

Sur une approche espace-temps isogéométrique pour les comportements non-linéaires dissipatifs

S. Lejeunes¹, D. Eyheramendy¹

¹ LMA, Aix-Marseille Univ., Centrale Marseille, CNRS, {lejeunes,eyheramendy}@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — A partir de formulations variationnelles adaptées, nous proposons de considérer de nouveaux schémas de résolution pour les problèmes de structures à base de comportement viscoplastiques ou viscoélastiques. Ces modèles sont classiquement formulés à l'aide de variables internes et conduisent à un jeu d'équations constitué d'équations bilans et d'équations d'évolutions. L'originalité de notre approche repose sur le traitement global (monolithique) de ces équations par une approche espace-temps isogéométrique ce qui nous permet d'obtenir des intégrateurs multi-grilles (hétérogènes et/ou asynchrones).

Mots clés — IGA, espace-temps, viscoélasticité, viscoplasticité.

1 Introduction

Le paradigme dominant dans les codes éléments-finis pour intégrer des comportements matériaux formulés à partir de modèles locaux, i.e. à variables internes, sans gradient, consiste à résoudre localement (aux points de Gauss) les équations d'évolutions qui définissent le comportement. Cette stratégie présente l'avantage de pouvoir utiliser des schémas adaptés à chaque comportement et minimise le nombre d'inconnues globales à considérer. Ce schéma de résolution global (les équations bilan)/local (les équations d'évolutions) peut-être vu comme un schéma étagé particulier du système d'équations à résoudre. Cependant cette vision conduit bien souvent à des ordres (globaux) de convergence en temps assez faibles et peut-être limitant par ailleurs lorsque l'on souhaite introduire des couplages fort entre les différentes équations (cas thermomécanique par exemple). Par ailleurs, dans certaines situations, on peut se retrouver avec des phénomènes ayant des temps caractéristiques très différents (par exemple si l'on utilise un modèle de Maxwell généralisé pour la viscosité ou dans un cadre multiphysiques) ce qui peut conduire à devoir utiliser de petit pas de temps globaux.

On peut trouver dans la littérature des alternatives qui permettent d'améliorer la convergence comme par exemple la méthode LATIN (voir par exemple [1]) qui utilise des approximations adaptées (dans un cadre espace-temps) mais qui conserve une vision séparée du jeu d'équation (local/global) conduisant ainsi à un schéma alterné de résolution. D'autres auteurs proposent de regrouper les équations à résoudre sous la forme d'un système différentiel algébrique de manière à pouvoir définir un intégrateur en temps commun au système (DIRK, HERK, BDF, etc) ce qui permet de construire des schémas d'ordre élevés puis à résoudre de manière alternée le système algébrique résultant en conservant la séparation global/local (voir par exemple [2]). Enfin on peut également trouver des méthodes permettant de combiner différents intégrateurs pour adapter au mieux le schéma numérique à la situation en combinant par exemple des schémas explicites et implicites éventuellement d'ordre différents (voir par exemple [3]).

Dans le cas de modèles non-locaux (à gradient par exemple), les variables internes sont considérées comme des champs inconnus supplémentaires et le système d'équation est résolu de manière monolithique à l'aide de formulation multi-champs (c.f. [4]). Notre approche s'inscrit dans cette dernière catégorie. Nous utilisons des formulations espace-temps en considérant l'ensemble des variables (c.a.d y compris les variables internes) comme des champs inconnus. Nous approximations ensuite ces variables par des fonctions de formes (de type NURBS) définies en espace et en temps. Suivant que nous utilisons des formulations en Galerkin continu ou discontinu, le problème d'évolution non-linéaire revient à résoudre soit un système d'équation soit une suite de systèmes d'équations itérativement sur un domaine espace/temps. Les systèmes obtenus sont de plus grandes tailles qu'avec les approches étagées/alternées mais offrent de nouvelles possibilités. Nous pouvons très facilement jouer sur l'ordre des schémas (en

modifiant l'ordre des fonctions d'interpolation), nous pouvons construire des schémas multi-grilles hétérogènes et/ou asynchrones (en considérant des grilles et des approximations différentes pour chaque champs). Ceci permet d'atteindre des ordres de convergence très élevés qui compense largement le surcoût en terme du nombre de degré de liberté. D'autre part dans le cas de formulations en Galerkin continu, nous pouvons utiliser des méthodes de parallélisations en espace et en temps (décomposition de domaine espace-temps) ce qui est impossible avec des approches classiques. Dans des travaux antérieurs nous avons pu montrer que ce type d'approche présente un intérêt certain pour des applications en dynamique (voir [5]) dans le cadre élastique (linéaire et non-linéaire). Nous proposons ici d'étendre ces applications aux cas des matériaux à effet d'histoire.

