

Accélération de convergence de la méthode asymptotique numérique : application à l'analyse non linéaire de systèmes film/substrat avec FreeFem++

P. Ventura¹, M. Potier-Ferry², et H. Zahrouni¹

^{1 1} LEM3, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, 57045 Metz, France, {pascal.ventura,michel.potier-ferry,hamid.zahrouni}@univ-lorraine.fr

Résumé — La simulation numérique de certains problèmes non linéaires, réputés difficiles, nécessite de nombreux pas de calcul et un grand nombre de degrés de liberté. Citons par exemple l'étude des plissements dans les systèmes film-substrat par la méthode des éléments finis. La méthode asymptotique numérique (MAN) souvent utilisée pour résoudre ce type de problème, présente une lente perte de précision lors de l'enchaînement des pas de calculs. Des corrections nécessaires sont ici mises en oeuvre. En outre, nous présentons une méthode d'accélération de convergence et une technique d'adaptation de la longueur de pas pour minimiser le temps de calcul. L'algorithme MAN ainsi amélioré a été appliqué à l'étude 3D des plissements dans les systèmes film-substrat par la méthode des éléments finis.

Mots clés — Méthode Asymptotique Numérique, Accélération de Convergence, Algorithme de Cheminement, Plissement, Systèmes film-substrat.

1 Introduction

La méthode asymptotique numérique est une technique qui permet la résolution des systèmes non linéaires dépendant d'un paramètre scalaire [1]. Elle permet de décrire les branches solutions comme une succession de pas. Chaque pas est représenté par la série de Taylor tronquée de vecteurs $a \in \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{U}(a, N) = \sum_{n=0}^N a^n \mathbf{U}_n$. Elle a été établie il y a trente ans [2], après plusieurs travaux pionniers associés aux séries de Taylor et la discrétisation par la méthode des éléments finis [4][5][6]. Elle a été utilisée dans de nombreux domaines, comme celui de l'élasticité non linéaire [7], et des vibrations non linéaires[8].

La version de base de la MAN, introduite en 1994, associe au calcul des séries de Taylor, un paramètre utilisateur, lié à leur domaine de validité, qui permet de choisir entre une stratégie à large pas et une stratégie à pas plus petits, permettant une plus grande précision [7] [9] [10]. Cette version de base, avec une stratégie à grande précision, fonctionne très bien pour les 10 à 20 premiers pas. Cependant, on observe une lente dégradation de l'erreur résiduelle au cours de l'enchaînement des pas, nécessitant le recours à une stratégie améliorée (se reporter à la figure 1).

La façon la plus naturelle de contrôler la précision des courbes de continuation est d'introduire des phases de correction de Newton à la fin des pas quand cela est nécessaire. Cependant cette technique augmente de façon importante le temps de calcul.

Une amélioration naturelle des séries de Taylor a été obtenue par les approximants de Padé [15]. Cependant, il faut rester prudent en utilisant ce type d'approximation du fait de la présence de pôles dans l'approximation en fraction rationnelle [15] [16]. Un besoin existe donc pour une procédure d'accélération plus sûre et plus sécurisée.

Il existe de nombreuses méthodes d'accélération de convergence [18]. Les méthodes les plus intéressantes appartiennent à la classe des méthodes d'extrapolation [19], qui permettent d'accélérer des suites de vecteurs $\mathbf{V}_n$. Citons par exemple la méthode appelée Minimal Modified Polynomial Extrapolation (MMPE) [12]. Ici l'accélération de convergence MMPE est appliquée à la fin de la phase de prédiction dans le but de limiter le nombre de corrections coûteuses en temps de calcul.

Dans ce papier, à la section 2 nous avons essayé de mettre au point des procédures fiables qui permettent d'enchaîner plusieurs pas tout en conservant une grande précision dans le suivi de la courbe. Ces procédures combinent la MAN, les itérations classiques de Newton-Riks [20], et la méthode d'accélération MMPE.

