

Approches variationnelles de la rupture pour la prédiction de l'apparition des fissures transverses dans les stratifiés à plis croisés

Z. Karoui^{1,2}, C. Maurini¹, J. Berthe²

¹ Institut Jean le Rond d'Alembert, 4, Place Jussieu 75005 Paris, corrado.maurini@sorbonne-universite.fr

² ONERA, DMAS, CRD, 5, rue des fortifications, 59000 Lille {zakia.karoui, julien.berthe}@onera.fr

Résumé —

La fissuration transverse dans les composites stratifiés UD à plis-croisés soumis à traction uniaxiale est le premier phénomène présent dans les différents types d'endommagement qui se manifestent. L'objectif de cette étude est celui d'identifier les paramètres déterminant la création de ces motifs de fissuration qui peuvent être, d'une part, périodique (espacement égal entre les fissures) ou, d'autre part, apériodique. Nous nous proposons d'étudier ces schémas à travers des méthodes variationnelles de la rupture.

Mots clés — fissuration matricielle, prédiction des motifs de fissuration, approches variationnelles

1 Introduction : La fissuration matricielle des stratifiés à plis croisés

Les structures composites stratifiées sont caractérisées par des motifs de fissuration complexes. La compréhension de ces motifs de fissuration est indispensable dans plusieurs domaines d'applications. De nombreux ouvrages ont étudié d'un point de vue expérimental et théorique ces phénomènes dans des stratifiés à plis-croisés renforcés en fibres de carbone ou verre. Dans la configuration sandwich typique, les plis composant les couches externes sont orientés le long de la direction de chargement, disons 0° , et les plis à coeur ont des fibres orientées perpendiculairement, disons 90° , constituant ce que l'on appelle une séquence d'empilement $[0_n/90_m/0_n]$. Parmi tous les différents types d'endommagement progressif, trois sont ceux qui se produisent le plus souvent dans les stratifiés à plis croisés à fibres de carbone et résine époxy soumis à une traction unidirectionnelle : fissuration matricielle transverse, rupture interlaminaire à l'interface entre les plis à $0^\circ/90^\circ$ et rupture de fibres dans les plis à 0° , voir les articles suivants [14, 4]. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur la fissuration matricielle transverse qui se produit à coeur des stratifiés à plis croisés en fibre de carbone et matrice epoxy. Nous aborderons le problème dans le cadre de l'approche variationnelle de la rupture. Parvizi et Bailey [1] ont traité une configuration très similaire à celle qui sera abordée ici. Leurs stratifiés étaient composés de plis croisés $[0_n/90_m]_{sym}$ où le numéro des plis à coeur est modifié et les plis extérieurs à 0° sont maintenus constants. Ces stratifiés sont soumis à des essais de traction et montrent que l'échantillon se fissure de manière transverse, ayant origine au bord et se propageant instantanément dans l'épaisseur. Ces études montrent également que lorsque l'épaisseur des plis diminue, la déformation transverse à la rupture augmente [9, 17]. Lorsque la déformation augmente, la densité des fissures augmente aussi, ce qui conduit à une diminution de l'espacement entre les fissures et donc à une perte de rigidité des plis à 90° . La distribution des fissures transverses est un sujet d'étude récurrente qui débute avec [1, 2] dans leur démarche expérimentale, une approche analytique a aussi été développée afin de prédire cette distribution de fissures. L'analyse par *shear lag* avec deux paramètres statistiques de Weibull a été explorée. L'analyse par *shear lag* a été introduite par Parvizi, Garret et Bailey dans [2] dans un contexte unidimensionnel (1D). Ces études montrent que l'espacement des fissures dépend de la distribution des contraintes dans les couches à 90° . L'analyse par la méthode *shear lag* suppose que la contrainte longitudinale dans l'ensemble du pli croisé est uniforme dans l'épaisseur. Il s'agit bien sûr d'une hypothèse simpliste qui a été plus récemment généralisée en 2D et 3D par Berthelot [4]. Alors que la distribution de Weibull a d'abord été étudiée par Manders et al. [13], comme le souligne [5] il existe d'autres types de distributions telles que la distribution normale, la distribution log-normale et la distribution χ^2 , mais le choix doit être adapté au problème physique. Cependant, ces études montrent un schéma de fissuration uniforme (périodique). Seulement dans des

études plus récentes, [10, 11, 16, 18, 5], un effet d'aléatoire ou d'apériodicité a été pris en compte.

