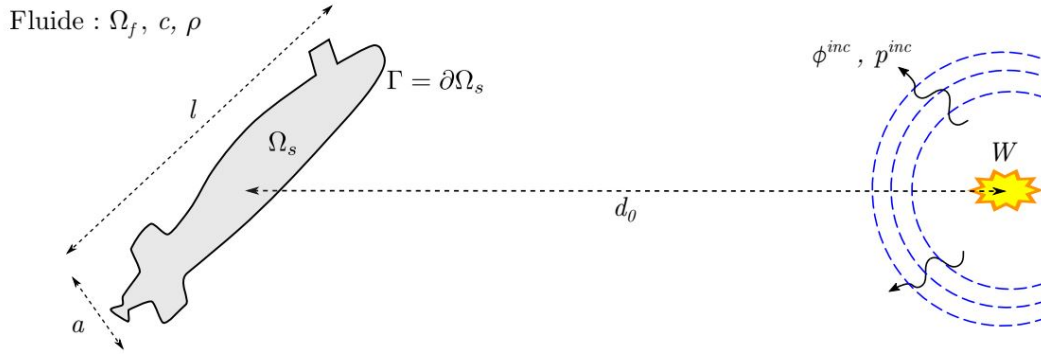


FIGURE 1 – Structure immergée soumise à une explosion sous-marine lointaine : notations [9]

On considère un champ potentiel linéaire de vitesse incidente ϕ^{inc} qui résout à tout moment l'équation des ondes homogènes. Aucune perturbation causée par la présence du solide élastique ne se produit avant l'instant initial, soit $\phi^{inc} = 0$ dans un voisinage de Ω_s pour tout $t < 0$. De plus, comme la perturbation provient initialement du domaine fluide, on décompose la variable fluide ϕ selon $\phi = \phi^{inc} + \phi^{sca}$. Le champ diffusé est le mouvement de fluide induit par la présence et la déformation du solide. Le problème d'interaction fluide-structure couplé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi^{sca}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c_f^2}\partial_{tt}\phi^{sca}(t, \mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \Omega_f \times [0, T], \quad (a) \\ -div\sigma[\mathbf{u}] + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega_s \times [0, T], \quad (b) \\ \mathbf{t} = \rho_f\partial_t\phi^{sca}\mathbf{n} + \rho_f\partial_t\phi^{inc}\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (c) \\ v^{sca} = \partial_t\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \partial_n v^{inc} & \text{on } \Gamma \times [0, T], \quad (d) \\ \phi(0, x) = \partial_t\phi(0, x) = 0 \text{ sur } \Omega_f, \quad \mathbf{u}(0, x) = \partial_t\mathbf{u}(0, x) = 0 \text{ sur } \Omega_s. \end{array} \right. \quad (1)$$

Il est constitué d'un problème de Helmholtz extérieur ((1)(a)) couplé à l'équation élastodynamique ((1)(b)) régissant l'équilibre d'un solide élastique via les conditions de transmission ((1)(c) - (1)(d)).

3 Couplages FEM/BEM itératifs en temps à convergence garantie

3.1 Couplage basé sur des conditions de transmission de Robin.

Un algorithme itératif est défini selon une approche décomposition de domaine : consiste à définir deux sous-domaines, et deux sous-problèmes, et à résoudre successivement ces deux sous-problèmes

sur tout l'intervalle de temps. La solution sur l'interface est ensuite transmise à l'autre sous-domaine via des conditions de transmission, et sert de donnée pour résoudre l'itération suivante dans l'autre sous-domaine. La convergence est atteinte lorsque les solutions sur l'interface de chaque sous-problème sont identiques. En décomposition de domaine, le choix des conditions de transmission entre les sous-domaines est crucial, et a une grande influence sur la convergence de l'algorithme. Dans un premier temps, nous étudions un algorithme itératif basé sur la résolution, dans chaque sous-domaine, de problèmes d'évolution avec des conditions limite de Neumann (procédure désignée NN). Ainsi, à une itération $i > 0$, sur l'interface $\Gamma \times [0, T]$, les conditions de transmission de Neumann entre les domaines fluide et solide s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{i+1} = h\mathbf{n} + \rho_f \partial_t \phi^i \mathbf{n} \\ \partial_n \phi^{i+1} = \partial_t \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n} \end{cases}$$

