

# Une nouvelle implémentation de la méthode perturbative itérative pour la propagation de fissures en fatigue.

L. David <sup>1,2</sup>, V. Lazarus <sup>1</sup>

<sup>1</sup> IMSIA, ENSTA Paris, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau cedex, louis.david@ensta-paris.fr

<sup>2</sup> Safran Aircraft Engines, Site de Villaroche, Rond-point René Ravaud - Réau, 77550 Moissy-Cramayel

---

**Résumé** — Nous proposons une nouvelle implémentation de la méthode perturbative itérative adaptée à la simulation de la propagation en fatigue de fissures de forme arbitraire, dont le principal avantage est de permettre la simulation de fissures planes de forme complexe en n'ayant recours qu'à un maillage unidimensionnel du front de fissure et donc un cout de calcul faible. Dans une application de la méthode, l'étude d'un grand nombre de fissures de forme diverses permet de montrer que l'évolution de la surface fissurée lors de la croissance en fatigue est très peu dépendante de la forme réelle de la fissure.

**Mots clés** — Fatigue, Prédiction de durée de vie, Méthode perturbative.

---

## 1 Introduction

La prédiction de durée de vie en fatigue de pièces mécaniques est cruciale dans de nombreux domaines, de l'industrie nucléaire jusqu'aux moteurs d'avions. Dans le cadre des approches de dimensionnement "tolérantes aux dommages", il n'est pas possible de supposer que les pièces étudiées seront toujours exemptes de défauts et un défaut donné est alors présent par hypothèse. Il est nécessaire de pouvoir prévoir de la façon la plus précise possible l'évolution d'une fissure se propageant à partir de ce défaut afin de déterminer la durée de vie d'une pièce endommagée, c'est-à-dire le nombre de cycles de chargement qu'elle peut subir sans risque de ruine. Toute limite à la précision de la simulation se traduit par un conservatisme coûteux dans le dimensionnement des pièces, puisque la durée de vie sûre d'un défaut typique déterminera par exemple l'intervalle de remplacement des pièces ou bien la fréquence des inspections.

Cependant, les méthodes à disposition des ingénieurs pour calculer ces durées de vie souffrent de deux défauts : soit il s'agit de méthodes dites "semi-analytiques" requérant une importante simplification du problème (par exemple en supposant que toutes les fissures sont elliptiques ou droites, ce qui mène à un conservatisme important), soit il s'agit de solutions reposant sur les éléments finis tridimensionnels dont le coût de calcul est souvent prohibitif pour la simulation de propagation. Il est donc utile de rechercher une approche alternative qui, tout en ayant un cout de calcul raisonnable, permettrait de mieux prendre en compte la complexité des fissures réelles. C'est ici que la méthode perturbative entre en jeu puisqu'elle présente l'avantage de ne reposer que sur un maillage unidimensionnel du front de fissure et sur le calcul d'intégrales de contour (donc des calculs numériques simples), tout en ne faisant aucune hypothèse sur la forme de la fissure autre que sa planéité. Cette méthode, basée sur la théorie des fonctions de poids de Bueckner et Rice [1, 2, 3], a déjà été appliquée numériquement dans différents contextes : pour des fissures elliptiques [4], pour des fissures droites en interaction avec des particules plus résistantes [5] ou bien des contraintes résiduelles [6], dans le cas de deux fissures circulaires proches [7], ou encore pour des fissures circulaires se propageant dans un milieu fortement hétérogène [8]. Dans toutes ces applications, les fissures de départ sont systématiquement des formes suffisamment simples pour que certaines données nécessaires au fonctionnement de la méthode soient immédiatement connues. Une implémentation de la méthode [9] permet de simuler la propagation de fissures de formes plus complexes, sans toutefois permettre d'accéder à des formes de fissures complètement arbitraires.