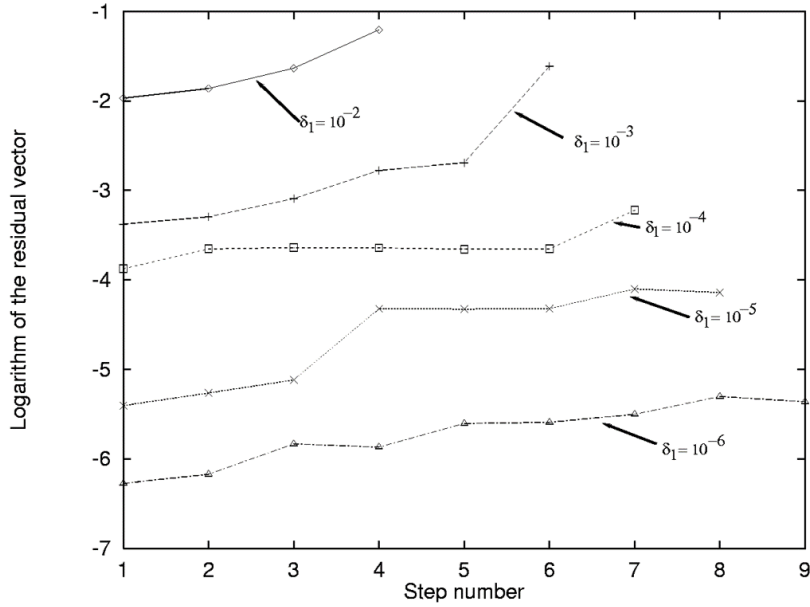


FIGURE 1 – Lente dégradation de la précision au cours de l’enchaînement des pas MAN. Le paramètre δ_1 permet le contrôle de la précision de la solution numérique. Ce paramètre $\delta_1 = \delta$ est utilisé dans l’équation (1). Se reporter à [11].

La section 2 est consacré à la description des procédures numériques. Des résultats numériques sont présentés au chapitre 3, et s’intéressent aux plissements dans les systèmes film-substrat, conduisant à des problèmes de grandes dimensions.

A noter que l’ensemble de ce travail a été publié précédemment en détail [3].

2 Techniques de continuation

Nous allons présenter une classe de procédures numériques qui permettent le calcul des courbes de réponses fortement non linéaires d’équations aux dérivées partielles (EDPs) dans le cadre de la MAN. Le point clé est le contrôle de la qualité de la solution à chaque pas en combinant la MAN, l’accélération de convergence MMPE, et les itérations de correction de Newton-Riks.

2.1 Le cadre général

Dans ce papier, la MAN sera appliquée à des problèmes d’élasticité non linéaire, principalement pour des matériaux de Saint Venant-Kirchhoff. La procédure qui permet le calcul des vecteurs $\mathbf{U}_n$ à chaque ordre n de la série est expliqué dans de nombreuses publications, par exemple, [1][2][4][5][6][7]. Nous utilisons ici le paramètre de longueur d’arc linéarisée. Nous allons présenter, dans ce qui suit, un algorithme MAN simple et efficace qui permet un contrôle de la précision en incluant les avantages des techniques d’accélération de convergence.

Un des aspects critiques de la MAN est la définition du point de fin de pas $a_{\max}$ de chaque série de Taylor $\mathbf{U}(a, N)$ tronquée à l’ordre N .

$$a_{\max} = \left\{ \delta \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_N\|} \right\}^{1/(N-1)}. \quad (1)$$

Le critère de fin de pas $a_{\max}$ (1) dépend du paramètre utilisateur δ en suivant la stratégie : si ce paramètre est assez grand ($10^{-6} \leq \delta \leq 10^{-3}$), on obtient des pas assez grand au détriment de la précision, tandis que s’il est petit ($10^{-10} \leq \delta \leq 10^{-6}$), on obtient un meilleur contrôle de la précision, tout en augmentant le nombre de pas. A noter qu’un autre critère basé sur le résidu a été proposé dans [1].