Nous observons numériquement, qu'une telle procédure ne permet pas de converger vers la solution du problème couplé (1) [9]. Pour comprendre ce manque de convergence, nous étudions le caractère bien posé du problème couplé, et des problèmes d'évolution définis dans chaque sous-domaine. Il existe peu de travaux montrant l'existence et l'unicité de la solution pour des problèmes couplés fluide-structure en temps, ces études étant classiquement conduites dans le domaine fréquentiel [2]. On cite en particulier un article [1] qui montre le caractère bien posé d'un tel problème en temps. Cependant, les auteurs en 2D uniquement, et en se basant sur la troncature du domaine fluide. Ces résultats peuvent donc être approfondis et notamment étendus à des problèmes de plus grande dimension.

On étudie tout d'abord les problèmes d'évolution définis dans chaque sous-domaine et résolus à chaque itération par l'un des deux solveurs FEM ou CQM-BEM. Le problème de Neumann défini dans le domaine fluide s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta \phi^i(t) + \frac{1}{c_f^2} \partial_{tt} \phi^i(t) = 0 & \text{sur } \Omega_f \\ \partial_n \phi^i(t) = \partial_t \mathbf{u}^{i-1}(t) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \\ \phi^i(0) = \partial_t \phi^i(0) = 0 \end{cases}$$

On montre donc tout d'abord le caractère bien posé des problèmes d'évolution admettant des conditions de transmission de Neumann non homogènes sur l'interface, en considérant leurs formulations faibles. La preuve suit une démarche similaire à celle détaillée par [5]. Cette étude permet de mettre en évidence que les problèmes de Neumann transitoires admettent des solutions de régularité significativement plus faible que les solutions des problèmes elliptiques classiques de Neumann, pour une même donnée en espace. En effet, s'il est connu qu'un problème elliptique de Neumann admet une solution en vitesse sur la surface de même régularité que la donnée, on montre au contraire qu'un problème de Neumann transitoire a une solution en vitesse définie sur la surface, de régularité plus faible que la donnée. Ce résultat de régularité est particulièrement important dans notre cas, car on souhaite construire une procédure itérative, nécessitant à chaque itération de résoudre un problème de Neumann transitoire en prenant pour donnée, la solution en vitesse du problème précédent. La régularité des données se détériorant au fur et à mesure des itérations, il semble difficile de construire une procédure itérative convergente basée sur la résolution récursive de problèmes couplés de Neumann.

Pour définir une procédure itérative alternative, on s'intéresse alors à d'autres conditions de transmission (CT). Comme rapporté dans la littérature liée aux méthodes de décompositions de domaine (DDM), le choix du type de CT à travers les interfaces entre sous-domaines a un impact significatif sur la convergence de ces méthodes. L'utilisation de CT de Robin est une stratégie classique des méthodes de décomposition de domaine. Il est établi que ces conditions améliorent la convergence des algorithmes itératifs et permettent d'optimiser le taux de convergence en modifiant le "paramètre de convergence" associé ([6],[3]). On formule donc de nouveaux sous-problèmes d'évolution définis dans chaque sous-domaine et on en conduit l'étude théorique pour montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une part, puis la convergence des itérations d'autre part. La procédure itérative désignée Robin-Robin (RR), consiste à résoudre successivement des problèmes globaux en temps dans chaque sous-domaine, en utilisant des conditions de limite de Robin de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{i+1} + k \partial_t \mathbf{u}^{i+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}^i \\ -\rho_f \partial_t \phi^{i+1} + k \partial_n \phi^{i+1} = g^i \end{cases}$$

où $\mathbf{g}^i$ et g^i sont des combinaisons linéaires ne dépendant que des variables d'interface de l'itération i [9]. Le problème d'évolution avec condition limite de Robin défini dans le domaine fluide et résolu par le

solveur CQM-BEM à chaque itération $i > 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\phi^i(t) + \frac{1}{c_f^2} \partial_{tt} \phi^i(t) = 0 & \text{sur } \Omega_f \\ -\rho_f \partial_t \phi^{i+1}(t) + k \partial_n \phi^{i+1}(t) = g^i(t) & \text{sur } \Gamma \\ \phi^i(0) = \partial_t \phi^i(0) = 0 \end{cases}$$