L'impossibilité jusqu'alors d'étudier la propagation de fissures de forme très complexe rend l'application de la méthode perturbative pour des cas industriels délicate puisque la valeur ajoutée de la méthode serait justement de ne pas avoir à modifier la forme du défaut de départ. Notre implémentation permet de pallier cette limitation et dans une application de la méthode [10], nous simulons plusieurs centaines

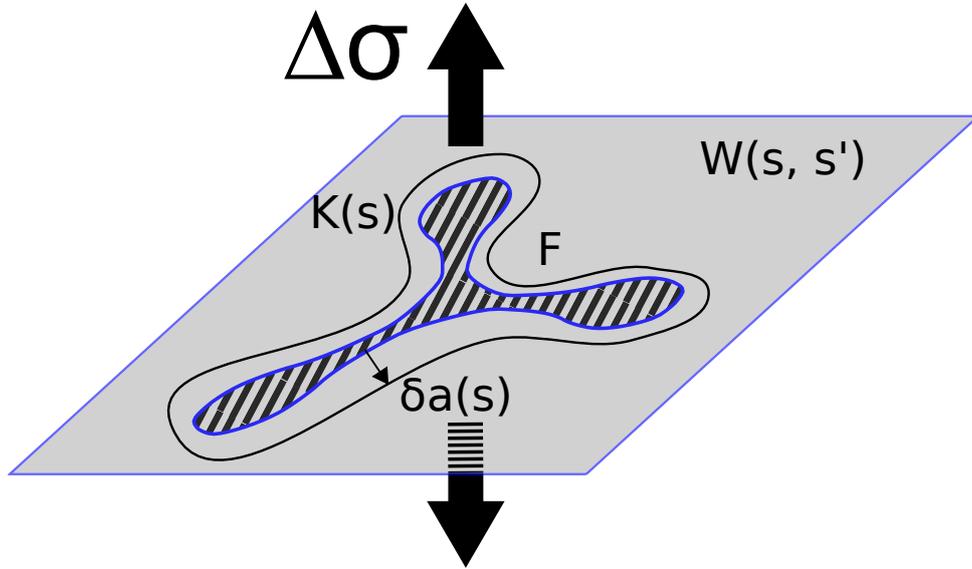


FIGURE 1 – Schématisation du problème physique simulé

de propagations de fissures de forme complexe.

## 2 Méthode perturbative

Le problème physique étudié par notre implémentation de la méthode perturbative est le cas d'une fissure de front  $\mathcal{F}$  de forme quelconque dans un milieu élastique infini homogène et isotrope soumis à une contrainte en traction uniforme, de sorte que la fissure n'est sollicitée qu'en mode I.  $\mathcal{F}$  est muni de l'abscisse curviligne  $s$ , et subit une petite perturbation donnée par  $\delta a(s)$ , l'avance normale du front au point  $\mathcal{F}(s)$  d'abscisse  $s$ . Ainsi, après perturbation, le point  $\mathcal{F}(s)$  est transporté en  $\mathcal{F}(s) + \delta a(s)\vec{n}(s)$ , où  $\vec{n}(s)$  est le vecteur unitaire normal au front au point d'abscisse  $s$  (voir figure 1).

Nous notons  $K(s)$  le facteur d'intensité des contraintes le long de  $\mathcal{F}$ , et  $W(s, s')$  une fonction de deux points de  $\mathcal{F}$  dépendant exclusivement de la géométrie du problème et dérivant de fonctions de poids de la fissure.

L'esprit de la méthode perturbative réside dans le fait que pour une perturbation normale  $\delta a(s)$  de  $\mathcal{F}$  qui correspond en fait au transport de chaque point  $\mathcal{F}(s)$  du front vers le point  $\mathcal{F}(s) + \delta a(s)\vec{n}(s)$ , il est possible de mettre à jour les valeurs de  $K(s)$  et  $W(s, s')$  en fonction de leurs valeurs avant l'application de la perturbation, et de la perturbation elle-même.

Dès lors, si l'on dispose d'une fissure pour laquelle  $K(s)$  et  $W(s, s')$  sont complètement connus, il est possible de connaître leurs valeurs après application d'un nombre arbitraire de perturbations.

### 2.1 Calcul des perturbations

Les variations de  $K$  et  $W$  après perturbation du front sont données par Rice [2]. Cependant, le calcul des perturbations de  $K$  et  $W$  fait l'hypothèse que la perturbation  $\delta a(s)$  s'annule aux points où cette variation est calculée (dans la suite les points d'abscisse  $s_0$  ou  $s_1, s_2$ ). Cette limitation peut être contournée par une astuce de Rice qui consiste à décomposer toute perturbation de  $\mathcal{F}$  en une première perturbation affine (c'est-à-dire une superposition de translation, rotations, homothétie) qui transporte les points où sont calculés les perturbations vers leur position finale de sorte que si l'on soustrait cette première perturbation à la perturbation totale, alors la perturbation restante s'annule bien aux points voulus.