2 Exemple d'une formulation viscoélasticité en grandes déformations

En suivant l'approche qui consiste à définir des formes variationnelles incrémentales (i.e. en combinant l'inégalité de Clausius-Duhem et le principe des puissances virtuelles) nous pouvons formuler des potentiels incrémentaux qui sous-tendent l'ensemble du système d'équation à résoudre. Par exemple, en considérant le potentiel suivant adapté au cas de la viscoélasticité quasi-incompressible en grandes déformations :

$$L(\dot{\mathbf{u}}, \dot{q}, \dot{\mathbf{C}}_v^i) = \int_Q \left\{ \rho_0 \Phi(\bar{\mathbf{C}}, q, \bar{\mathbf{C}}_e^i) - \rho_0 \beta(J, q) + \zeta(\dot{\mathbf{C}}_v^i) \right\} dQ - \int_Q \mathbf{f} \dot{\mathbf{u}} dQ - \int_0^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{T} \dot{\mathbf{u}} dS dt \quad (1)$$

ou $\mathbf{u}$ est le champ cinématique, q est un champ de pression, $\dot{\mathbf{C}}_v^i$ une variable interne correspondant au i^{eme} tenseur de déformation élastique (provenant de la décomposition multiplicative du gradient de la transformation), Φ et β sont des potentiels d'énergie libre et ζ un potentiel de dissipation. Le domaine d'intégration, noté Q , représente le domaine espace-temps. On peut montrer que l'évolution des différentes variables est régie par un principe de stationnarité du potentiel L tel que :

$$\left\{ \dot{\mathbf{u}}, \dot{q}, \dot{\mathbf{C}}_v^i \right\} = \text{Arg} \left\{ \inf_{\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}^u} \sup_{\dot{q} \in \mathcal{H}^q} \inf_{\dot{\mathbf{C}}_v^i} L(\dot{\mathbf{u}}, \dot{q}, \dot{\mathbf{C}}_v^i) \right\} \quad (2)$$

En calculant les variations du potentiel précédent, on peut trouver les équations d'Euler-Lagrange associées au principe variationnel précédent, on obtient :

$$\delta_{\dot{\mathbf{u}}} L \equiv \int_Q \mathbf{\Pi} : \mathbf{F}(\delta \dot{\mathbf{u}}) dQ - \int_Q f \delta \dot{\mathbf{u}} dQ - \int_0^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{T} \delta \dot{\mathbf{u}} dS dt = 0 \quad (3)$$

$$\delta_{\dot{q}} L \equiv \int_Q \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial \beta}{\partial q} \right) \delta \dot{q} dQ = 0 \quad (4)$$

$$\delta_{\dot{\mathbf{C}}_v^i} L \equiv \int_Q \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_v^i} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_v^i} + \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\mathbf{C}}_v^i} \right) : \delta \dot{\mathbf{C}}_v^i dQ = 0 \quad i = 1..n \quad (5)$$

ou $\mathbf{\Pi}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchoff et $\mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_v^i}$ est un opérateur de projection déviatorique dans la configuration Lagrangienne. On retrouve donc les équations globales/locales classique d'un modèle de Maxwell généralisé en quasi-statique. L'équation (3) correspond à l'équation d'équilibre, l'équation (4) correspond à une relation de compressibilité et les équations (5) correspondent aux lois d'évolutions d'un modèle viscoélastique de type Maxwell (à plusieurs branches). On obtient une forme variationnelle mixte ou les évolutions $\{\dot{\mathbf{u}}, \dot{q}, \dot{\mathbf{C}}_v^i\}$ sont les inconnues du problème (aux quelles il faut bien sur ajouter les conditions initiales et les éventuelles conditions de bord de type Dirichlet).