L'objectif de cette étude est d'étudier l'espacement des fissures dans les stratifiés à plis croisés unidirectionnels. Plus précisément nous considérons le matériau T700GC/M21 en fibre de carbone et résine époxy qui présente des fissures transverses principalement sous charge de traction, voir l'étude expérimentale de J. Berthe [3]. L'éprouvette peut être imaginée comme une barre composite bidimensionnelle composée de deux couches. Le matériau de la couche externe est considéré comme non endommageable et plus rigide que celui à coeur utilisé pour décrire les plis à 90°. Dans ce cadre, nous supposons dans un premier temps connaître le nombre de fissures divisant en segments l'éprouvette. Les questions auxquelles nous voulons principalement répondre dans ce travail sont les suivantes : Pour quel chargement des fissures apparaissent-elles ? Combien de segments apparaissent au total ? Les fissures sont-elles également espacées ? À partir de cette configuration, on étudie l'espacement des fissures et la périodicité ou apériodicité du motif de fissuration à travers un modèle variationnel en évitant toute distribution statistique de la contrainte, mais basé uniquement sur la minimisation de l'énergie potentielle. Avec une approche variationnelle de la rupture fragile à la Griffith nous visons à répondre à ces questions et finalement à comparer ce modèle avec une approche de minimisation locale, d'où le champ de phase. L'application des modèles de champ de phase pour l'étude de la rupture fragile est une question délicate et encore ouverte pour la recherche lorsqu'il s'agit de matériaux anisotropes tels que les composites. La rupture anisotrope dans de tels moyens remet en cause les fondamentaux de la rupture fragile car l'équivalence entre le principe de symétrie locale et le critère de taux de restitution d'énergie maximum n'est plus valide [15]. Bleyer [6] a proposé une première tentative d'extension de la modélisation du champ de phase dans les milieux élastiques orthotropes pour représenter la fissuration longitudinale et transverse. Cependant, selon [12] les effets anisotropes liés à l'énergie de surface nécessitent une formulation de champ de phase au moins du 4ème ordre, en plus d'être numériquement coûteuse.

1.1 Mise en place de la modélisation analytique du problème statique : Prédiction de l'espacements entre les fissures

Dans l'approche variationnelle de la rupture, l'état fissuré du système est déterminé par une condition de minimalité sur une fonctionnelle énergétique globale, somme de l'énergie élastique du corps fissuré et de l'énergie de surface due aux fissures. Nous étudions le cas particulier de la barre sandwich de longueur L sur la Figure 1 composée de deux couches externes identiques d'épaisseur H_o et d'un coeur d'épaisseur H_c . Notre analyse repose sur les hypothèses simplificatrices suivantes : (i) les couches externes sont supposées être élastiques linéaires et non endommageables, avec un tenseur de rigidité élastique \mathbb{A}_o ; (ii) Les plis à coeur sont élastique-fragiles, étant élastique linéaire jusqu'à la rupture, avec un tenseur de rigidité élastique \mathbb{A}_c et une ténacité à la rupture G_c . (iii) les fissures ne sont possibles que dans la partie centrale (c) et sont supposées se présenter sous la forme d'un nombre fini de $n - 1$ fissures droites orthogonales à l'axe de la barre et s'étendant sur toute l'épaisseur du coeur (voir la figure 1); (iv) le matériau composant les couches externes est plus rigide que celui à coeur; (v) nous supposons un modèle de contrainte plane 2D dans le plan $x - y$ et négligeons les non-linéarités géométriques. Pour terminer notre étude se développe dans un contexte isotrope statique qui par la suite sera développé dans un quasi-statique. Nous n'aborderons pas l'évolution dynamique ni l'anisotropie ici.

Le domaine 2d $\Omega \equiv \{(x, y) \in [0, L] \times [-H_c - H_o, H_c + H_o]\}$ est la configuration de référence du solide et

$$\Gamma(\underline{\ell}) \equiv \cup_{i=1}^{n-1} \Gamma_i(\underline{\ell}) \quad \text{avec} \quad \Gamma_i(\underline{\ell}) \equiv \left\{ x = \bar{x}_i := \sum_{j=1}^i \ell_j, y \in [-H_c, H_c] \right\} \quad (1)$$

est la fissure définie selon l'hypothèse (iii) ci-dessus, où \bar{x}_i sont les positions axiales de la fissure et $\underline{\ell} := \{\ell_i\}_{i=1}^n$ les espacements entre les fissures, voir Figure 1. Dans le modèle de fracture de Griffith, l'énergie de surface requise pour créer les fissures est proportionnelle à la surface de la fissure. Dans notre cas, il est facilement calculé comme étant $2(n - 1)G_c H_c$. Par conséquent, la fonctionnelle de l'énergie de Griffith se lit comme

