

# Etude des modes localisés des structures périodiques imparfaites

Y. Li<sup>1</sup>, R. Cottureau<sup>2</sup>, B. Tie<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *MSSMat, CentraleSupélec, CNRS, Univ Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France. {yilun.li, bing.tie}@centralesupelec.fr*

<sup>2</sup> *Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA UMR 7031, Marseille, France. cottureau@lma.cnrs-mrs.fr*

**Résumé** — Les matériaux périodiques employés en ingénierie présentent souvent des défauts de périodicité dus à leur procédé de fabrication. Dans ce travail, les effets de ces défauts sur la propagation des ondes, sont étudiés par la théorie de Floquet-Bloch dans un cadre à deux échelles. On montre que de tels défauts peuvent générer des modes localisés non-propagatifs à des fréquences situées à l'intérieur des bandes interdites de fréquence des structures périodiques. L'apparition des modes localisés n'est que peu influencée par l'amplitude des défauts, mais leurs fréquences propres varient de façon monotone avec l'amplitude des défauts.

**Mots clés** — propagation d'onde, mode localisé, théorie de Floquet-Bloch.

## 1 Introduction

L'étude de la propagation des ondes dans les matériaux périodiques peut être réduite à une cellule primitive grâce à la théorie de Floquet-Bloch. En revanche, les matériaux périodiques imparfaits avec des défauts distribués de manière globale et aléatoire nécessitent des approches de modélisation théorique et numérique plus complexes qui restent à explorer. Or, les matériaux périodiques employés en ingénierie présentent souvent des défauts de périodicité dus à leur procédé de fabrication. Par ailleurs, des études ont montré qu'il était possible d'obtenir des propriétés particulières vis-à-vis de la propagation des ondes grâce à l'introduction de défauts ou d'un certain désordre avec, par exemple, un défaut de ligne permettant de guider les ondes [1, 2, 3], ou un défaut de l'interface générant des modes topologiques [4, 5]. Il est donc d'un grand intérêt d'étudier l'effet des défauts de périodicité sur les phénomènes de propagation des ondes.

Dans cette contribution, nous proposons d'aborder ce problème dans un cadre plus simple auquel il est encore possible d'appliquer la théorie de Floquet-Bloch : des défauts de périodicité localisés sont introduits de manière périodique, mais sur une échelle plus grande que celle du milieu périodique étudié. La propagation des ondes dans de tels milieux périodiques avec de divers défauts en propriétés mécaniques ou géométriques est analysée et comparée au cas de référence sans défauts. L'objectif est de caractériser précisément l'influence des défauts de périodicité sur les courbes de dispersion et les déformées modales.

L'article est organisé de la manière suivante. La Section 2 présente l'analyse théorique de Floquet-Bloch à l'échelle de la cellule primitive des milieux périodiques sans défauts. Dans la Section 3, les défauts de périodicité sont introduits et l'analyse de Floquet-Bloch est refaite mais sur une échelle plus grande, qui est celle de la périodicité des défauts. Cette analyse se fait sur des modèles "multicellulaires" par rapport à la cellule primitive des milieux périodiques non perturbés. L'existence des modes localisés est analysée ainsi que leur positionnement par rapport aux bandes interdites de fréquence des milieux périodiques non perturbés. Les études paramétriques sur les fréquences propres des modes localisés et la déformée de ces derniers sont présentées. La Section 4 présente les conclusions et quelques perspectives.

## 2 Analyse théorique des structures périodiques

Le cas de référence, les milieux périodiques sans défauts, est d'abord analysé en rappelant la théorie de Floquet-Bloch. L'objectif est d'obtenir la relation de dispersion et les bandes interdites de fréquence, qui sont utiles pour étudier les mêmes milieux mais perturbés.

### 2.1 Analyse de Floquet-Bloch à l'échelle de la cellule primitive

Sans perdre la généralité de notre propos, on considère un milieu périodique selon deux directions de maille carrée constitué d'une matrice et d'une inclusion circulaire (FIGURE 1). L'interface des deux matériaux, matrice et inclusion, est notée  $\Lambda$ .

L'analyse est réalisée à l'aide de la transformée de Floquet-Bloch sur une cellule primitive, qui est effectuée dans les deux directions. Les conditions de périodicité sont appliquées aux bords en rouge et aux bords en bleu. Dans l'espace réciproque du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , la zone de Brillouin est définie duale à la cellule primitive. Sur la FIGURE 1, le carré gris représente la première zone de Brillouin et la zone triangulaire délimitée par le contour  $\Gamma - X - M - \Gamma$  est la zone irréductible de Brillouin dont la définition tient compte des propriétés de symétrie de la cellule primitive. Les sommets de cette zone ont pour coordonnées :  $\Gamma(0, 0)$ ,  $X(\frac{\pi}{L}, 0)$ ,  $M(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L})$ . Les coefficients de Lamé, la densité et la vitesse de l'onde sont respectivement  $(\lambda, \mu, \rho, c)$ .