En notant de plus  $D(s, s')$  la distance euclidienne entre les points d'abscisse  $s$  et  $s'$  du front, la variation de  $K$  et  $W$  due à une petite perturbation  $\delta a(s)$  quelconque est donnée par :

$$\delta K(s_0) = \delta K^*(s) + \frac{1}{2\pi} PV \int_{\mathcal{F}} \frac{W(s, s_0)K(s)(\delta a(s) - \delta^* a(s))}{D^2(s, s_0)} ds$$

et

$$\delta W(s_1, s_2) = \delta W^{**}(s) + \frac{D^2(s_1, s_2)}{2\pi} PV \int_{\mathcal{F}} \frac{W(s, s_1)W(s, s_2)(\delta a(s) - \delta^{**}a(s))}{D^2(s, s_1)D^2(s, s_2)} ds$$

où  $\delta^*a$ ,  $\delta^{**}a$  sont les perturbations affines auxiliaires, et  $\delta K^*(s)$ ,  $\delta W^{**}(s)$  les variations de  $K$  et  $W$  associées, et  $PV \int$  désigne une intégrale prise au sens de sa valeur principale de Cauchy.

Puisque nous avons fait l'hypothèse que la fissure dans un milieu infini, homogène et isotrope, on peut choisir  $\delta^*a$  et  $\delta^{**}a$  de façon à ce que  $\delta K^*(s)$  et  $\delta W^{**}(s)$  soient en fait nuls, ce qui limite l'évaluation des variations de  $K$  et  $W$  au calcul d'intégrales de contour le long de  $\mathcal{F}$ .

## 2.2 Simulation de propagation

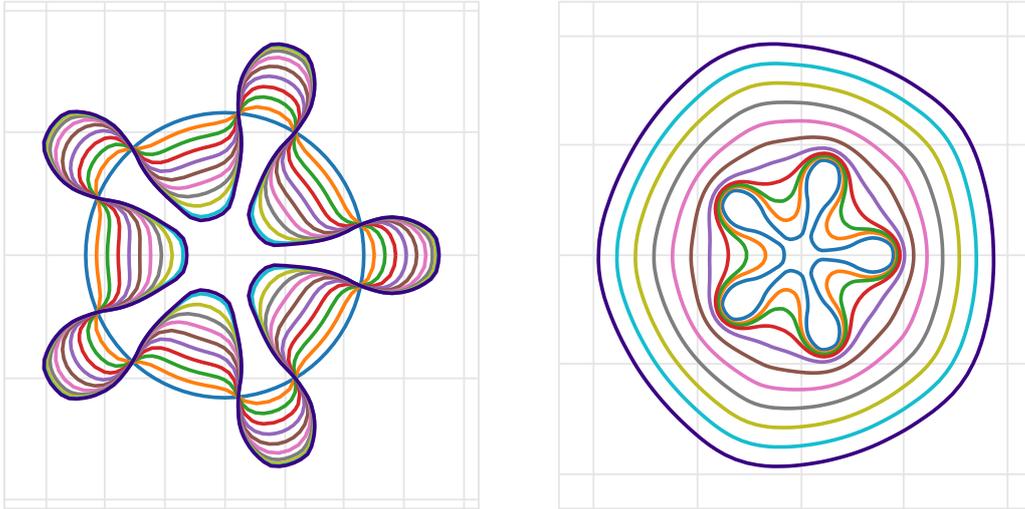
Lors de l'utilisation de la méthode, le dernier rouage de l'algorithme qui reste à fixer est le choix des perturbations. Pour simuler la propagation d'une fissure, les perturbations sont naturellement données pas une loi de propagation.

Pendant, il faut d'abord obtenir les valeurs de  $K$  et  $W$  pour la fissure de départ choisie. C'est la difficulté de cette étape qui explique que la plupart des utilisations de la méthode perturbative citée plus tôt utilisaient des formes simples (fronts circulaires ou rectilignes) comme forme de départ.