Le caractère bien posé de ce problème est démontré en considérant sa formulation faible et en suivant une démarche similaire à celle précédemment employée pour le problème de Neumann. De plus, on montre que, contrairement au problème transitoire NN précédent, le problème transitoire Robin-Robin permet de conserver la régularité de la solution par rapport à la donnée. En effet, ce problème admet pour solution une trace de la vitesse définie sur la surface, qui est dans le même espace que la donnée. Ainsi, une procédure itérative consistant à résoudre successivement des problèmes RR transitoires couplés prenant pour donnée la trace de la vitesse solution du problème précédent, permet de conserver la régularité des variables sur l'interface.

On peut ensuite montrer que cet algorithme RR est à convergence garantie, quelque soit la valeur du paramètre de couplage choisie, en suivant une procédure similaire à celle décrite dans [4], pour un problème défini dans le domaine fréquentiel.

On définit ensuite une version "relaxée" des conditions de Robin. Dans le cas d'itérations de Robin fréquentielles, il est montré dans [4] que l'introduction d'une relaxation permet une convergence géométrique des itérations. En introduisant un "paramètre de relaxation" ($r \in]0, 1[$), les conditions relaxées dans le domaine temporel sont les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^{i+1} = \mathbf{t}^{i+1} + k \partial_t \mathbf{u}^{i+1} \cdot \mathbf{n} = [1 - r] \alpha^i + r \mathbf{g}^i \\ \beta^{i+1} = p^{i+1} + k v^{i+1} = [1 - r] \beta^i + r g^i \end{cases}$$

En plus de la relaxation introduite, l'accélération d'itérations vectorielles de point fixe basées sur le processus d'Aitken proposée dans [8], peut être appliquée à l'algorithme itératif Robin-Robin. On définit alors de nouvelles conditions de transmissions, en introduisant à chaque itération $i > 1$, un facteur t^* défini à partir des deux itérations précédentes :

$$\text{Soit : } \Delta_i = \begin{Bmatrix} g^i \\ \mathbf{g}^i \end{Bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\text{on définit le facteur : } t^* = \frac{(\Delta^i, \Delta^i - \Delta^{i-1})}{\|\Delta^i - \Delta^{i-1}\|_2^2}$$

et les itérations accélérées font donc intervenir, pour $i > 1$, les conditions de transmission suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{i+1} + k \partial_t \mathbf{u}^{i+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}^i + t^* (\mathbf{g}^{i-1} - \mathbf{g}^i) \\ p^{i+1} + k v^{i+1} = g^i + t^* (g^{i-1} - g^i) \end{cases}$$

La convergence de la procédure itérative FEM/CQM-BEM de Robin est vérifiée par la résolution numérique de problèmes d'interaction fluide-structure 2D. Par exemple on considère comme représenté sur la Figure 2 (a), un anneau élastique pressurisé et immergé dans un fluide, problème pour lequel une solution de référence à symétrie radiale est disponible. La Figure 2(b) illustre la pression rayonnée induite sur la surface extérieure, calculée au moyen d'un couplage FEM/CQM-BEM et comparée à une solution analytique. Dans un second temps, on considère un autre cas test 2D, représenté sur la Figure 3 (a) pour laquelle aucune solution analytique n'est disponible. La convergence de l'algorithme de couplage FEM-BEM est donc validée lorsque les conditions de transmissions du problème couplé sont vérifiées, et la vitesse de convergence est observée avec la convergence des résidus de transmission. La Figure 4 représente la convergence des résidus de transmission sans accélération, avec l'emploi d'une méthode de relaxation et avec une accélération de point fixe dite "delta-2 d'Aitken". Elle illustre en particulier la nette amélioration du taux de convergence permise par l'accélération Aitken. On soulignera que relaxation ne permet ni d'accélérer systématiquement la vitesse de convergence, ni d'observer une convergence géométrique des itérations, ce qui contraste avec les résultats théoriques de [4] dans un cadre fréquentiel. On justifiera ces observations avec des arguments théoriques.