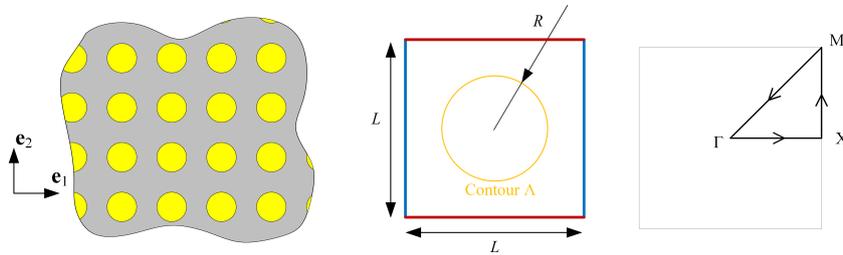


FIGURE 1 – Milieu périodique 2D à étudier (à gauche), la cellule primitive (au milieu) et la première zone de Brillouin avec la zone irréductible (à droite)

On considère un champ de déplacement sous la forme d'une onde plane  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$ , avec  $\omega$  la pulsation de l'onde liée à la fréquence  $f$ , et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde. L'équation d'équilibre du milieu dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = -\rho\omega^2\mathbf{u} \quad (1)$$

où  $\mathbf{C}$  dénote le tenseur d'élasticité d'ordre quatre et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T)$  est le tenseur des petites déformations, avec  $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$  l'opérateur du gradient spatial et  $(\cdot)^T$  l'opérateur de transposition. La transformée de Floquet-Bloch pour le champs de déplacement  $\mathbf{u}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{u}^B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_{\{m_j\} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{u}(\mathbf{x} + m_j \mathbf{g}_j) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} + m_j \mathbf{g}_j)} \quad (2)$$

où  $\mathbf{g}_j$  ( $j = 1, 2$ ) sont les vecteurs de périodicité. En appliquant la transformation de Floquet-Bloch à l'équation (1), on obtient la périodisation de celle-ci :

$$(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \cdot [\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^B) + \mathbf{u}^B \otimes_s i\mathbf{k})] = -\rho\omega^2\mathbf{u}^B \quad (3)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres défini sur la cellule primitive, qui décrit le comportement modal du milieu périodique. En plus de l'équation (3), les conditions aux limites périodiques doivent être correctement imposées sur les frontières de la cellule primitive. Par ailleurs, les conditions de raccord doivent être ajoutées à l'interface matrice/inclusion  $\Lambda$ .

### 2.2 Analyse des relations de dispersion en 1D

Lorsque la théorie Floquet-Bloch présentée dans la Section 2.1 est appliquée à une structure périodique 1D, le problème aux valeurs propres (3) peut être résolu de manière explicite dans

certains cas. Les solutions analytiques explicites du nombre d'onde  $k$  permettent de montrer plus clairement la définition mathématique des bandes passantes et interdites de fréquence et leur interprétation physique. Dans ce but, nous proposons ici d'étudier une structure 1D périodique composée de barres, dont chaque cellule primitive est composée de deux barres ayant des propriétés différentes (FIGURE 2). Les paramètres géométriques et mécaniques de la structure périodique sont données dans le Tableau 1.

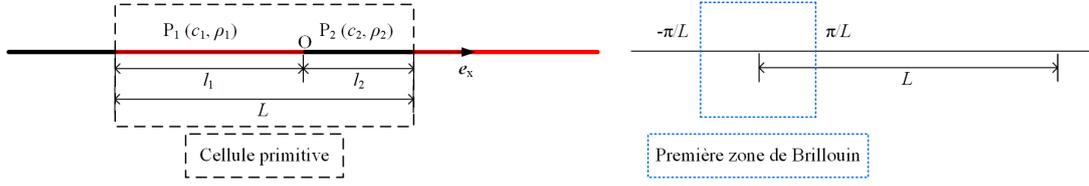


FIGURE 2 – La cellule primitive (à gauche) et sa première zone de Brillouin (à droite)

Barre	Module d'Young $E_{j(j=1,2)}$ (GPa)	Masse volumique $\rho_{j(j=1,2)}$ (kg/m <sup>2</sup> )	Longueur $l_{j(j=1,2)}$ (mm)
P <sub>1</sub>	50	2700	4
P <sub>2</sub>	250	2700	1.5

TABLE 1 – Paramètres géométriques et mécaniques de la structure 1D périodique étudiée