Dans notre cas, l'initialisation des valeurs de  $K$  et  $W$  pour une fissure de forme quelconque sont obtenues par des perturbations successives d'une fissure circulaire (voir figure 2a), pour laquelle il est connu que  $K(s) = 2\sigma\sqrt{r/\pi}$  où  $r$  est le rayon de la fissure, et  $W(s, s') = 1$ . La façon dont sont obtenues les perturbations successives qui permettent ce changement de forme est l'application d'une loi de propagation spéciale qui dépend de la forme à obtenir.

$$\delta a(s) = da_{max} \times \tanh \left( da_{rate} \times \overbrace{\mathcal{D}(s, \mathcal{F}_{final})}^{\text{distance } \mathcal{F}(s) - \text{front final}} / da_{max} \right)$$

Outre le front à atteindre, cette loi d'avancée spéciale dépend de deux paramètres :  $da_{max}$  et  $da_{rate}$  qui influent sur l'amplitude de la perturbation et sa régularité respectivement, et qui doivent être choisis judicieusement pour garantir la bonne précision du calcul.



(a) Étape d'initialisation qui permet de passer du cercle à une forme quelconque.

(b) Étape de propagation où les perturbations sont données par une loi de propagation quelconque (ici une loi de Paris avec  $n = 3$ )

FIGURE 2 – Illustration des fronts successifs obtenus par perturbation

Une fois que l'on a effectué l'étape d'initialisation, on peut passer à la simulation de propagation en fatigue en utilisant n'importe quelle loi de propagation pour se donner des perturbations, par exemple une loi de Paris de paramètres  $n$  et  $C$  :  $\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n$  qui mène après discrétisation de l'avancée à [9] :

$$\delta a(s) = \frac{da_{max}}{C(\Delta K_{max})^n} C(\Delta K)^n = da_{max} \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_{max}} \right)^n$$

Où le préfacteur supplémentaire permet d'obtenir des perturbations d'amplitude  $da_{max}$  contrôlée et constante (voir figure 2b).

### 2.3 Précision du calcul

Ici nous nous assurons que notre implémentation numérique a une précision adéquate.

Pour une fissure elliptique de rapport d'aspect  $\alpha = a/b$  (où  $a$  est le demi-petit axe, et  $b$  le demi-grand axe) chargée au loin par un champ de contraintes uniformes  $\sigma$ , le facteur d'intensité de contraintes est connu analytiquement le long du front (voir par exemple [11]) :

$$K(\theta) = \frac{\sigma\sqrt{a\pi}}{E(\sqrt{1-\alpha^2})} \left( \frac{\sin^2(\theta) + \alpha^4 \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta) + \alpha^2 \cos^2(\theta)} \right)^{1/4} \quad (1)$$

où  $\theta$  est la position angulaire le long du front par rapport au grand axe, et  $E()$  est l'intégrale elliptique du deuxième type.

Nous pouvons comparer les valeurs de FIC obtenues par notre implémentation à cette référence, et comme mesure de l'erreur numérique commise, nous calculons l'erreur relative maximale ainsi que l'erreur quadratique moyenne entre le FIC calculé  $K_{num}(s)$  et le FIC exact donné par l'équation (1) comme suit :

$$\text{Erreur maximale} = \frac{1}{K(\theta=0)} \max_{s \in \mathcal{F}} |K_{num}(s) - K(\theta(s))|$$

$$\text{Erreur RMS} = \frac{1}{K(\theta=0)} \sqrt{\frac{\int_{\mathcal{F}} |K_{num}(s) - K(\theta(s))|^2 ds}{\int_{\mathcal{F}} ds}}$$

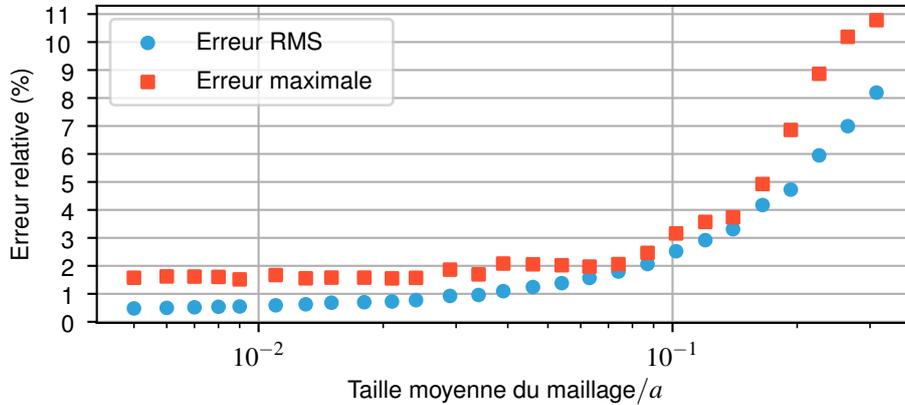


FIGURE 3 – Erreur relative du FIC calculé par la méthode perturbative itérative pour une fissure elliptique avec  $\alpha = 1/3$ .