3 Discrétisation IGA espace-temps (cas en Galerkin continue)

A partir de la forme variationnelle précédente (ou d'une autre formulation pour d'autre type de comportement) nous pouvons obtenir une forme discrétisée espace temps en utilisant l'analyse isogéométrique. Les fonctions d'approximations sont des NURBS d'ordre p , notées $R_{i,p}(\xi)$ pour la i^{eme} fonction

de base, et construites à partir d'un vecteur de nœuds défini dans un espace paramétrique. L'approximation espace-temps est construite de manière tensorielle, ainsi dans le cas 1D (espace), le domaine espace temps est décrit par :

$$\begin{aligned} t(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,p}(\xi) R_{j,p}(\eta) B_{i,j}^t \\ x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,p}(\xi) R_{j,p}(\eta) B_{i,j}^x \end{aligned} \quad (6)$$

les termes $\mathbf{B}_{i,j} = \{B_{i,j}^t, B_{i,j}^x\}$ sont appelés points de contrôle. En utilisant une représentation sous forme matrice/vecteur de l'approximation, nous pouvons écrire les approximations des différents champs inconnus (toujours dans un cas 1D pour simplifier), tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^u(\xi, \eta) \mathbf{d}^u \\ q_h(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^q(\xi, \eta) \mathbf{d}^q \\ \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}_h}^1(\xi, \eta) - \mathbf{1} &= \mathbf{N}^c(\xi, \eta) \mathbf{d}^{c1} \\ &\vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}_h}^n(\xi, \eta) - \mathbf{1} &= \mathbf{N}^c(\xi, \eta) \mathbf{d}^{cn} \end{aligned} \quad (7)$$

Les fonctions d'approximation $\mathbf{N}^u, \mathbf{N}^q, \mathbf{N}^c$, peuvent former des bases d'approximations différentes ou identiques à la description du domaine espace temps. Nous pouvons notamment considérer des grilles différentes ou des ordres d'approximation ou de continuités non identiques par champ. L'avantage ici est lié à l'IGA : la formulation reste identique nous avons juste à modifier le maillage initial du domaine et l'ordre des fonctions qui sont construites très simplement par récurrence. A partir des expressions précédentes nous pouvons exprimer tous les opérateurs différentiels nécessaires. On a par exemple les dérivées premières en temps :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_h(\xi, \eta) &= \mathbf{B}_t^u(\xi, \eta) \mathbf{d}^u \\ \dot{q}_h(\xi, \eta) &= \mathbf{B}_t^q(\xi, \eta) \mathbf{d}^q \\ \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{v}_h}^1(\xi, \eta) &= \mathbf{B}_t^c(\xi, \eta) \mathbf{d}^{c1} \\ &\vdots \\ \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{v}_h}^n(\xi, \eta) &= \mathbf{B}_t^c(\xi, \eta) \mathbf{d}^{cn} \end{aligned} \quad (8)$$

Ceci nous conduit à établir une forme discrète du principe variationnel précédent, tel que :

$$\left\{ \mathbf{d}^u, \mathbf{d}^q, \mathbf{d}^{c1}, \dots, \mathbf{d}^{cn} \right\} = \text{Arg} \left\{ \text{stat}_{\mathbf{d}^u, \mathbf{d}^q, \mathbf{d}^{c1}} L_h(\dot{\mathbf{u}}_h, \dot{q}_h, \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{v}_h}^i) \right\} \quad (9)$$

Ce qui revient chercher la solution qui annule le résidu suivant :

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}^u, \mathbf{d}^q, \mathbf{d}^{c1}, \dots, \mathbf{d}^{cn}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_e \int_{Q_e} \mathbf{B}_{xt}^u \mathbf{\Pi} \det(j) d\xi d\eta - \mathcal{A}_e \int_{Q_e} \mathbf{B}_t^u \mathbf{f} \det(j) d\xi d\eta \\ - \mathcal{A}_e \int_{S_e} [\mathbf{B}_t^u \mathbf{T}]_0^L \sqrt{\frac{\partial t^2}{\partial \xi} + \frac{\partial t^2}{\partial \eta}} d\xi d\eta \\ \mathcal{A}_e \int_{Q_e} \rho_0 \mathbf{B}_t^{qT} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \beta}{\partial q} \right) \det(j) d\xi d\eta \\ \mathcal{A}_e \int_{Q_e} \mathbf{B}_t^{cT} \left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}}^1} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}}^1} + \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{v}}^1} \right) \det(j) d\xi d\eta \\ \vdots \\ \mathcal{A}_e \int_{Q_e} \mathbf{B}_t^{cT} \left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}}^n} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{v}}^n} + \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{v}}^n} \right) \det(j) d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (10)$$

ou $\mathcal{A}_e$ est un opérateur d'assemblage et $\mathbf{B}_{xt}''$ correspond au gradient des vitesses, tel que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_h = \mathbf{B}_{xt}''(\xi, \eta) \mathbf{d}'' \quad (11)$$

Le jacobien $j(\xi, \eta)$ provient de la paramétrisation du domaine espace-temps. La solution du système non-linéaire précédent peut-être obtenue en utilisant une méthode de Newton.