Pour cet exemple, la résolution analytique de (3) donne la relation de dispersion suivante entre  $\omega$  et  $k$  :

$$\cos(Lk) = \left( \frac{Z_m^2}{Z_1 Z_2} \cos(\omega T_m) - \frac{Z_d^2}{Z_1 Z_2} \cos(\omega T_d) \right) \quad (4)$$

où  $Z_j = \rho_j c_j$  est l'impédance acoustique dans la  $j$ -ième barre et  $T_j = \frac{l_j}{c_j}$  le temps nécessaire à l'onde P pour traverser celle-ci, et les autres paramètres sont définis comme :  $Z_m = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ ,  $Z_d = \frac{Z_1 - Z_2}{2}$ ,  $T_m = T_1 + T_2$ ,  $T_d = T_1 - T_2$ . Lorsque le nombre d'onde  $k$  est réel, le mode associé  $U_j^B$  est un mode propagatif qui peut transférer l'énergie à la cellule suivante avec la même amplitude. Dans ce cas, il n'y a pas de perte d'énergie lors de la propagation dans la structure périodique. Autrement, lorsque  $k$  est complexe ou imaginaire pur, alors le mode associé  $U_j^B$  est un mode évanescent et son amplitude diminue en se propageant à la cellule suivante. Les bandes de fréquences correspondantes aux valeurs réelles de nombre d'onde  $k$  sont des "bandes passantes", et les autres sont des "bandes interdites".

Le problème aux valeurs propres (3) est généralement résolu numériquement. Dans ce travail, nous utilisons la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel COMSOL. La cellule primitive est discrétisée. Les courbes de dispersion obtenues numériquement sont présentées dans la FIGURE 3, avec  $k_r$  et  $k_i$  la partie réelle et la partie imaginaire de  $k$ , les résultats numériques et analytiques s'accordent parfaitement.

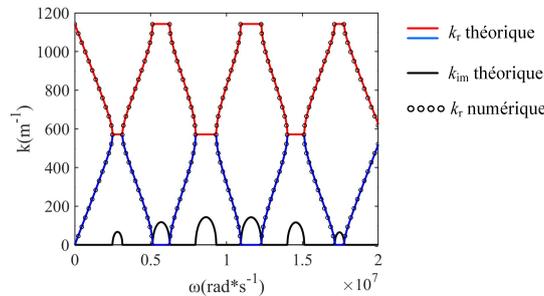


FIGURE 3 – Comparaison des solutions analytiques et numériques de la structure 1D

Pour clarifier l'influence des propriétés mécaniques et géométriques sur la structure de bande des courbes de dispersion, une étude paramétrique est réalisée. Les deux paramètres, le rapport d'impédances  $\frac{Z_1}{Z_2}$  et celui de longueurs  $\frac{l_1}{l_2}$  entre les deux barres sont considérés. On note que,

lorsque  $\frac{Z_1}{Z_2} = 1$ , ou  $\frac{l_1}{l_2} \ll 1$ , ou  $\frac{l_2}{l_1} \ll 1$ , la structure peut être considérée comme homogène et il n'existe que de bandes passantes. Les résultats des études paramétriques sont présentés dans la FIGURE 4, où les bandes passantes sont représentées par les traits bleus et les bandes interdites par les espaces vides. L'influence des deux paramètres est clairement mise en évidence. Par exemple, lorsque le rapport de longueurs  $\frac{l_1}{l_2}$  augmente, la première bande interdite devient d'abord plus large puis plus étroite, et sa position change également.

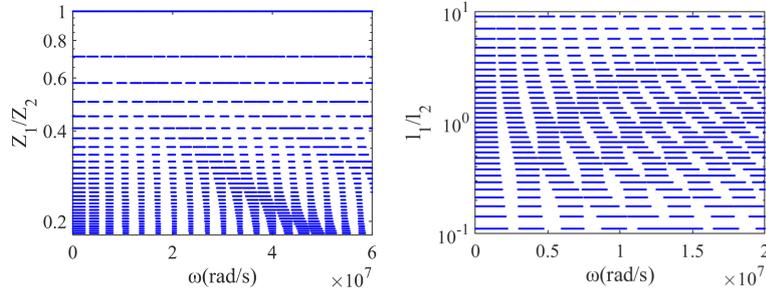


FIGURE 4 – Étude paramétrique de la structure périodique 1D. Influence du rapport d'impédances acoustiques (à gauche) et de longueurs des barres (à droite) sur les bandes passantes (en traits bleus) et les bandes interdites (les espaces vides)

### 2.3 Analyse des relations de dispersion en 2D

Dans le cas des milieux périodiques 2D, il n'est en général plus possible d'obtenir une expression analytique de la relation de dispersion comme l'exemple présenté en 1D. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour calculer les valeurs propres et tracer les courbes et/ou les surfaces de dispersion. Dans ce travail, nous considérons la configuration 2D présentée précédemment (FIGURE 1) mais dans le cas où les inclusions sont plus rigides que la matrice. Les paramètres géométriques et de matériaux sont résumés dans le Tableau 2.