Dans ce papier, nous proposons une méthode alternative qui permet d’enchaîner de nombreux pas tout en limitant le nombre d’itérations de correction de Newton-Riks, qui permettent un très bon contrôle

1. Calcul des séries de Taylor $U(a)$;
2. Calcul du paramètre de validité a_{max} des séries par la formule (1) et calcul du résidu ;
3. Appliquer l'accélération de convergence (MMPE, comme décrit dans la section 2.2) à la séquence $V_n = U(a_{max}, n)$;
4. Calcul du vecteur résidu après l'accélération de convergence et choix de la meilleure solution (avant et après MMPE) ;
5. Si la norme du meilleur vecteur résiduel est plus faible que ϵ_1 , passer au pas suivant avec $U(a_{max})$ comme point initial ;
6. Sinon, appliquer le correcteur de Newton jusqu'à ce que la norme du vecteur résiduel devienne plus petite que ϵ_2 . Après convergence, passer au pas suivant.

FIGURE 2 – Une première version de l'algorithme de continuation avec accélération de convergence au point final du pas et des corrections de Newton quand cela est nécessaire. Une version améliorée est décrite dans la section 2.3.

de la précision. Ceci est réalisé en mettant en oeuvre une accélération de convergence de la suite de vecteurs $V_n = U(a, n)$ où le paramètre de chemin a est proche du paramètre a_{max} de fin de pas.

Le nouvel algorithme est décrit à la figure 2. L'algorithme de base de la MAN est complété à la fois par les corrections de Newton-Riks et par une phase d'accélération de convergence à la fin de chaque pas de prédiction. Le but est un très bon contrôle de la précision au début de chaque pas. Suivant ce nouvel algorithme, le résidu ne sera jamais plus grand que ϵ_1 , paramètre utilisateur de l'ordre de $\epsilon_1 = 10^{-3}$ ou $\epsilon_1 = 10^{-5}$. Les itérations de correction de Newton-Riks sont mises en oeuvre dès que le résidu est plus grand que ϵ_1 , et les itérations se poursuivent tant que le résidu est supérieur à ϵ_2 , avec ϵ_2 plus petit que ϵ_1 , typiquement $\epsilon_2 = \epsilon_1/10$

2.2 L'accélération de convergence dite MMPE

Nous allons présenter les grandes lignes de la technique d'accélération de convergence connue sous le nom "Modified Minimal Polynomial Extrapolation" (MMPE). Cette technique a été présentée dans le papier de Jbilou et Sadok [12]. Il est aussi fructueux de se reporter à [13] [14].

Considérons la suite de vecteurs S_N qui s'écrit sous la forme $S_N = \sum_{n=0}^N V_n$ où $V_0 = S_0$ et $V_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. L'algorithme MMPE introduit une série modifiée :

$$T_N = S_0 + \sum_{n=1}^N c_n V_n \quad (2)$$

et avec un décalage d'indice,

$$\tilde{T}_N = S_1 + \sum_{n=1}^N c_n V_{n+1}. \quad (3)$$

Les coefficients correcteurs sont regroupés dans un vecteur $\{c\} = {}^t \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, celui-ci est solution d'un système linéaire de la forme :

$$[M] \{c\} = \{b\}. \quad (4)$$

Pour expliquer l'origine du système linéaire (4), il est possible d'introduire une famille de N vecteurs indépendants $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$. Avec $Y_n = V_n^*$, où les vecteurs V_n^* sont construits par orthogonalisation de la famille de vecteurs V_n . Comme cela a été établi [13], la méthode MMPE peut être moins efficace si l'on dépasse un certain nombre de vecteurs, la limite étant 8 – 10 – 15 selon les cas étudiés. Dans [12], le système linéaire (4) est obtenu en annulant la projection du résidu $(\tilde{T}_N - T_N)$ sur le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs Y_n et ceci conduit à l'expression de la matrice $[M]$ et du second membre $\{b\}$:

$$M_{ij} = (V_{j+1} - V_j) \cdot Y_i \quad b_i = -V_1 \cdot Y_i. \quad (5)$$

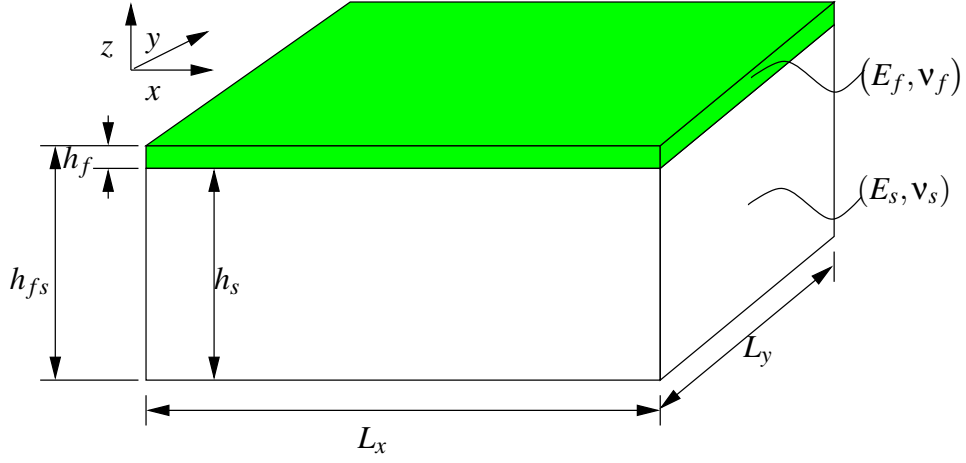


FIGURE 3 – Geometrie et données matériau du système film-substrat

2.3 Technique du pas adaptatif

Pour obtenir plus de flexibilité sur le suivi de la courbe, l'idée est de modifier l'algorithme décrit en figure 2 en appliquant la correction d'accélération MMPE à une famille de points $\mathbf{U}(a)$ avec $a = ra_{max}$, les ratios possibles étant, a priori, choisis de la façon suivante :

$$r \in [0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3]. \quad (6)$$

Ainsi, en considérant la liste (6) des ratios admissibles r , on obtient sept points sur la courbe de la MAN $\mathbf{U}(ra_{max})$ et aussi sept autres obtenus en appliquant l'accélération de convergence à ces sept précédents points, ce qui conduit à 14 solutions test, parmi lesquelles on va sélectionner la plus intéressante pour initier le pas suivant. Comme dans la figure 2, deux paramètres ϵ_1 et ϵ_2 sont choisis pour calculer le résidu, soient $\epsilon_1 = 10^{-5}$ et $\epsilon_2 = 10^{-6}$. Tout d'abord, on conserve le plus grand pas (i.e. r maximale) de telles sortes que le residu soit plus petit que ϵ_2 . Si cela n'est pas possible, mais si le plus petit résidu est dans l'intervalle $[\epsilon_2, \epsilon_1]$, ce plus petit résidu est retenu. Dans les deux cas, on passe au pas suivant sans correction de Newton-Riks. Enfin, si les 14 residus sont plus grands que ϵ_1 , des itérations de Newton-Riks sont réalisées à partir de la solution la plus précise jusqu'à ce que le résidu devienne plus petit que ϵ_2 .

3 Applications aux systèmes film/substrat

3.1 Le problème film/substrat

La modélisation de l'élasticité des systèmes film/substrat est à l'origine de problèmes de calcul menant à la simulation numérique avec un grand nombre de degrés de liberté, et à des courbes de réponses complexes. Un aperçu est présenté dans la référence [21].

Dans ce papier, le film et le substrat sont discrétisés en éléments finis volumiques (tétraèdre avec une interpolation P2) grâce au logiciel open source FreeFEM++ [17], cet outil de développement permettant d'accéder au calcul parallèle haute performance avec en particulier l'utilisation du solver direct multi frontal MUMPS. Cette modélisation permet un large choix en terme de rapport de module d'Young E_f/E_s , de géométrie et de conditions aux limites. La contre partie est un très grand nombre de degrés de liberté, la taille des éléments près du film étant liée à l'épaisseur du film h_f . Quoiqu'il en soit, le but ici est d'exécuter l'algorithme présenté dans le cas d'un grand nombre de pas de continuation et de problèmes numériques à grand nombre de degrés de liberté.