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \underline{\ell}) := \mathcal{P}^{\text{tot}}(\mathbf{u}, \underline{\ell}) + 2(n - 1)G_c H_c, \quad \mathcal{P}^{\text{tot}}(\mathbf{u}, \underline{\ell}) := \int_{\Omega \setminus \Gamma(\underline{\ell})} \frac{1}{2} \mathbb{A}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \quad (2)$$

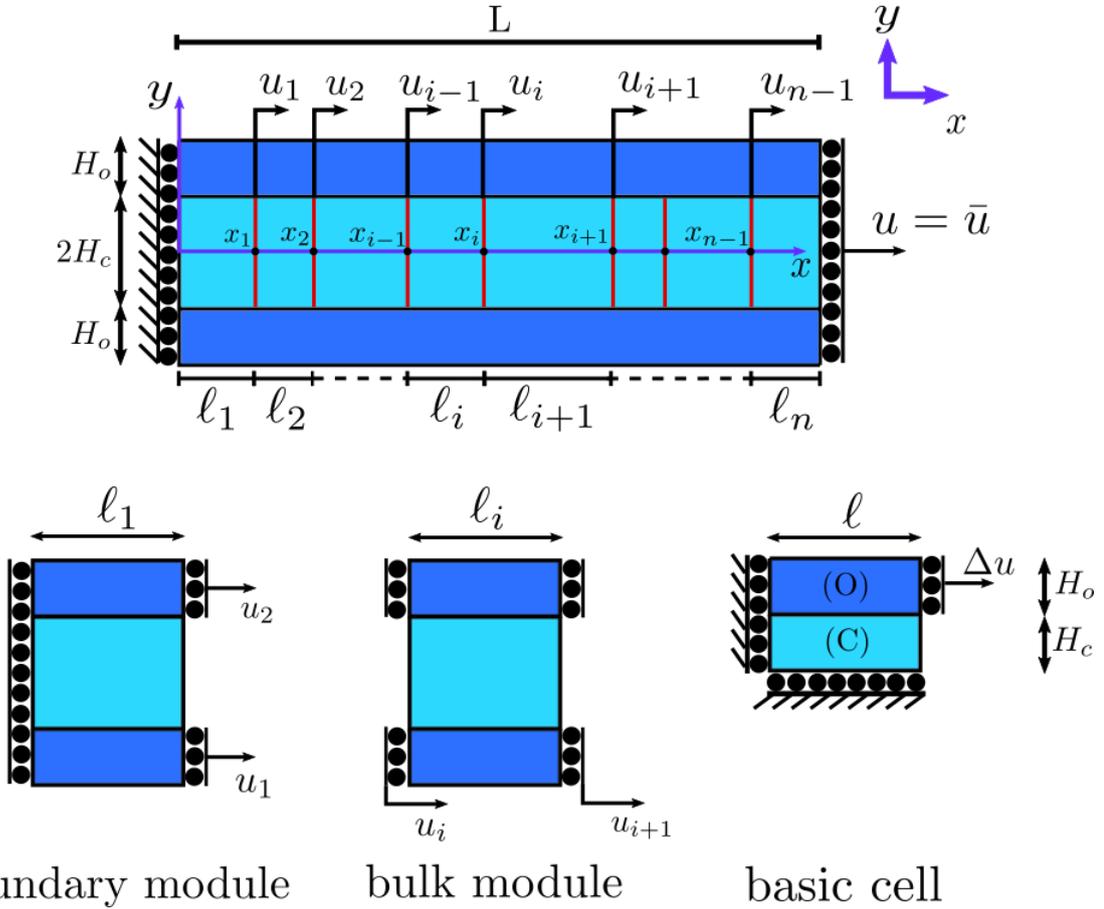


FIGURE 1 – En haut : barre sandwich avec $n-1$ fissures transverses dans la couche centrale. En bas : module limite et de volume et cellule élémentaire du système modulaire.