$L$ (m)	$R$ (m)	$E_b$ (GPa)	$E_i$ (GPa)	$\nu_b$	$\nu_i$	$\rho_b(kg/m^3)$	$\rho_i(kg/m^3)$
0.013	0.0045	0.233	10	0.25	0.3	1750	2100

TABLE 2 – Récapitulatif des paramètres géométriques et de matériaux utilisés pour la simulation du milieu périodique 2D

Le problème aux valeurs propres est résolu en discrétisant par éléments finis la cellule primitive dans l'espace physique et en choisissant un ensemble de valeurs discrètes du vecteur d'onde de Bloch  $\mathbf{k}$  soit dans la zone irréductible de Brillouin soit sur son contour  $\Gamma - X - M - \Gamma$ . Nous obtenons ainsi respectivement des surfaces ou des courbes de dispersion (FIGURE 5). Pour chaque valeur du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , les 14 premiers modes sont calculés pour faire apparaître les bandes passantes et la première bande interdite. Cette bande des fréquences interdites est présentée sur la FIGURE 5 par la couleur grise et se situe autour de 20 kHz. Les pentes des deux courbes verte et bleue passant par le point  $\Gamma$ , correspondants aux deux premiers modes, donnent respectivement les vitesses de l'onde P et de l'onde S du milieu homogénéisé équivalent en régime de basses fréquences [7, 6].

## 3 Simulation numérique des structures avec défauts de périodicité

La Section 2 a présenté l'analyse théorique de Floquet-Bloch des milieux périodiques sans défauts. Dans cette section, on introduit des défauts localisés de manière périodique sur une échelle plus grande que celle des milieux périodiques non perturbés et étudie leurs effets. Par exemple, un défaut localisé est introduit toutes les  $n$  cellules. La théorie de Floquet-Bloch est donc appliquée à une nouvelle cellule primitive définie par cette plus grande échelle de périodicité,

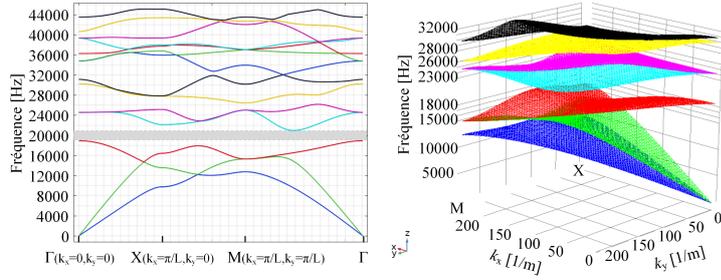


FIGURE 5 – Représentation des courbes (à gauche) et surfaces (à droite) de dispersion

ce qui donne un modèle dit “multicellulaire”, qui est de taille  $nL$ , par rapport à la cellule primitive des milieux périodiques non perturbés, qui est de taille  $L$ . Lorsque  $1 \ll n$ , la périodicité dans l’introduction des défauts localisés peut être négligée. L’objectif est de caractériser l’influence des défauts localisés tout en restant dans un cadre où la théorie de Floquet-Bloch reste applicable.

### 3.1 Structure 1D

La structure périodique 1D présentée dans la Section 2 est reprise ici, en y ajoutant un défaut toutes les 12 cellules de manière périodique. On a pour cette structure perturbée un modèle multicellulaire de taille  $nL$  avec  $n = 12$  (FIGURE 6). Le défaut est introduit sur l’une des 12 cellules, soit, en perturbant les longueurs respectives des deux sous domaines ( $l_1, l_2$ ) tout en gardant  $l_1 + l_2 = L$ , soit, en perturbant le module d’Young d’une valeur de  $\delta E$  comme suit :

$$E(x) = E_p(x) + \delta E(x) = \begin{cases} E_p(x) + \delta E_1 & \text{sur } [0, l_1] \\ E_p(x) + \delta E_2 & \text{sur } ]l_1, L] \end{cases} \quad (5)$$

Les courbes de dispersion et les déformées modales du milieu non perturbé de référence et