La géométrie du problème considéré est représentée à la figure 3.

Dans le film, le matériau obéit à une loi élastique dite de Saint Venant-Kirchhoff, c'est-à-dire une relation linéaire entre le tenseur des déformations de Green-Lagrange et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, tandis que le substrat est supposé être élastique avec une hypothèse de petites déformations. Les données numériques sont les suivantes : $L_x = 1.5mm$, $L_y = 1.5mm$, $h_f = 10^{-3}mm$,

$h_{sf} = h_s + h_f = 0.1\text{mm}$, $E_f = 1.3 \times 10^5\text{MPa}$, $E_s = 1.8\text{MPa}$, $\nu_f = 0.3$, $\nu_s = 0.48$, qui caractérise un film très fin ($L_x/h_f = 1500$) et très rigide ($E_f/E_s = 72222$).

Ces données sont les mêmes que dans [24], ainsi que les conditions aux limites : un quart du domaine est simulé, avec la prise en compte des conditions de symétrie, le déplacement vertical est bloqué ($u_z = 0$) sur la face inférieure, une force compressive est appliquée sur la face du film $x = 0$, $x = L_x$, où les autres composantes sont bloquées ($u_y = u_z = 0$). Cette force uniaxiale d'amplitude proportionnelle à λ correspond à une contrainte classique de membrane et est mesurée en N/mm. Le domaine est discrétisé en tétraèdres avec une interpolation P2, il nécessite environ cent éléments d'arête suivant la longueur et la largeur, cinq éléments d'arête suivant l'épaisseur du substrat et un pour le film, ce qui conduit à 1.575 millions de degrés de liberté. Le programme a été exécuté en parallèle (MPI) sur quatre processeurs, 55 Go de mémoire sont nécessaires. Le temps de calcul est d'environ 50 minutes pour un pas de calcul MAN et environ 32 minutes pour une itération de Newton-Riks. Le coût relativement élevé des itérations de Newton-Riks (64% de la série MAN avec 15 termes) se comprend aisément dans le sens où le coût de la factorisation de la matrice est prépondérant devant le coût du calcul des séries, ce qui est commun dans les très grands problèmes avec la MAN [22][23].

3.2 Calculs avec correction

Plusieurs calculs ont été effectués, en faisant varier le paramètre de précision δ de la MAN, cf (1). Les stratégies de correction ont été très robustes : le résidu reste toujours inférieur à $\epsilon_1 = 10^{-5}$, et le nombre d'itérations de correction étant de un, rarement deux. Cette efficacité est due à la convergence quadratique du correcteur et à la très bonne précision des points de départ des phases de correction.

Le nombre total de corrections de Newton-Riks en fonction du paramètre δ est présenté dans le tableau 1. Ce nombre est plutôt grand, le meilleur résultat étant dans l'intervalle 74-81, ce qui correspond à trois corrections pour quatre pas de MAN. Il y a ainsi beaucoup de corrections au regard de l'espoir d'avoir seulement de rares corrections, mais c'est le prix à payer pour obtenir une très bonne précision des calculs pour cet exemple difficile.

La courbe de réponse calculée est tracée dans la figure 4 en fonction de δ et suivant la procédure choisie. Bien entendu, la taille de pas de prédiction est plus grande quand δ augmente et plus petite quand la technique adaptative de la section 2.3 est utilisée, mais les effets de ces changements de pas demeurent mineurs.