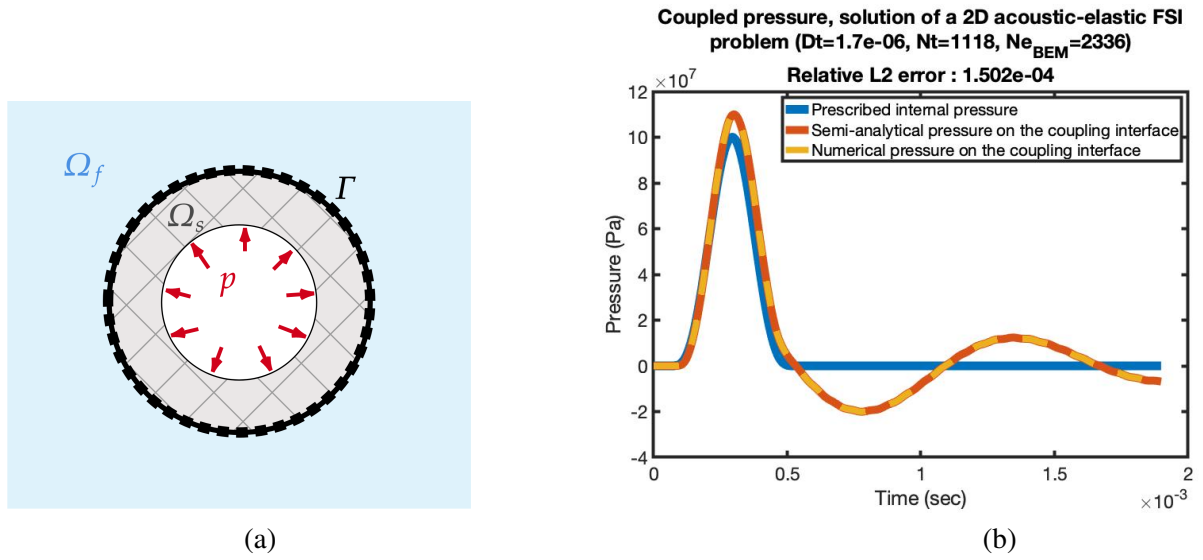


FIGURE 2 – (a) Problème couplé élastique-acoustique 2D à symétrie radiale ; (b) Pression rayonnée par un obstacle circulaire élastique 2D, calculée numériquement avec une procédure itérative FEM-BEM et comparée à une solution semie-analytique.