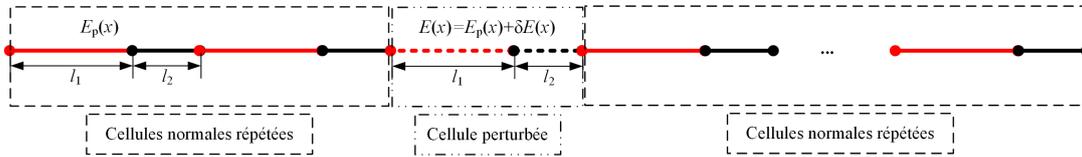


FIGURE 6 – Modèle multicellulaire de 12 cellules avec un défaut introduit sur une cellule en perturbant le module d’Young

des milieux avec défauts sont comparées dans la FIGURE 7. Il est utile de remarquer que les courbes de dispersion sont ici tracées pour la première zone de Brillouin de la cellule primitive de taille  $L$ , *i.e.*,  $k \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$ , alors que la première zone de Brillouin du modèle multicellulaire est 12 fois plus petite, *i.e.*,  $k \in [-\frac{\pi}{12L}, \frac{\pi}{12L}]$ . Les courbes de dispersion sont donc périodique de la période  $\frac{2\pi}{12L}$  et sont répétées 12 fois (FIGURE 7). Dans les milieux perturbés, les modes localisés (marqués en rouge) apparaissent dans les bandes interdites de fréquence. Les déformées modales des trois modes de fréquences propres voisines, deux propagatifs, un généré à cause du défaut, sont étudiées. Quelque soit le type de défauts, la déformée modale du mode généré par le défaut es localisé sur la cellule perturbée.

À partir de la valeur de  $6L$  pour la période d’introduction des défauts, les modes localisés peuvent être observés à des fréquences situées à l’intérieur des bandes interdites de fréquence des structures périodiques (FIGURE 8). L’amplitude de leur déformée modale montre qu’il est de plus en plus localisé avec l’augmentation de l’échelle de la périodicité d’introduction des défauts, qui est une échelle lente par rapport à celle de la périodicité du milieu sans défauts.

Une étude paramétrique est également réalisée, en considérant les deux paramètres suivants : le niveau de perturbation des longueurs  $\frac{\delta l_1}{l_1 + l_2}$  ou du module d’Young  $\frac{\delta E_1}{E_1}$ . Les résultats sont présentés dans la FIGURE 9, où les modes localisés sont marqués en croix rouges et des bandes passantes sont représentées par des traits bleus. Dans une bande interdite, les fréquences propres des modes localisés augmentent lorsque le module d’Young  $E_1$  augmente, et inversement. Pour

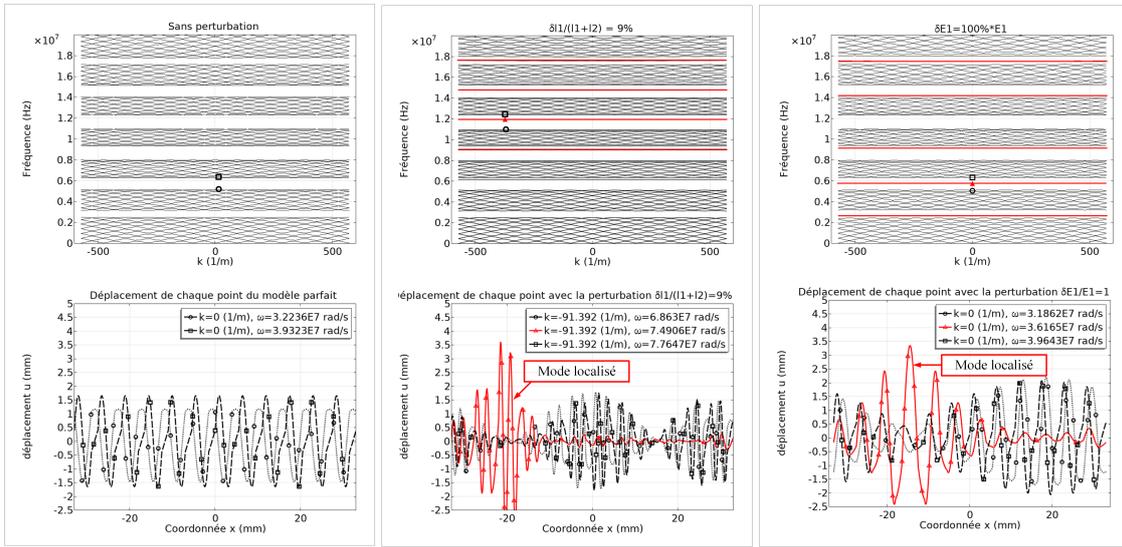


FIGURE 7 – Déformées modales des modes localisés (marqué en rouge) et des modes propagatifs de fréquences voisines du milieu non perturbé (à gauche) ou avec un défaut, soit géométrique (au milieu), soit en module d'Young (à droite)