En fait, nous observons deux comportements différents de l'algorithme. Durant les 20 premiers pas, aucune corrections n'est nécessaire, la méthode d'accélération de convergence améliore la précision et souvent augmente la taille du pas (i.e. $r > 1$). Après le vingtième pas, une correction est nécessaire pour presque tous les pas et l'accélération de convergence devient moins efficace. Une étude plus complète de l'accélération de convergence montre un comportement commun après le vingtième pas, un exemple caractéristique est détaillé dans le tableau 2. La précision avant MMPE est plutôt bonne pour les premiers ratios ($r = 0.7, 0.8$) avec un résidu de l'ordre de 10^{-3} , mais l'accélération de convergence n'améliore pas ces solutions. Pour $r \geq 0.9$, la précision initiale diminue pour les plus grands ratios (le résidu est de l'ordre de 10^{-1}), mais l'accélération de convergence permet de revenir à une précision de l'ordre de 10^{-3} .

En bref, l'introduction des phases de correction permet de construire une procédure sûre. Le coût de calcul augmente de 48%, par rapport au calcul sans correction, mais ce dernier conduit à des résultats erronés.

3.3 Commentaires sur la physique des système film/substrat soumis à une compression axiale

Décrivons maintenant l'évolution des figures de plissements associées aux courbes de réponse précédemment obtenues. Xu et al [24] ont simulé le même problème avec des éléments finis coques pour le film mais seulement jusqu'à $u_z/h_f = 9$. Dans ce papier, une courbe de solution de référence a été obtenue pour 281 pas MAN avec l'algorithme complet avec $\delta = 10^{-6}$: accélération de convergence, pas adaptatifs et corrections de Newton-Riks, permettant d'assurer une grande précision avec un résidu inférieur à 10^{-5} à chaque pas.

Plusieurs virages sont observés sur cette courbe le premier étant localisé à $u_z/h_f = 40$, $\lambda \simeq 2\lambda_{bif}$.

TABLE 1 – Nombre de corrections de Newton-Riks pour 100 pas, en fonction du paramètre de précision δ . L'algorithme complet inclut l'accélération de convergence, la longueur de pas adaptative et les corrections de Newton-Riks. La précision demandée $\varepsilon_1 = 10^{-5}$. La première ligne montre les résultats avec la MAN suivie des corrections de Newton-Riks si nécessaire.

δ	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}
Pure Newton	152	92	74
Full algorithm	81	79	74

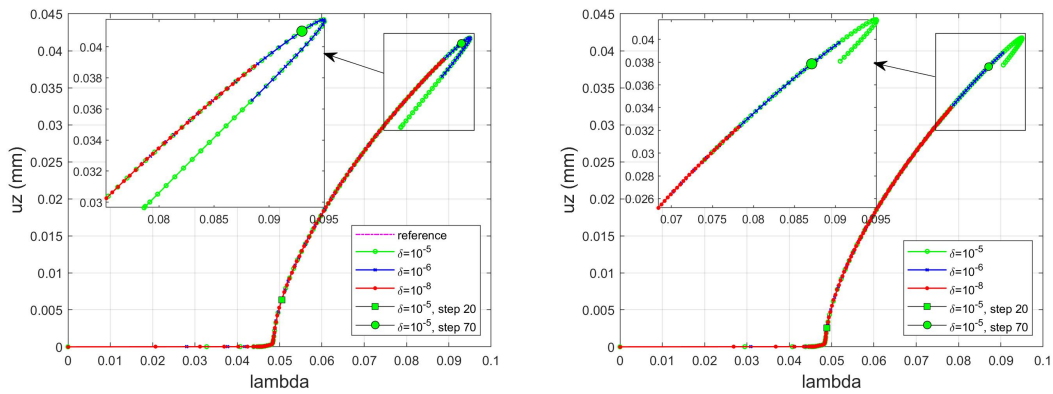


FIGURE 4 – Courbe de réponse charge-déplacement obtenue pour 100 pas avec correction pour plusieurs valeurs du paramètre de précision δ . Le déplacement u_z est choisi au centre du film.