Dans la figure 3, ces deux mesures de l'erreur sont données en fonction de la taille du maillage choisi pour représenter le front de fissure dans la simulation pour le cas  $\alpha = 1/3$ . Pour un maillage suffisamment fin, la procédure numérique atteint une précision de l'ordre de 1%

## 3 Application : influence de la forme [10]

Lors de la prédiction de la durée de vie en fatigue d'une fissure de forme complexe par des méthodes semi-analytique, la forme du front est extrêmement simplifiée, généralement en un front circulaire ou

bien elliptique, si bien que des fissures de forme très différentes peuvent être représentées par la même fissure simplifiée. Ici, nous cherchons à savoir si la forme réelle de la fissure a une influence sur sa nocivité en fatigue et essayons de comparer la nocivité de différentes fissures de forme complexe. Pour comparer deux fissures de formes radicalement différentes, il faudrait pouvoir définir une taille "objective" d'une fissure quelconque, au sens où cette "taille" nous donnerait une information sur la durée de vie en fatigue de la fissure, et donc deux fissures différentes de même "taille" auraient la même durée de vie.

### 3.1 Formes de fissures dont la propagation a été simulée

Pour étudier l'influence de la forme des fissures, nous simulons la propagation en fatigue d'une grande variété de formes de fissures (figure 4). Pour que la propagation de ces fissures ne soit influencée que par leur forme initiale, l'avancée de chaque point à chaque cycle de chargement est donnée par une loi de Paris simple ( $da(s) = C\Delta K^n$ ), l'amplitude  $\Delta\sigma$  du chargement est uniforme et identique à chaque cycle, et la fissure est plongée dans un milieu infini. Ces hypothèses sont compatibles avec la méthode perturbative, ce qui permet de mener les simulations à un coût de calcul raisonnable, et d'appliquer parfaitement l'hypothèse de milieu infini, ce qui serait difficile à faire avec des éléments finis.