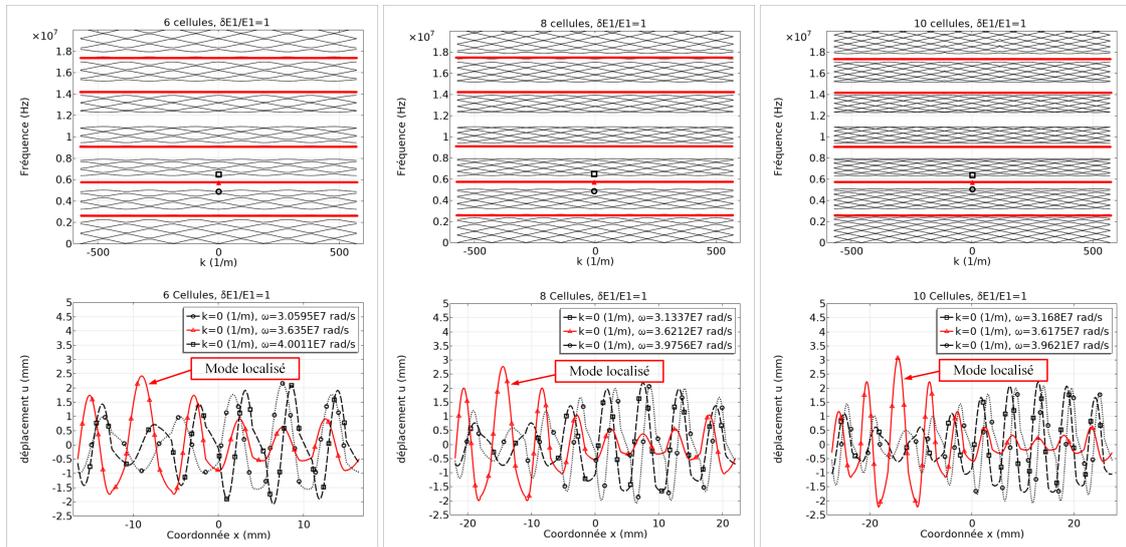


FIGURE 8 – Modes localisés introduits par le défaut du module d'Young dans des modèles multicellulaires de 6 cellules (à gauche), 8 cellules (au milieu), et 10 cellules (à droite)

une perturbation de longueurs, ces fréquences augmentent, et inversement. En faisant varier l'amplitude de perturbations, les modes aux bords des bandes passantes se déplacent d'abord vers les bandes interdites et deviennent des modes localisés, ensuite ces modes localisés se rapprochent des bandes passantes suivantes et deviennent des modes propagatifs.

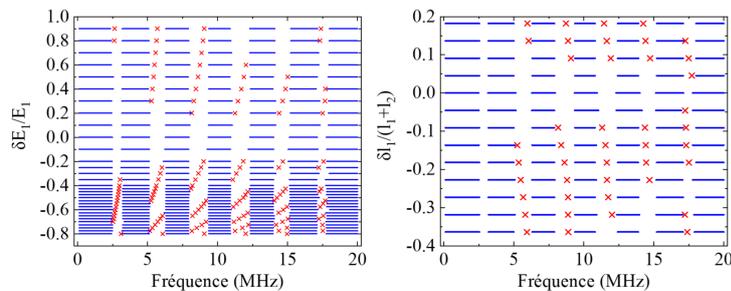


FIGURE 9 – Étude paramétrique de la structure perturbée 1D. Influence du niveau de perturbation en module d'Young (à gauche) et en longueur (à droite) sur les bandes passantes (traits bleus) et les modes localisés (croix rouges)

### 3.2 Structure 2D

Le milieu périodique 2D présenté dans la Section 2 est considéré ici en y ajoutant des défauts. On considère un modèle multicellulaire de  $6 \times 6$  cellules. Le module d'Young de la matrice de la cellule centrale est perturbée (FIGURE 10). Les courbes de dispersion sont tracées en considérant le contour de la zone irréductible de Brillouin du modèle multicellulaire. Un mode localisé (marqué en rouge) est observé à l'intérieur de la première bande interdite de fréquence.