TABLE 2 – Accélération de convergence par la méthode MMPE : un exemple typique. Le tableau présente les valeurs du résidu avant et après l'application de la MMPE. On considère sept points de départ $\mathbf{U}(ra_{max}), r \in [0.7, 1.3]$. Il s'agit du pas 70 avec l'algorithme complet et $\delta = 10^{-6}$.

r	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
before MMPE	0.0028	0.008	0.03	0.09	0.29	0.9	2.6
after MMPE	0.0034	1.1	0.007	0.005	0.004	0.004	0.004

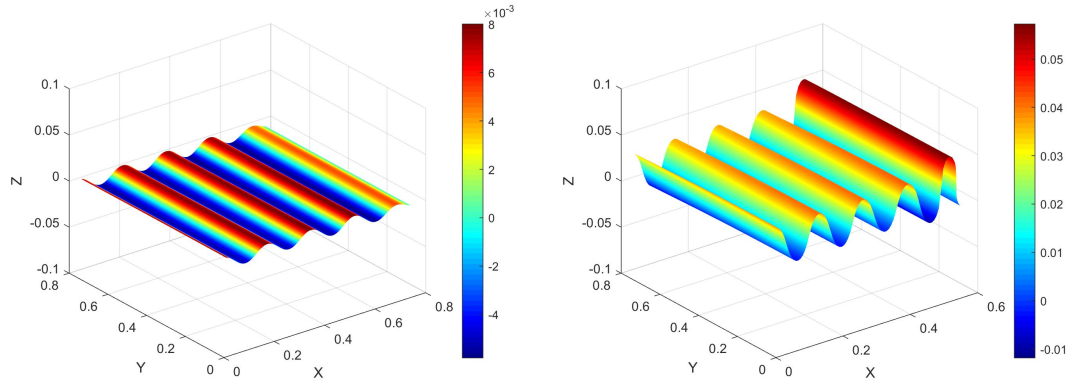


FIGURE 5 – Tracé 3D de la déformée du film juste après la première bifurcation (pas 20, cf figure 4) et avant premier virage (pas 70, cf figure 4).

L'évolution de la déformée du film entre le point de bifurcation et le premier virage est représenté à la figure 5. On observe une forme sinusoïdale classique juste après la bifurcation (quasiment périodique), voir la partie gauche de la figure 5, la valeur de la charge à la bifurcation $\lambda_{bif} \simeq 0.05$ et le mode de bifurcation étant à peu près le même que dans [24]. Ensuite, le dernier plissement près du bord du film se développe plus rapidement et met en lumière une sorte de localisation près du bord (partie droite de la figure 5). Cet effet peut être considéré comme le début de l'apparition d'un pli, cependant la loi constitutive choisie ne permet pas d'aller plus loin.

4 Conclusion

Les techniques numériques présentées ici sont reliées à la méthode asymptotique numérique (MAN) qui repose sur le calcul de séries de Taylor en fonction d'un paramètre de chemin. Il apparaît clairement que l'enchaînement simple des séries de Taylor conduit à une perte progressive de précision quand on enchaîne de nombreux pas. Par conséquent il est nécessaire d'ajouter des phases de corrections de Newton-Riks et ce simple ajout permet des calculs très sécurisés avec une très grande précision. Une technique de cheminement ainsi modifiée est très efficace bien que de nombreux auteurs préfèrent la procédure pseudo-dynamique. Cette méthode simple de prédiction-correction a été complétée par deux techniques à faible coût de calcul : une technique d'accélération de convergence appelée MMPE et une adaptation de la longueur de pas basée sur le résidu. Le nombre d'itérations de Newton-Riks par pas observé pendant le test est généralement limité à un ou zéro, mais nous n'avons pas réussi à enchaîner beaucoup de pas sans correction, ainsi le prix de la sécurité est d'environ 7 itérations de Newton-Riks pour 10 pas et un coût additionnel de 48% du temps de calcul. Probablement pourrait être diminué en utilisant des méthodes de corrections plus avancées. En ce qui concerne l'accélération de convergence le coût en temps de calcul est négligeable, elle permet d'améliorer la précision et de réduire le nombre de corrections de Newton-Riks, mais seulement d'une façon sporadique. Probablement la technique d'accélération pourrait être aussi améliorée.