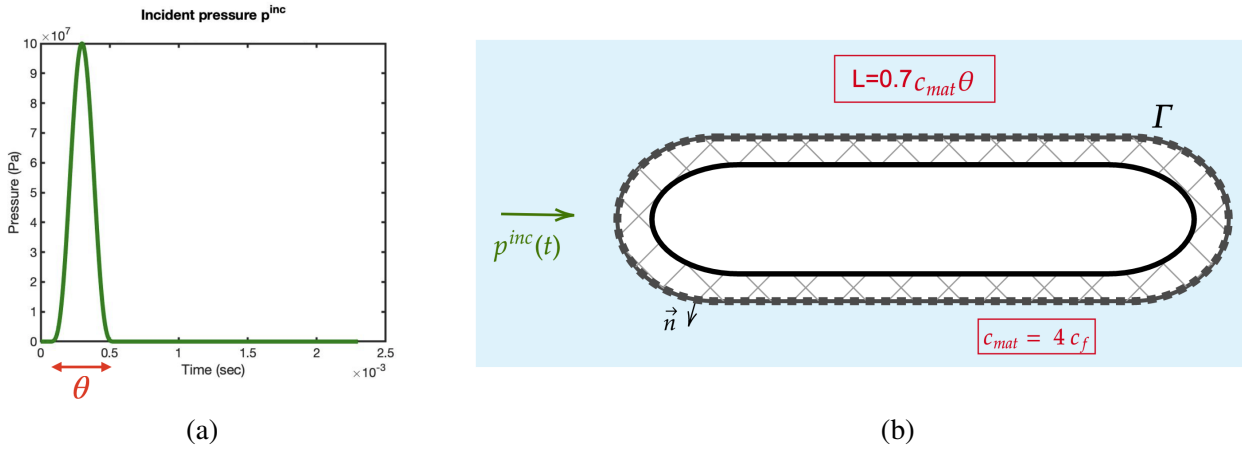


FIGURE 3 – (a) Onde de pression acoustique incidente imposée sur la paroi extérieure d'un cylindre 2D ; (b) Problème couplé élastique-acoustique 2D.

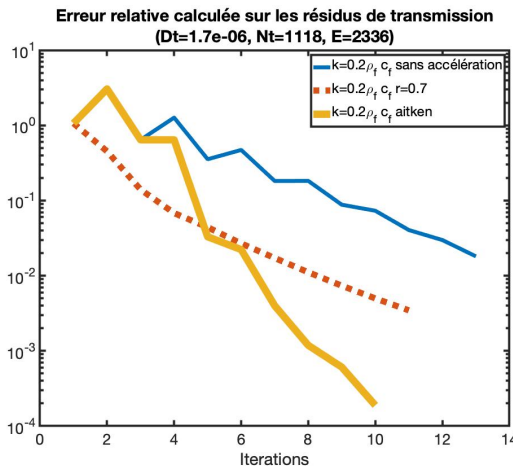


FIGURE 4 – Convergence de l'erreur relative calculée sur les résidus de transmission en fonction du nombre d'itérations, pour l'algorithme FEM-BEM de Robin avec un paramètre de couplage $k=0.2\rho_f c_f$, sans accélération, avec relaxation ($r=0.7$) et avec accélération d'Aitken.

Cette procédure peut être considérée comme optimale, dans le sens où sa convergence est garantie et sa vitesse de convergence contrôlée. Cependant, comme les besoins industriels impliquent l'utilisation d'un solveur FEM spécifique qui n'inclut pas de conditions de transmission de type impédance, cette procédure pourrait être difficile à mettre en pratique et l'étude de stratégies de couplage alternatives est nécessaire.

3.2 Couplage acoustique-acoustique basé sur des conditions de transmission de Robin.

Pour définir une procédure de couplage ne faisant pas intervenir de conditions de transmission de Robin dans le milieu solide, nous considérons la possibilité de décomposer différemment les domaines. On définit un domaine composé de la partie solide et d'une région de fluide environnante, qui sera traitée par le solveur FEM, et la partie fluide non bornée restante est traitée par le solveur BEM, comme représenté sur le schéma 5. Ainsi, on effectue un couplage acoustique/acoustique avec des conditions de transmission de Robin associée à deux milieux fluides de la forme :

$$\begin{cases} \rho_f \partial_t \phi_{\text{ext}}^{i+1} = \rho_f \partial_t \phi_{\text{int}}^i - \rho_f \partial_t \phi_{\text{ext}}^{\text{inc}} \\ \partial_n \phi_{\text{ext}}^{i+1} = \partial_n \phi_{\text{int}}^i - \partial_n \phi_{\text{ext}}^{\text{inc}} \end{cases} \quad (2)$$

L'étude théorique de ce couplage permet de montrer le caractère bien posé des problèmes d'évolution de

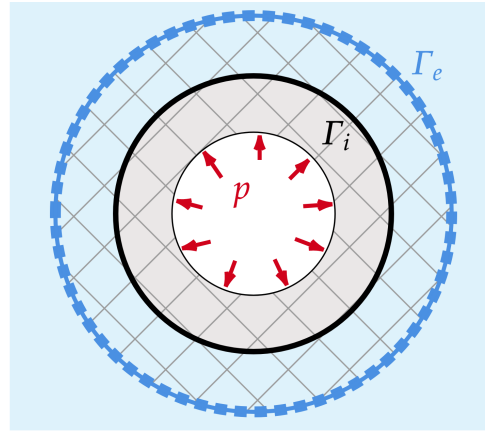


FIGURE 5 – Décomposition du domaine pour un couplage FEM-BEM acoustique/acoustique-élastique : notations.