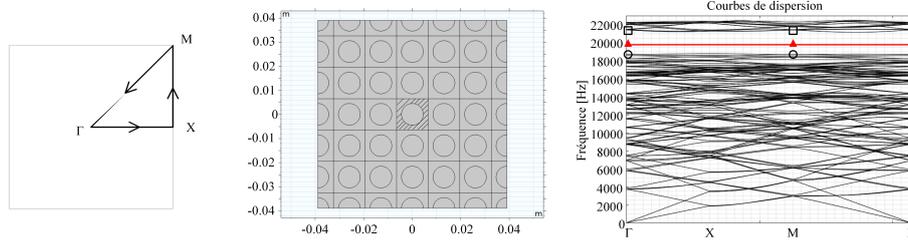


FIGURE 10 – Modèle multicellulaire  $6L \times 6L$  avec un défaut en module d'Young de la matrice de la cellule centrale et les courbes de dispersion avec le mode localisé marqué en rouge

La FIGURE 11 présente la déformée modale en termes de  $\|\mathbf{u}^B\|$  des modes localisés et des modes propagatifs voisins au point  $\Gamma$  ( $k_x = k_y = 0$ ) et  $M$  ( $k_x = \frac{\pi}{L}, k_y = \frac{\pi}{L}$ ), ceci à la fois pour le milieu de référence et les milieux avec défauts. Au point  $\Gamma$ , la déformée modale du mode lié au défaut est quasi-isotrope et concentrées autour de la cellule perturbée. Au point  $M$ , la déformée modale du mode lié au défaut n'est plus isotrope sous influence du vecteur d'onde, mais reste localisé autour de la cellule perturbée.

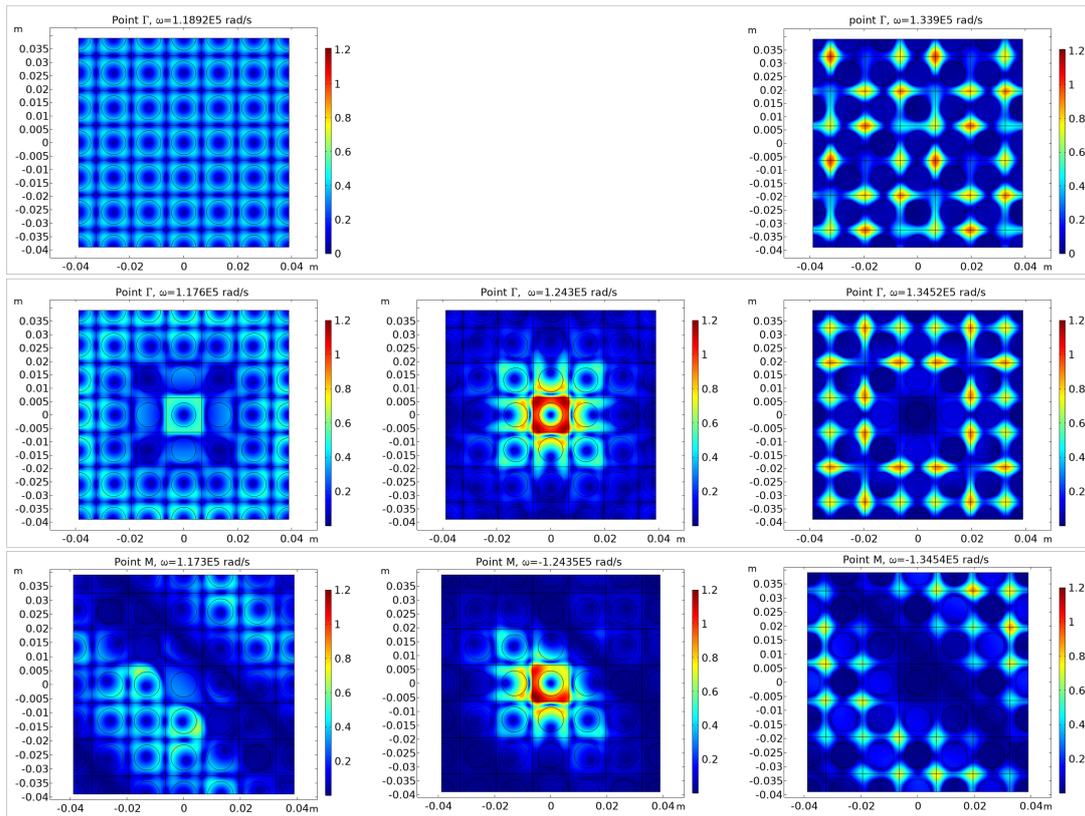


FIGURE 11 – Déformée modale du mode généré par le défaut (2e colonne) et des deux modes propagatifs voisins (1e et 3e colonnes) du milieu non perturbé (1e ligne) et du milieu avec un défaut en module d'Young au point  $\Gamma$  (2e ligne) et au point  $M$  (3e ligne)

Similaire au cas 1D, les modes localisés restent stables en augmentant l'échelle de la périodicité d'introduction de défauts dans la structure 2D. Pour un modèle multicellulaire de  $8L \times 8L$ , la déformée modale du mode localisé reste concentrée autour de la cellule perturbée (FIGURE 12).