5 Remerciements

Les auteurs remercient chaleureusement Frédéric Hecht, du laboratoire Jacques Louis Lions, Sorbonne Université Paris, pour son aide précieuse lors des développements en FreeFem++, ainsi que le support financier du gouvernement Français à travers l'Agence Nationale de la Recherche (labEx DAMAS, Grant No. ANR-11-LABX-0008-01).

Références

- [1] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Méthode asymptotique numérique*, Hermès Lavoisier, Paris, 2007.

- [2] N. Damil and M. Potier-Ferry, *A new method to compute perturbed bifurcation : Application to the buckling of imperfect elastic structures*, International Journal of Engineering Sciences, Vol. 26, pp.943-957, 1990.
- [3] P. Ventura, M. Potier-Ferry, H. Zahrouni, *A secure version of asymptotic numerical method via convergence acceleration*, Comptes Rendus Mécanique de l'Académie des Sciences, Vol. 348, issue 5, pp. 361-374, 2020.
- [4] J. M. T. Thompson and A. C. Walker, *The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 4, pp. 757-768, 1968.
- [5] Noor, A. K. and Peters, J. M., *Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 28, pp. 217-240, 1981.
- [6] E. Riks", *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 219-259, 1984.
- [7] B. Cochelin and N. Damil and M. Potier-Ferry, *The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics*, Revue Européenne des Éléments Finis, Vol. 3, pp.281-297, 1994.
- [8] Cochelin, B. and Vergez, C., *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 324, pp. 243-262, 2009.
- [9] B. Cochelin, *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*, Computers and Structures, Vol. 53, pp. 1181-1192, 1994.
- [10] B. Cochelin and N. Damil and M. Potier-Ferry, *Asymptotic-Numerical Method and Padé approximants for non-linear elastic structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 1187-1213, 1994.
- [11] Potier-Ferry, M. and Cadou, J. M., *Basic ANM algorithms for path following problems*, Revue Européenne des Éléments Finis, Vol. 13, pp. 9-32, 2004.
- [12] K. Jbilou and H. Sadok, *Vector extrapolation methods, Applications and numerical comparison*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 122, pp. 149-165, 2000.
- [13] N. Damil and J. M. Cadou and M. Potier-Ferry, *Mathematical and numerical connections between polynomial extrapolation and Padé approximants : applications in structural mechanics*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 699-707, 2004.
- [14] Cadou, J. M. and Duigou, L. and Damil, N. and Potier-Ferry, M., *Convergence acceleration of iterative algorithms. Applications to thin shell analysis and Navier-Stokes equations*, Computational Mechanics, Vol. 43, pp. 253-264, 2009.
- [15] Baker Jr., G. A. and P. Graves-Morris, *Padé approximants : Basic Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, Addison-Wesley, New York, 1996.
- [16] Baker Jr., G. A., *Defects and the Convergence of Padé Approximants*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 61, pp. 37-52, 2000.
- [17] Hecht, F., *new development in FreeFem++*, vol. 20, pp. 251-265, 2021.
- [18] C. Brezinski, *Convergence acceleration during the 20th century*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 122, pp. 1-21, 2000.
- [19] Brezinski, Claude and Redivo Zaglia, *Extrapolation methods : theory and practice*, Elsevier, Amsterdam, 2013.
- [20] Riks, E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, pp. 529-551, 1979.
- [21] Chen, Xi and Hutchinson, John W, *Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 71, pp. 597-603, 2004.
- [22] Médale, Marc and Cochelin, Bruno, *A parallel computer implementation of the Asymptotic Numerical Method to study thermal convection instabilities*, Vol. 228, pp. 8249-8262, 2009.
- [23] Guevel, Y. and Allain, T. and Girault, G. and Cadou, J. M., *Numerical bifurcation analysis for 3-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem*, Vol. 87, pp. 1-26, 2018.
- [24] Xu, Fan and Potier-Ferry, Michel and Belouettar, Salim and Cong, Yu *3D finite element modeling for instabilities in thin films on soft substrates*, Vol. 51, pp. 3619-3632, 2014.