1.2 Problème de minimisation

La barre est chargée en traction par un dispositif dur imposant un déplacement axial nul du côté gauche et le déplacement axial \bar{u} du côté droit. Le champ de déplacement admissible doit respecter ces conditions aux limites de Dirichlet et doit être régulier sauf sur les fissures, où il peut sauter, à savoir

$$C_{\bar{u}}(\underline{\ell}) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma) : u_1(0, x_2) = 0, u_1(L, x_2) = \bar{u}, \forall x_2 \in [-H_c - H_o, H_c + H_o]\}, \quad (3)$$

où $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ est l'espace de Sobolev habituel des fonctions à dérivées premières carrées intégrables définies sur Ω et avec des valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Nous appliquons ici l'approche variationnelle de la rupture [7, 8] pour déterminer les espacements de fissures $\underline{\ell}$ pour un chargement donné. Dans un premier temps, nous supposons le nombre de fissures, $n - 1$, comme donné. Dans un deuxième temps, nous discuterons de la manière de déterminer le nombre de fissures en fonction du chargement. Dans les hypothèses ci-dessus, l'état fissuré de la barre de longueur L est déterminé comme la solution du problème de minimisation suivant

$$\min\{\mathcal{F}(\mathbf{u}, \underline{\ell}), \text{ avec } \underline{\ell} \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \ell_i = L, \mathbf{u} \in C(\underline{\ell})\} \quad (4)$$

Contrairement aux travaux précédents, nous ne supposons pas que l'espacement des fissures est uniforme.

Grâce à l'hypothèse de comportement élastique linéaire dans $\Omega \setminus \Gamma$, nous pouvons déterminer de manière unique le champ de déplacement et l'énergie élastique correspondante en fonction des espacements des fissures $\underline{\ell}$ uniquement, comme suit :

$$\mathbf{u}^*(\underline{\ell}) = \operatorname{argmin}\{\mathcal{P}_{\text{tot}}(\mathbf{u}, \underline{\ell}), \mathbf{u} \in C(\underline{\ell})\}, \quad \mathcal{P}_{\text{tot}}(\underline{\ell}) = \mathcal{P}_{\text{tot}}(\mathbf{u}^*(\underline{\ell}), \underline{\ell}) \quad (5)$$

Par conséquent, le problème variationnel (4) peut être réduit au problème d'optimisation sous contraintes suivant dans \mathbb{R}^n :

$$\min \left\{ F(\underline{\ell}), \quad \underline{\ell} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n \ell_i = L \right\}, \quad \text{avec} \quad F(\underline{\ell}) := P_{\text{tot}}(\underline{\ell}) + 2(n-1)G_c H_c. \quad (6)$$

Tant que le nombre de fissures $n-1$ est donné, l'énergie de surface est fixe, étant indépendante de l'espacement des fissures. Par conséquent, le problème clé est de trouver l'espacement optimal $\underline{\ell}$ pour minimiser l'énergie élastique $P_{\text{tot}}(\underline{\ell})$. À partir de cette formulation, nous pouvons faire une étude analytico-numérique qui nous permet d'estimer l'espacement des fissures. Ces résultats seront présentés dans la section suivante.

2 Espacement optimal entre les fissures

L'espacement optimal entre les fissures peut être trouvé en réformulant le problème de minimisation (6) comme un problème de maximisation. En sachant que l'énergie potentielle et son inverse s'expriment comme :

$$P_{\text{cell}}(\ell) = \frac{1}{2} K(\ell) \Delta u^2, \quad S(\ell) = \frac{1}{K(\ell)} = \frac{\Delta u^2}{2P_{\text{cell}}(\ell)} \quad (7)$$

La souplesse s'exprime donc comme :

$$S_{\text{tot}}(\underline{\ell}) = \frac{S(\ell_1)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} S(\ell_i/2) + \frac{S(\ell_n)}{2}, \quad K_{\text{tot}}(\underline{\ell}) = \frac{1}{S_{\text{tot}}(\underline{\ell})}, \quad \text{with} \quad S(\ell) = \frac{1}{K(\ell)} = \frac{\Delta u^2}{2P_{\text{cell}}(\ell)} \quad (8)$$

et le problème à résoudre devient :

$$\max \left\{ S_{\text{tot}}(\underline{\ell}), \quad \underline{\ell} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n \ell_i = L \right\} \quad (9)$$

En appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \frac{\partial S_{\text{tot}}(\ell_1^*, \ell_{n-1}^*, L - \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i)}{\partial \ell_i} = 0 \right\}_{i=1}^{n-1} \Leftrightarrow \begin{cases} S'(\ell_1^*) = S'(L - \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i^*), \\ S'(\ell_i^*/2) = S'(L - \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i^*) \quad \text{for } i = 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (10)$$

Le système d'équations (10) est un problème d'optimisation sous contrainte, donnant lieu à une première condition d'optimalité. Le système peut avoir une solution unique ou bien plusieurs solutions. Si la solution du système est unique, alors les longueurs des cellules, donc les longueurs des segments entre les fissures, seront de même taille. Dans le cas contraire, les segments auront des tailles différentes données par les solutions ℓ_i .