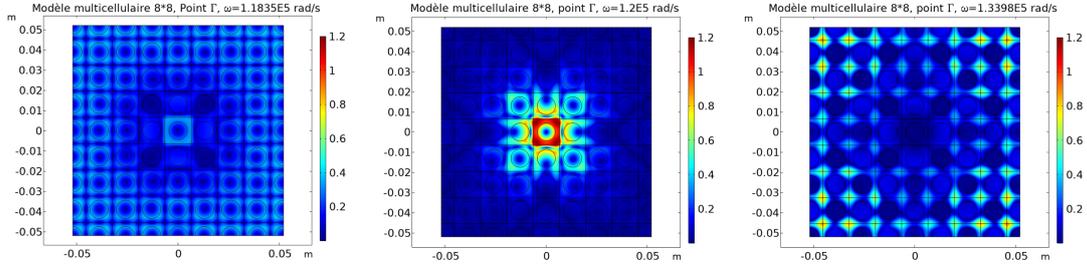


FIGURE 12 – Déformée modale dans le modèle multicellulaire de  $8L \times 8L$

Une étude paramétrique est réalisée sur l'influence la variation du rayon  $\frac{\delta R}{R}$  et celle du module d'Young  $\frac{\delta E_m}{E_m}$ . Les résultats sont représentés dans la FIGURE 13. Les modes de défauts apparaissent lorsque le rayon est inférieur à  $0.7R$ . En augmentant le module d'Young de la matrice, ils apparaissent à des fréquences de plus en plus élevées.

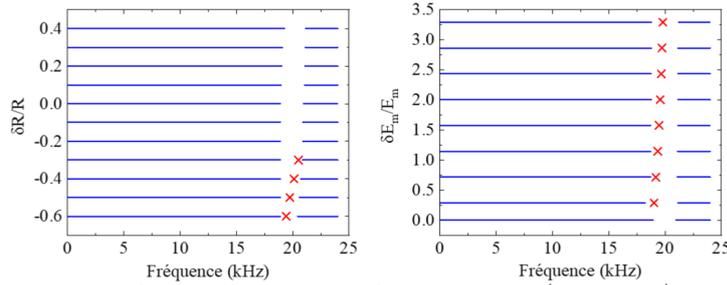


FIGURE 13 – Influence du niveau de perturbation en rayon (à gauche) et en module d'Young (à droite) sur les bandes passantes (traits bleus) et les modes localisés (croix rouges)

## 4 Conclusion

Une approche pour étudier les effets des défauts locaux introduits dans un milieu périodique sur la propagation des ondes est développée. L'existence de modes localisés situés à l'intérieur des bandes interdites de fréquence des milieux périodiques est montrée, et leur déformées modales sont étudiées par simulation numérique. L'apparition des modes localisés n'est que peu influencée par l'amplitude des défauts et ils deviennent stable lorsque l'échelle sur laquelle ils sont introduits devient de plus en plus grande. Cependant, leurs fréquences propres varient de façon monotone avec l'amplitude de perturbation des défauts. Il serait intéressant d'investiguer le lien entre ces modes de défauts et les modes d'ondes topologiques par des futures études.

## Références

- [1] Schuler S, Schall D, Neumaier D, et al. *Graphene photodetector integrated on a photonic crystal defect waveguide*, Acs Photonics, 5(12) : 4758-4763, 2018.
- [2] Kaina N, Causier A, Bourlier Y, et al. *Slow waves in locally resonant metamaterials line defect waveguides*, Scientific Reports, 7, 15105, 2017.
- [3] Tokushima M, Kosaka H, Tomita A, et al. *Lightwave propagation through a 120 sharply bent single-line-defect photonic crystal waveguide*, Applied physics letters, 76(8) : 952-954, 2000.
- [4] Pham K, Mercier J F, Fuster D, et al. *Scattering of acoustic waves by a nonlinear resonant bubbly screen*, Journal of Fluid Mechanics, 906, 2021.
- [5] Maurel A, Pham K. *Multimodal method for the scattering by an array of plates connected to an elastic half-space*, The Journal of the Acoustical Society of America, 146(6) : 4402-4412, 2019.
- [6] Tie B, Tian B Y, Aubry D. *Theoretical and numerical investigation of HF elastic wave propagation in two-dimensional periodic beam lattices*, Acta Mechanica Sinica, 29(6) : 783-798, 2013.
- [7] Tie B, Tian B Y, Aubry D. *Theoretical and numerical modeling of membrane and bending elastic wave propagation in honeycomb thin layers and sandwiches*, Journal of Sound and Vibration, 382 : 100-121, 2016.