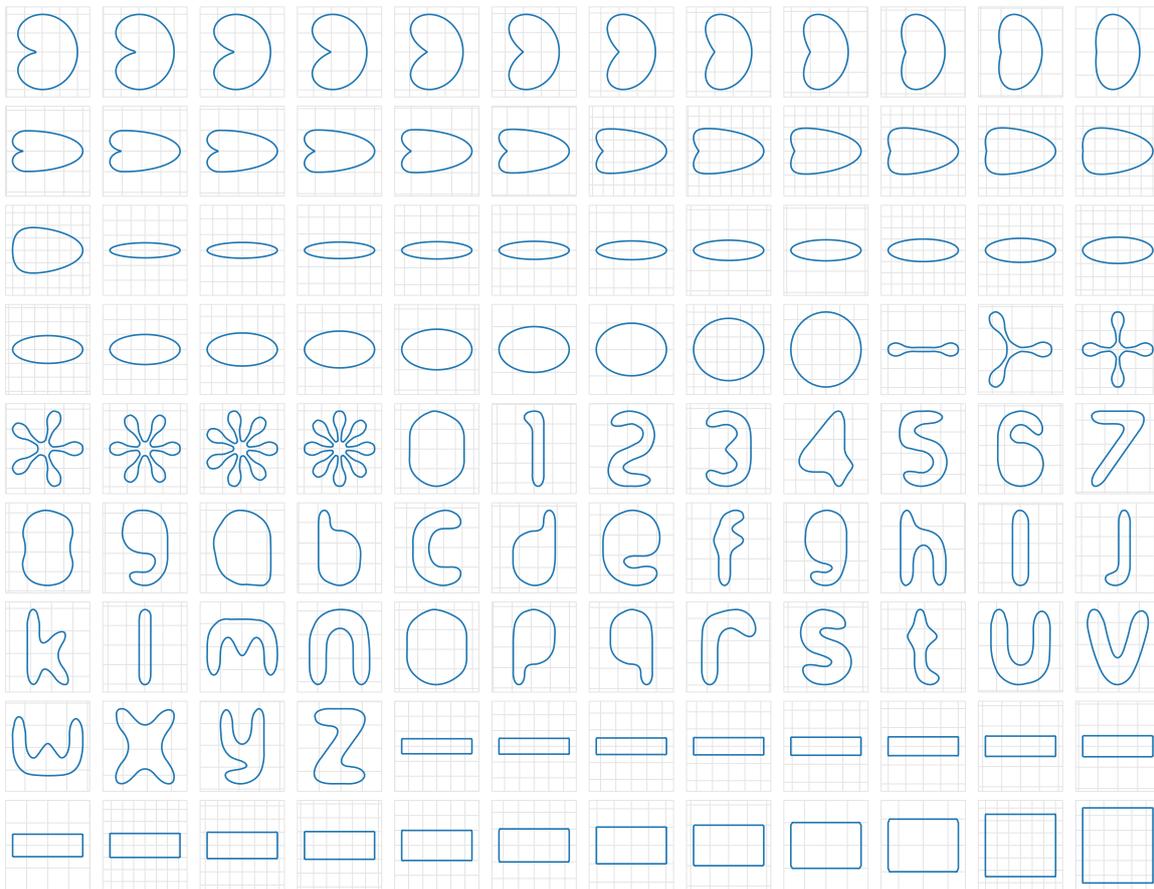


FIGURE 4 – Formes de fissures dont la propagation a été simulée

### 3.2 Choix possibles de taille de fissure

Plusieurs définitions de la taille d'une fissure de forme quelconque sont envisageables, par exemple en se basant sur des grandeurs géométriques de base telles que le diamètre  $D$  du cercle circonscrit à la fissure, la longueur  $L$  ou la largeur  $l$  de la fissure (voir figure), ou encore sa surface  $S$  ou son périmètre  $P$ .

Pour chacune de ces grandeurs, nous définissons une taille équivalente  $r$  basée sur ces grandeurs de façon à ce que ces tailles soient égales au rayon dans le cas d'une fissure circulaire.

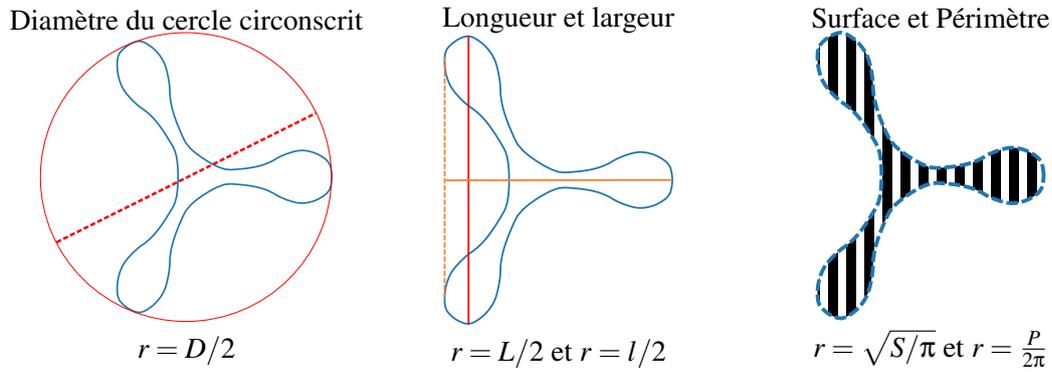


FIGURE 5 – Définition de différentes tailles  $r$  pour des fissures de forme quelconque

### 3.3 La surface est une bonne taille de référence

Pour comparer l'évolution de nombreuses fissures de formes différentes, nous traçons l'évolution de leur taille en fonction du nombre de cycles de chargement. Pour faciliter la comparaison et supprimer l'influence du facteur  $C$  de la loi de Paris, de l'amplitude du chargement  $\Delta\sigma$ , et la taille initiale  $r_0$  de la fissure, nous utilisons le nombre  $\bar{N} = NC(\Delta\sigma)^n r_0^{n/2-1}$  plutôt que le nombre de cycles de chargement réel  $N$ .

La figure 6 montre que si l'on choisit la surface comme taille de référence, c'est-à-dire  $r = \sqrt{S}/\pi$ , alors l'évolution de la taille ne dépend que très faiblement de la forme réelle de la fissure.

