

# Nucléation de fissures sous charges multiaxiales dans les modèles régularisés de rupture du type champ de phase

C. Zolesi<sup>1</sup>, C. Maurini<sup>1</sup>, L. De Lorenzis<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, Paris, France, {camilla.zolesi, corrado.maurini}@sorbonne-universite.fr

<sup>2</sup> Department of Mechanical and Process Engineering, ETH Zürich, Switzerland, ldlorenzis@ethz.ch

**Résumé** — La version régularisée du modèle de rupture fragile introduit par Francfort et Marigo est un particulier modèle d'endommagement à gradient. Il a été montré que cette approche permet de prédire quantitativement non seulement la propagation de fissures, mais aussi la nucléation en mode I, grâce à l'introduction d'une longueur caractéristique. Dans cette contribution on discute les possibles modifications du modèle originaire pour prédire correctement la nucléation sous chargement multiaxiale.

**Mots clés** — Endommagement, Rupture, Nucléation.

## 1 Introduction

Le modèle variationnel de la rupture fragile de Francfort et Marigo [5] est une approche basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie composée par une partie élastique et une partie dissipative. La version régularisée de ce modèle [2], appelée aussi "champ de phase", a été initialement conçu comme une méthode dont l'énergie doit  $\Gamma$ -converger vers celle de l'approche de Francfort et Marigo [5] quand le paramètre de régularisation tend à zéro. Néanmoins, le modèle régularisé est aussi une classe spécifique des modèles à gradient d'endommagement qui prédit la nucléation et la propagation de fissures à partir de la perte de stabilité de la solution d'endommagement homogène. Ce mécanisme est réglé sur la base d'un paramètre, la longueur interne, qui n'est plus vu seulement comme un paramètre de régularisation du modèle, mais devient aussi une caractéristique du matériau. Par conséquent, il n'est pas nécessaire qu'il tende vers zéro, mais il est plutôt fixé sur la base de la charge critique en traction. L'analyse de Tanné et al. [7] s'insère dans ce contexte et montre comment les approches régularisés du type champ de phase peuvent prédire quantitativement la nucléation de fissures en mode-I.

Sous charges multiaxiales, une décomposition d'énergie s'avère tout de même nécessaire pour éviter l'interpénétration des surfaces de fissure en compression et décrire le comportement non-symétrique en traction et compression. Les décompositions actuellement disponibles, *e.g.* [1, 6], ne sont pas suffisamment flexibles [3] parce qu'elles ne permettent pas de reproduire en même temps les contraintes critiques en traction et compression (ou en effort tranchant) mesurées expérimentalement. Pour résoudre ce problème, une nouvelle décomposition a été proposée en [3] pour reproduire une surface de nucléation paramétrique à la Drucker-Prager qui peut être réglée sur la base des contraintes critiques mesurées en traction et compression.

Dans cette contribution, le nouveau modèle théorique est implémenté numériquement pour vérifier les courbes analytiques de nucléation. De plus, l'étude est étendue à l'analyse des modes de localisation sous charges multiaxiales du comportement en propagation. Cela implique de traiter les non-linéarités introduites par le nouveau modèle et les problèmes de verrouillage numérique et de mauvais conditionnement des systèmes linéaires à résoudre.

Par la suite, les vecteurs et les tenseurs du deuxième ordre sont notés en gras, par exemple  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  pour le déplacement et le tenseur des contraintes.

## 2 La formulation du modèle régularisé du type champ de phase avec décomposition de la densité d'énergie élastique

### 2.1 Le problème variationnel

L'approche du type champ de phase à la fracture des matériaux fragiles est basée sur le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{u}, \alpha \in C_t \times \mathcal{D}(\alpha_{t-1})} \mathcal{E}_{tot}(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} [\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \psi_{diss}(\alpha, \nabla \alpha)] d\Omega \quad \text{avec } \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) = a(\alpha)\varphi_D(\boldsymbol{\varepsilon}) + \varphi_R(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1)$$

où  $\mathcal{E}_{tot}$  est la fonctionnelle de l'énergie totale,  $\mathbf{u}, \alpha, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  sont respectivement le déplacement, le champ d'endommagement et le tenseur des déformations,  $\varphi$  et  $\psi_{diss}$  sont la densité d'énergie élastique et dissipée et  $C_t$  et  $\mathcal{D}(\alpha_{t-1})$  sont les espaces admissibles des champs de déplacement et d'endommagement au temps  $t$  à partir de l'état d'endommagement précédent  $\alpha_{t-1}$ . Le problème de minimisation est donc résolu sous la contrainte d'irréversibilité du champ d'endommagement.