Robin définis dans chaque sous-domaine, ainsi que, de la même façon que précédemment, la convergence garantie des itérations de Robin sur tout l'intervalle de temps, quelle que soit la valeur du paramètre de couplage k choisie. Par ailleurs, ce deuxième couplage présente deux avantages :

- D'une part, des conditions limites de type impédance peuvent être disponibles pour un domaine fluide dans un logiciel industriellement utilisable (notamment Code Aster), ce qui permet d'envisager la construction d'un outil efficace.
- D'autre part, traiter une partie du domaine du fluide proche de l'interface par une méthode éléments finis permet d'introduire des non linéarités dans cette partie, ce qui permettra notamment d'introduire la modélisation d'un phénomène de cavitation. Ce phénomène non linéaire ne peut en effet pas être pris en compte par éléments de frontière car la formulation intégrale fait intervenir la solution fondamentale de l'équation des ondes qui n'est définie que pour un problème acoustique linéaire.

La mise en oeuvre de cette procédure est actuellement en cours d'élaboration, ce qui permettra prochainement d'en comparer le taux de convergence par rapport au premier couplage élastique-acoustique détaillé précédemment.

4 Conclusion et perspectives.

Dans cette contribution, deux algorithmes de couplage FEM/CQM-BEM itératifs et globaux en temps permettant de résoudre des problèmes couplés d'interaction fluide-structure ont été définis. Après avoir

montré l'existence et l'unicité des solutions des différents problèmes d'évolution intervenant dans les différents sous-domaines, on a mis en évidence la conservation de régularité des solutions définies sur l'interface lors de la résolution de problèmes d'évolution de Robin. Cette constatation a permis de montrer ensuite la convergence des procédures itératives basées sur les résolutions successives de problèmes d'évolution de Robin dans chaque sous-domaine. Des expériences numériques permettent enfin de comparer les vitesses de convergence. Ce travail met en évidence la supériorité de l'algorithme couplé basé sur les itérations de Robin relaxées, en termes de vitesse de convergence. Cependant, pour des raisons industrielles, utiliser un solveur FEM pour le domaine solide, en imposant des conditions limites de Robin non-homogènes pourrait être impossible. A l'inverse, certains solveurs FEM industriellement utilisables pourraient permettre d'imposer des conditions limites de Robin non-homogènes à un domaine fluide. Le couplage acoustique-acoustique, dont la convergence est également garantie, serait alors la solution préférable, pour l'application industrielle visée. La prochaine étape, en cours d'élaboration, est la validation de ces deux procédures sur des géométries 3D réalistes.

Références

- [1] G. Bao, Y. Gao, P. Li. *Time-Domain Analysis of an Acoustic–Elastic Interaction Problem*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer, 835-884, 2018.
- [2] H. Barucq, R. Djellouli, E. Estecahandy. *On the existence and the uniqueness of the solution of a fluid-structure interaction scattering problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, 571–588, 2014.
- [3] T. Chan, T. Mathew *Domain decomposition algorithms*, Acta Numerica, Cambridge University Press, 61-143, 1994.
- [4] F. Collino P. Joly, M. Lecouvez *Exponentially convergent non overlapping domain decomposition methods for the Helmholtz equation*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis (54), 775–810, 2020.
- [5] R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for science and technology*, Springer, 1999.
- [6] V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf. *An Introduction to Domain Decomposition Methods : algorithms, theory and parallel implementation*. Master. France. 2015. cel-01100932v4
- [7] T. L. Geers, K. S. Hunter *An integrated wave-effects model for an underwater explosion bubble*. The Journal of the Acoustical Society of America 111(4), 1584-601, 2002.
- [8] B. M. Irons, R. C. Tuck *A version of the Aitken accelerator for computer iteration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.1, 275-277, 1969.
- [9] D. Mavaleix-Marchessoux. "Modelling the fluid-structure coupling caused by a far-field underwater explosion". PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, 2020