D'autres formes variationnelles de ce type peuvent être obtenues pour des comportements viscoplastique par exemple ou pour des modèles à gradient. On peut également utiliser des approches en Galerkin discontinu en temps afin de pouvoir décomposer la résolution sur le domaine espace temps en sous-domaine temporels reliés entre eux par des conditions de continuité faible afin d'établir un schéma de résolution incrémental.

4 Un exemple d'application en viscoélasticité non-linéaire

Pour illustrer l'intérêt de l'approche, on considère un exemple très simple correspondant à un cas de traction/compression homogène sur une plaque en déformation plane (avec la formulation précédemment décrite). Le domaine de calcul est donc dans ce cas un cube unitaire sur lequel nous appliquons les conditions de bord et de chargement qui sont présentés sur la figure 1. Afin de correctement appliquer le signal harmonique en temps, nous utilisons un algorithme d'interpolation pour correctement définir les valeurs aux points de contrôle (les fonctions NURBS ne sont interpolantes qu'en un nombre très limité de points).

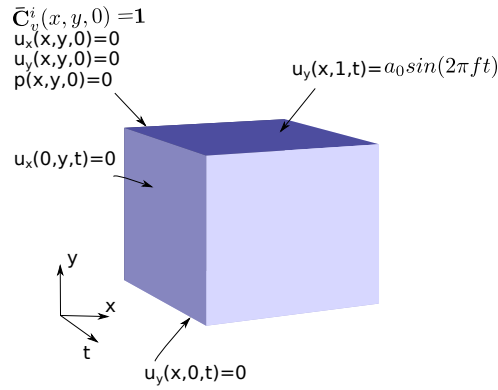


FIGURE 1 – Domaine espace-temps et conditions aux limites et initiales

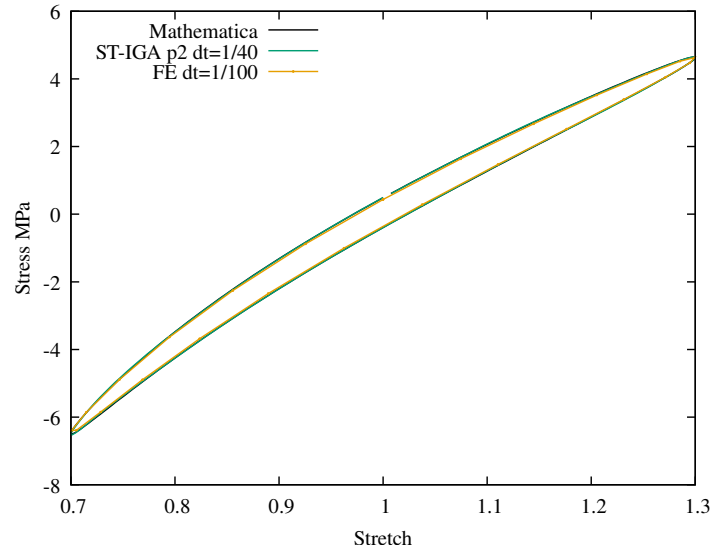
Pour ce test nous pouvons calculer une solution semi-analytique de référence en utilisant l'hypothèse d'homogénéité des champs. La figure 2, montre une comparaison des solutions obtenus avec Mathematica (solution de référence semi-analytique), avec des éléments-finis classiques ou nous avons utilisé un schéma d'Euler implicite, et avec la méthode espace-temps proposé. Pour l'espace-temps IGA ou pour les éléments finis la réponse étant homogène, nous utilisons uniquement 1 seul élément en espace (d'ordre 2 pour les deux modèle). Nous modifions la taille du pas de temps dans le cas éléments-finis ou la taille du maillage en temps pour l'espace-temps ($dt = 1/40$ revient à 40 éléments en temps sur intervalle $[0, 1]$). On peut remarquer que la réponse capturée par l'espace temps est très régulière comme attendu. A partir de la solution de référence, on peut également calculer une erreur en norme L_2 , tel que :

$$\text{err}^{ST-IGA,FE} = \int_0^{4/f} \left(\Pi_{yy}^{\text{Mathematica}}(t) - \Pi_{yy}^{ST-IGA,FE}(t) \right)^2 dt \quad (12)$$