Le champ d'endommagement  $\alpha$  décrit un matériau sain quand il est égal à zéro ; en revanche quand il est égal à un, le matériau est fissuré. La densité d'énergie élastique est décomposée entre une partie endommageable ( $\varphi_D$ ) et une partie résiduelle ( $\varphi_R$ ) et  $a(\alpha)$  est une fonction de dégradation qui vaut un en absence d'endommagement et zéro quand le matériau est complètement endommagé.

La solution au problème de minimisation (1) implique que l'incrément d'énergie pour chaque solution soit non négatif. L'inégalité variationnelle suivante est obtenue en gardant seulement l'expansion en séries au premier ordre de l'incrément d'énergie :

$$\mathcal{E}'_{tot}(\mathbf{u}, \alpha)(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\alpha} - \alpha) \geq 0, \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\alpha}) \in C_t \times \mathcal{D}(\alpha_{t-1}). \quad (2)$$

À partir de (2), pour des solutions assez régulières, on retrouve les deux conditions de stabilité au premier ordre, nécessaires au problème d'optimalité (1) : l'équation d'équilibre et le critère d'endommagement qui donne la surface de nucléation.

### 2.2 La décomposition de la densité d'énergie élastique

Pour le matériau non endommagé ( $\alpha = 0$ ) la somme entre la partie endommageable  $\varphi_D$  et la partie résiduelle  $\varphi_R$  de la densité d'énergie élastique doit correspondre à la densité d'énergie élastique d'un matériau sain,  $\varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  :

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, 0) = \varphi_D(\boldsymbol{\varepsilon}) + \varphi_R(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{avec} \quad \varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

en supposant le matériau non endommagé élastique linéaire. Il est possible de sélectionner la décomposition d'énergie en s'appuyant sur le problème de minimisation auxiliaire, introduit par Del Piero et Owen [4] et adapté au champ de phase par Freddi et Royer-Carfagni [6] :

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) \quad \varphi_R(\boldsymbol{\varepsilon}) := \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) = \varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon})),$$

où  $\boldsymbol{\eta}$  est le tenseur des déformations inélastiques et  $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  l'ensemble convexe qui contraint les déformations inélastiques du problème auxiliaire et par conséquent, la décomposition d'énergie. Si l'on choisit  $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  adapté, on peut retrouver la décomposition d'Amor et al. [1] et celle de Freddi et Royer-Carfagni [6] en  $2D$ . De plus, en introduisant un ensemble convexe  $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  dépendant d'un nouveau paramètre  $\gamma$ , comme dans [3] :

$$\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{ \boldsymbol{\eta} \in \text{Sym} : \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) \geq \gamma \|\boldsymbol{\eta}_{dev}\| \} \quad \text{avec } \gamma \geq 0$$

on obtient une nouvelle décomposition qui reproduit une surface de nucléation paramétrique à la Drucker-Prager :

$$\varphi_R(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \gamma \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}\| < \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \mu \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} + \frac{1}{2} \kappa \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{pour } \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}\| < -\frac{\gamma \kappa}{2\mu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\kappa \mu}{\kappa \gamma^2 + 2\mu} [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \gamma \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}\|]^2 & \text{pour } \gamma \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}\| \geq \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \ \& \ \|\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}\| \geq -\frac{\gamma \kappa}{2\mu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases}$$

$$\varphi_D(\varepsilon) = \begin{cases} \mu \varepsilon_{\text{dev}} \cdot \varepsilon_{\text{dev}} + \frac{1}{2} \kappa \text{tr}^2(\varepsilon) & \text{pour } \gamma \|\varepsilon_{\text{dev}}\| < \text{tr}(\varepsilon) \\ 0 & \text{pour } \|\varepsilon_{\text{dev}}\| < -\frac{\gamma \kappa}{2\mu} \text{tr}(\varepsilon) \\ \frac{1}{2(\kappa \gamma^2 + 2\mu)} [\kappa \gamma \text{tr} \varepsilon + 2\mu \|\varepsilon_{\text{dev}}\|]^2 & \text{pour } \gamma \|\varepsilon_{\text{dev}}\| \geq \text{tr}(\varepsilon) \ \& \ \|\varepsilon_{\text{dev}}\| \geq -\frac{\gamma \kappa}{2\mu} \text{tr}(\varepsilon) \end{cases}$$