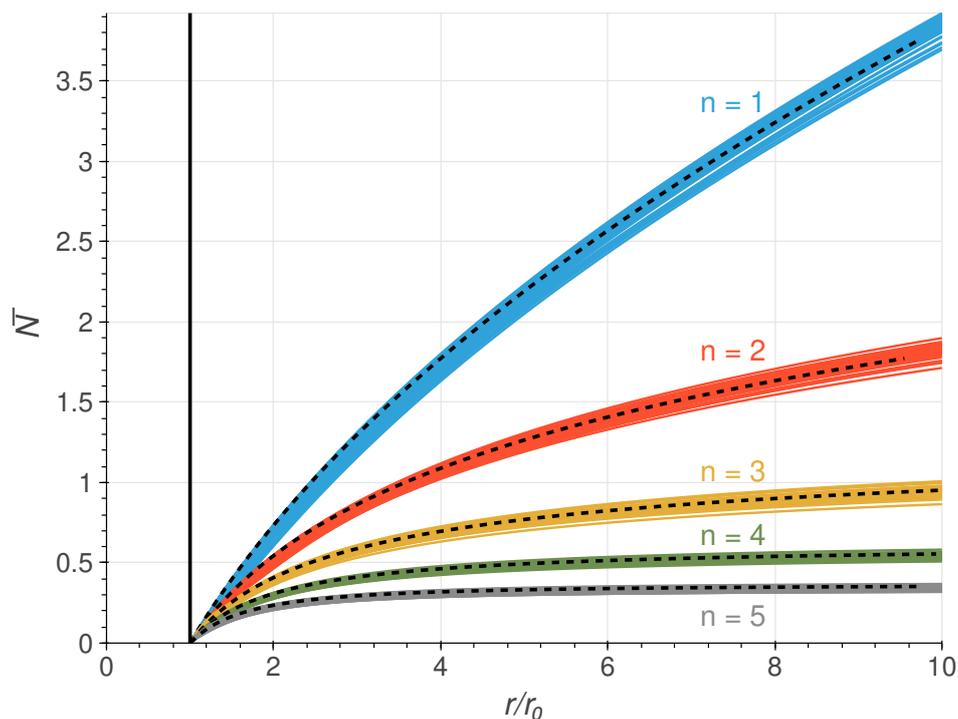


FIGURE 6 – Évolution de la taille de multiples fissures en fatigue (chaque ligne correspond à l'évolution d'une fissure différente).  $\bar{N}$  est un nombre adimensionné de cycles de chargement,  $r = \sqrt{S}/\pi$  où  $S$  est la surface de la fissure,  $n$  est l'exposant de la loi de Paris. Les traits en pointillés correspondent à l'évolution d'une fissure circulaire calculée analytiquement.

À titre de comparaison, les autres choix de taille de référence mènent à des évolutions de taille qui dépendent fortement de la forme de la fissure (voir figure 7), et dans certains cas, les évolutions ne sont pas monotones (les courbes croisent la droite  $r/r_0 = 1$ ), ce qui est réhibitoire. C'est en particulier le cas des tailles basées sur le périmètre ou la largeur de la fissure.

Ce résultat permet d'évaluer rapidement la durée de vie en fatigue d'une fissure de forme complexe : sous les hypothèses citées précédemment, une fissure complexe peut être remplacée par une fissure cir-

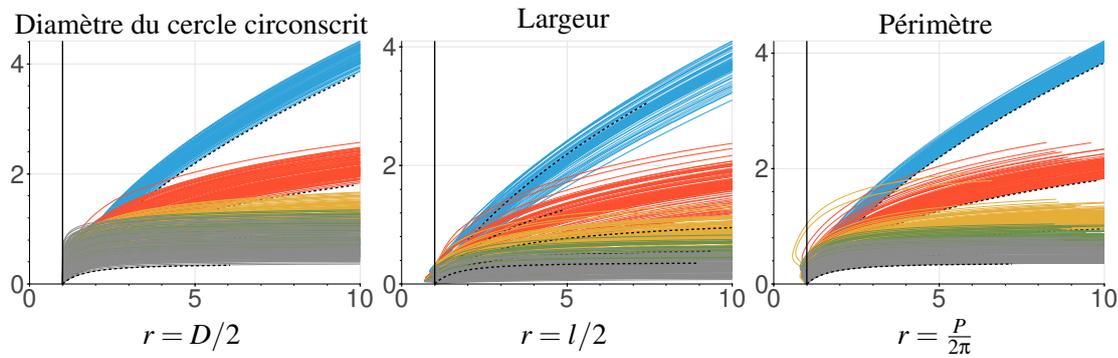


FIGURE 7 – Figures analogues à la figure 6 pour d’autres choix de taille de référence. Dans tous les cas on observe une forte dépendance de l’évolution de ces tailles à la forme de la fissure initiale. Remarquons que dans certains cas, la taille de référence n’est pas toujours monotone, ce qui disqualifie complètement ces choix.