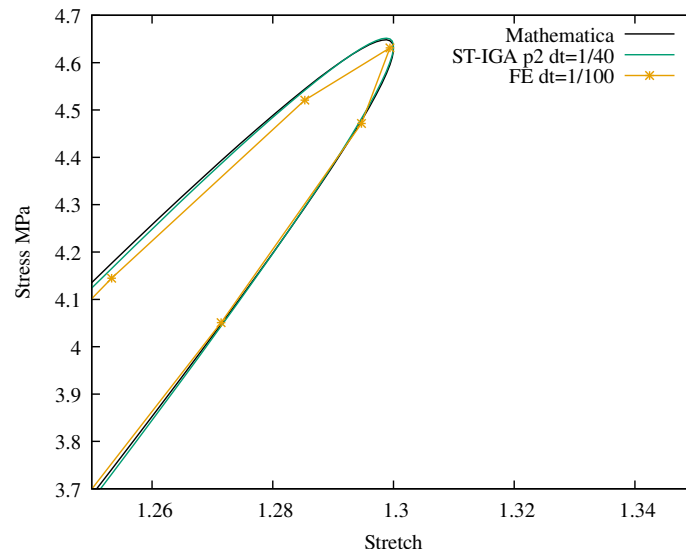
La figure 3, nous permet d'illustrer que la convergence est largement à l'avantage de la méthode espace temps. Nous obtenons un ordre de convergence 6 fois plus élevé qu'avec une approche éléments-finis classique.

4.1 Conclusion

Nous proposons dans cette communication une nouvelle approche pour traiter l'intégration de loi de comportement dissipatives et non-linéaires formulées à l'aide de variables internes. Cette approche



(a) 4^{eme} cycle d'hystérésis



(b) zoom sur le 4^{eme} cycle

FIGURE 2 – Comparaison des hystérésis obtenues avec Mathematica (référence), des éléments-finis (euler implicite) et la méthode espace-temps IGA.

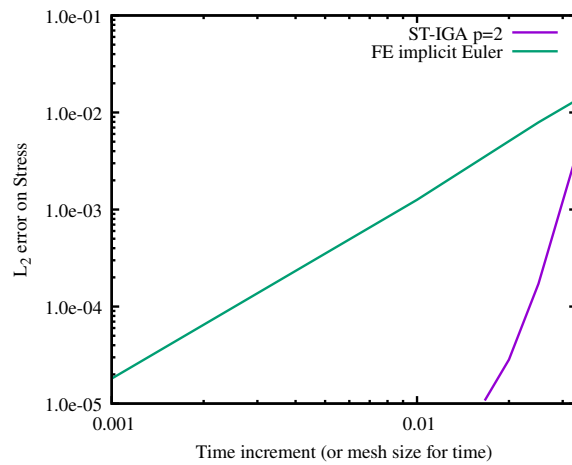


FIGURE 3 – Erreur L_2 sur la réponse en contrainte par rapport à la solution de référence

montre des résultats tout à fait prometteur en terme de vitesse de convergence qui permet de compenser son coût numérique puisque l'ensemble des variables internes sont considérées comme des champs inconnus qui sont approximées sur le domaine espace-temps. Par ailleurs cette approche ouvre de nouvelles possibilités pour traiter des systèmes d'équations dépendant du temps ou les inconnues exhibent des temps caractéristiques très différents. En effet nous pouvons facilement obtenir des modèles numériques adaptés en jouant sur les discrétisations de ces champs (maillages) et sur les ordres d'approximation. Par ailleurs l'IGA permet également de contrôler la taille du support des fonctions (en temps et en espace) en jouant sur l'ordre de continuité ce qui offre beaucoup plus de souplesse qu'avec des éléments-finis classiques et qui pourrait représenter un intérêt pour des approches espaces-temps.

Références

- [1] P. Ladevèze. *The large time increment method or the analyse of structures with nonlinear constitutive relation described by internal variables (in french)*. Comptes Rendus Académie des Sciences Paris, 309(II), 1095–1099, 1989.
- [2] T. Netz, S. Hartmann. *A monolithic finite element approach using high-order schemes in time and space applied to finite strain thermo-viscoelasticity*. Computers and Mathematics with Applications, 70, 1457-1480, 2015.
- [3] A. Gravouil, A. Combescure, M. Brun. *Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics*. Int. J. Numer. Meth. Engng, 102, 202–23, 2015.
- [4] C. Miehe. *A multi-field incremental variational framework for gradient-extended standard dissipative solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, 898–923, 2011
- [5] C. Saadé, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, R. Saad. *Space-Time Isogeometric Analysis for linear and non-linear elastodynamics*. Computers and Structures, 254, 2021