### 2.3 Les surfaces de nucléation et l'influence du paramètre $\gamma$

Les surfaces de nucléation pour chaque modèle sont obtenues à partir de la deuxième condition nécessaire de stabilité au premier ordre : le critère d'endommagement qui peut être écrit en fonction du champ d'endommagement et du tenseur des déformations avec la densité d'énergie élastique. Si on utilise la densité d'énergie complémentaire élastique, on retrouve les surfaces de nucléation en fonction du champ d'endommagement et du tenseur des contraintes. Pour des états homogènes d'endommagement, on a donc :

$$\sigma \in \text{Sym} : \frac{\partial \varphi^*(\sigma, \alpha)}{\partial \alpha} \leq w_1 w'(\alpha)$$

On peut tracer les surfaces de nucléation pour les différentes décompositions d'énergie et donc pour un choix différent de  $\mathcal{K}_\varepsilon$ . Ici, pour simplifier, elles sont en 2D en fonction des composantes principales du tenseur des contraintes.

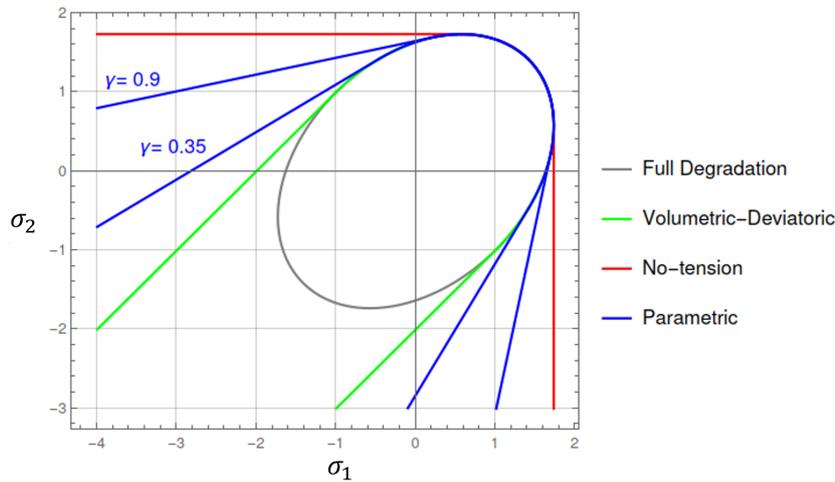
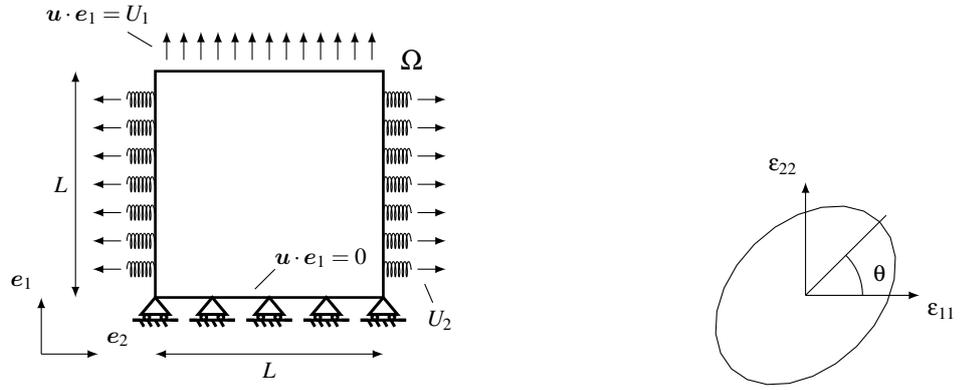


FIGURE 1 – Surfaces de nucléation 2D pour différentes décompositions d'énergie.

Le modèle *Full Degradation* correspond au premier introduit par Bourdin et al. [2] sans décomposition. Les modèles *No-tension* et *Volumetric-Deviatoric* sont respectivement ceux présentés par Freddi et Royer-Carfagni en [6] et par Amor et al. en [1]. La décomposition *Parametric* du nouveau modèle [3] introduit un paramètre  $\gamma$  qui permet une flexibilité plus importante sous charges multiaxiales. Par exemple, on peut régler la charge critique en compression ou en effort tranchant indépendamment de celle en traction comme on peut le voir dans la Figure 1 car  $\gamma$  gère la pente des droites.

Une des premières expériences numériques conduite est le test de nucléation sur une plaque soumise à un déplacement vertical et horizontal à travers des ressorts, comme on peut le voir dans la Figure 2a. En réglant  $U_1$  et  $U_2$ , on peut varier l'angle  $\theta$  de direction de charge (Figure 2b) et recouvrir numériquement les surfaces de nucléation pour les différents modèles. Dans la Figure 3, on peut observer une correspondance entre les résultats numériques et le calcul des surfaces analytiques.