culaire de surface équivalente sans que l’évolution de la surface avec le nombre de cycles de chargement soit significativement modifiée. Si on peut de plus supposer que la fissure devient circulaire avant la fin de sa durée de vie (toutes les fissures montrées Fig. 4 deviennent circulaires), alors un critère d’Irwin peut être utilisé pour déterminer la durée de vie : le critère d’Irwin peut être converti en une surface de fissure critique (puisque la forme de la fissure lorsque le critère d’Irwin est atteint est connue), et remplacer la fissure complexe par une fissure circulaire dont la durée de vie peut être calculée analytiquement a alors peu d’influence sur la durée de vie obtenue.

## 4 Conclusion et perspectives

La méthode perturbative est une approche intéressante pour simuler la propagation en fatigue de défauts de façon moins coûteuse en capacité de calcul que les éléments finis 3D. Grâce à la procédure d’initialisation que nous avons introduite, il est possible de simuler la propagation de fissures de forme arbitraires.

Dans une application de la méthode où nous avons simulé la propagation d’une grande variété de formes de fissures, nous montrons que la surface fissurée joue un rôle crucial dans l’évaluation de la nocivité d’une fissure de forme complexe. En particulier, pour le cas d’une plane fissure sollicitée en mode I par un champ de contraintes uniforme dans un milieu infini :

- La forme de la fissure évolue rapidement vers une fissure circulaire, même pour les formes initiales les plus complexes.
- La surface fissurée est une mesure objective de la taille d’une fissure qui permet de comparer des fissures de formes radicalement différentes.
- L’évolution de la surface fissurée lors de la propagation en fatigue ne dépend que très faiblement de la forme de la fissure.
- Un corollaire de ce résultat est que substituer une fissure de forme complexe par une fissure circulaire de même surface dont la durée de vie peut être calculée de façon analytique ne change pas sensiblement la durée de vie prédite, ce qui peut permettre de réduire le conservatisme de certaines méthodes semi-analytiques.

La méthode perturbative souffre cependant de certaines limitations dues aux hypothèses d’uniformité et d’infinitude du milieu. Les développements à venir de la méthode portent sur l’introduction de contraintes inhomogènes en poursuivant l’idée de [6], et l’étude de la propagation de fissure débouchantes et donc en interaction avec un bord du milieu.

## Références

- [1] H. F. Bueckner. Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space. *International Journal of Solids and Structures*, 23(1) :57–93, 1987.

- [2] J. R. Rice. Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis. In R. P. Wei and R. P. Gangloff, editors, *Fracture Mechanics : Perspectives and Directions (Twentieth Symposium)*, pages 29–57, Philadelphia, USA, 1989. American Society for Testing and Materials STP 1020.
- [3] V. Lazarus. Perturbation approaches of a planar crack in linear elastic fracture mechanics : a review. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2) :121–144, 2011.
- [4] A. F. Bower and M. Ortiz. A three-dimensional analysis of crack trapping and bridging by tough particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(6) :815–858, 1991.
- [5] A. F. Bower and M. Ortiz. The influence of grain size on the toughness of monolithic ceramics. *Transactions of the ASME. Journal of engineering materials and technology.*, 115 :228–236, 1993.
- [6] A. F. Bower and M. Ortiz. An analysis of crack trapping by residual stresses in brittle solids. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 60(1) :175–82, 1993.
- [7] L. Legrand and V. Lazarus. Front shape and loading evolution during cracks coalescence using an incremental perturbation method. *Engineering Fracture Mechanics*, 133 :40–51, 2015.
- [8] Manish Vasoya, Véronique Lazarus, and Laurent Ponson. Bridging micro to macroscale fracture properties in highly heterogeneous brittle solids : weak pinning versus fingering. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 95 :755–773, 2016.
- [9] V. Lazarus. Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3D plane cracks under uniform remote tensile loading. *International Journal of Fracture*, 122(1-2) :23–46, 2003.
- [10] L David and V Lazarus. On the key role of crack surface area on the lifetime of arbitrarily shaped flat cracks. *International Journal of Fatigue*, 154 :106512, 2022.
- [11] G. R. Irwin. Crack-extension force for a part-through crack in a plate. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 29 :651–661, December 1962.