De plus, la flexibilité du nouveau modèle nous permet de régler le paramètre  $\gamma$  pour modifier les surfaces de nucléation et observer dans les simulations par compression, la propagation de fissures sur la partie du matériau en traction (Figure 4).



(a) Géométrie et conditions aux bords du test de nucléation.

(b) Direction de charge  $\theta$ .

FIGURE 2 – Test de nucléation.

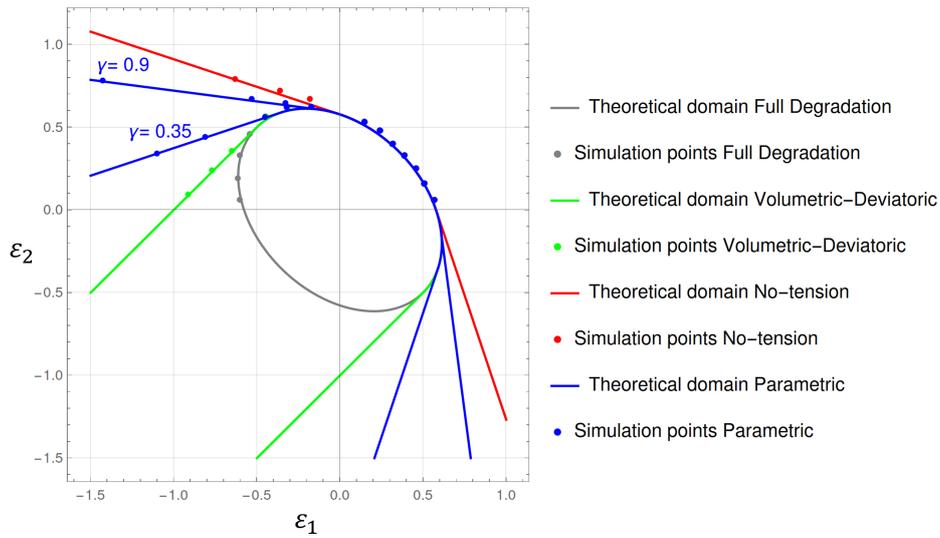


FIGURE 3 – Surfaces de nucléation 2D pour différentes décompositions d'énergie : comparaison entre les résultats numériques et les calculs analytiques.

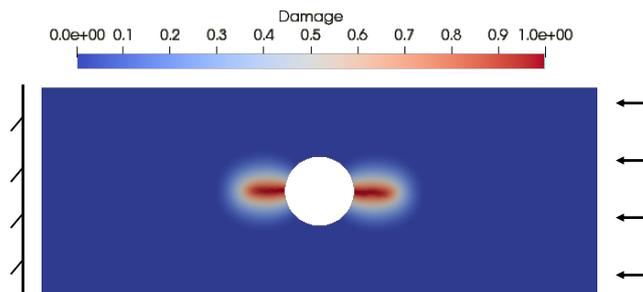


FIGURE 4 – Champ d'endommagement en compression en utilisant le nouveau modèle [3].

### 3 Conclusion

La nouvelle décomposition d'énergie introduit un paramètre  $\gamma$  qui permet une flexibilité plus importante sous charges multiaxiales. La validation numérique de la nucléation pour ce modèle a donné des résultats satisfaisants, mais la propagation présente encore des questions ouvertes liées aux non-linéarités introduites par le nouveau modèle, aux problèmes de verrouillage numérique et de mauvais conditionnement des systèmes linéaires à résoudre et à la propagation de fissures en compression (problème commun à toutes les décompositions).

## Références

- [1] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini. *Regularized formulation of the variation brittle fracture with unilateral contact : numerical experiments*, J. Mech. Phys. Solids 57, 1209–1229, 2009.
- [2] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture*, J. Mech. Phys. Solids 48, 797–826, 2000.
- [3] L. De Lorenzis, C. Maurini. *Nucleation under multi-axial loading in variational phase-field models of brittle fracture*, Int. J. Frac., 2021.
- [4] G. Del Piero, D.R. Owen. *Structured deformations of continua*, Arch. Ration. Mech. Anal. 124, 99–155, 1993.
- [5] G.A. Francfort, J.-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. Mech. Phys. Solids 46, 1319–1342, 1998.
- [6] F. Freddi, G. Royer-Carfagni. *Regularized variational theories of fracture : A unified approach*, J. Mech. Phys. Solids 58, 1154–1174, 2010.
- [7] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini. *Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture*, J. Mech. Phys. Solids 110, 80-99, 2018.