2.1 Prédiction de l'apparition d'une fissure

Nous commençons par le cas plus simple, qui est celui d'une cellule qui se fissure une fois, donnant lieu à deux segments. À travers un code éléments finis réalisé avec FEniCS, on résout le problème de minimisation à la Griffith de l'équation (6) et on obtient les expressions de la souplesse et des dérivées correspondantes. Ces dérivées sont tracées pour un cas particulier sur la figure 2. Comme on peut le voir dans cette image, la courbe présente une concavité. Le tracé bleu de la courbe nous donne toutes les solutions uniques au système (10), c'est-à-dire toutes les solutions ℓ_i , en fonction de la longueur totale L de la cellule de départ, où la cellule se divisera en 2 segments identiques. Le tracé rouge, au contraire, représente le régime des solutions de différentes tailles.

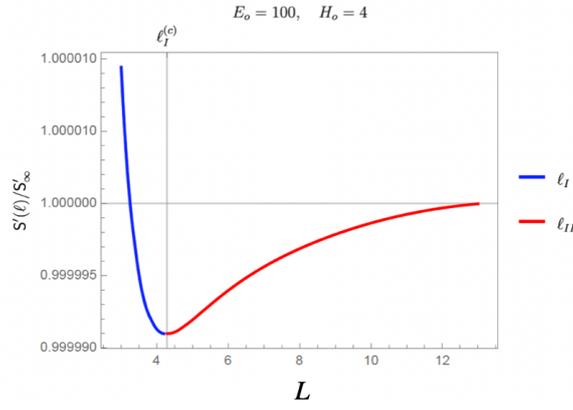


FIGURE 2 – Tracé de la dérivé de $S(\ell)$ en fonction de différentes longueurs de barres L , pour les valeurs adimensionnelles : $E_o = 100, E_c = 1, H_o = 4, H_c = 1$. Les quantités ℓ_I et ℓ_{II} représentent les solutions uniques et multiples au système (10) respectivement.

3 Approche locale

Les simulations numériques effectuées à travers la méthode de phase field montrent qu'il existe en effet une fissuration périodique et une apériodique, voir la Figure 3. Le but de cette étude a été de développer une méthode analytico-numérique permettant de résoudre le problème de minimisation globale (6), ainsi qu'en étudier sa stabilité. Le phénomène de fissuration matricielle a par la suite été comparé aux motifs de fissuration trouvés par minimisation locale (approche variationnelle Phase Field) afin de connaître les points limites de prédiction des motifs de fissuration dans le modèle de minimisation globale et locale. Nous envisageons de conclure cette étude par une comparaison finale avec les données des campagnes expérimentales.



FIGURE 3 – Exemple de barre de longueur 8 (gauche) avec fissure périodique et barre de longueur 9 et fissure apériodique (droite).

Les simulations numériques présentées à la Figure 4 sont faites pour des paramètres différents que ceux montré à la Figure 2. Les courbes de minimisation globale correspondante montrent une concavité (minimum global) pour une cellule de longueur 6, ce qui nous fait prédire une bifurcation à partir d'une barre de longueur total $L = 12$. Les simulations numériques par Phase Field nous montrent qu'il existe un régime pour lequel il est effectivement possible de retrouver le schéma de fissuration résultant de la minimisation globale. Comme on peut le voir à la figure 4, la courbe de bifurcation de minimisation globale et les points associés de minimisation par Phase Field suivent la même allure. Cependant ces résultats ne sont pas aussi facilement comparables. En effet la minimisation locale est aussi gouvernée par un paramètre clé : la longueur interne ℓ . Cette longueur semble jouer un rôle crucial sur la nucléation, comme l'on peut voir sur la Figure 5, et donc sur la longueur critique de bifurcation.

Pour rappel, la méthode de Phase Field (AT1) appliquée est la suivante :

$$\mathcal{E}_\ell(u, \alpha) = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 \mathbb{A}_0 \varepsilon \cdot \varepsilon dx}_{\text{Énergie Élastique}} + \underbrace{\frac{3G_c}{8} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha}{\ell} + \ell |\nabla \alpha|^2 \right) dx}_{\text{Ennergie Dissipée}} \quad (11)$$

où α est la variable d'endommagement scalaire irréversible et ℓ est la longueur interne du modèle.

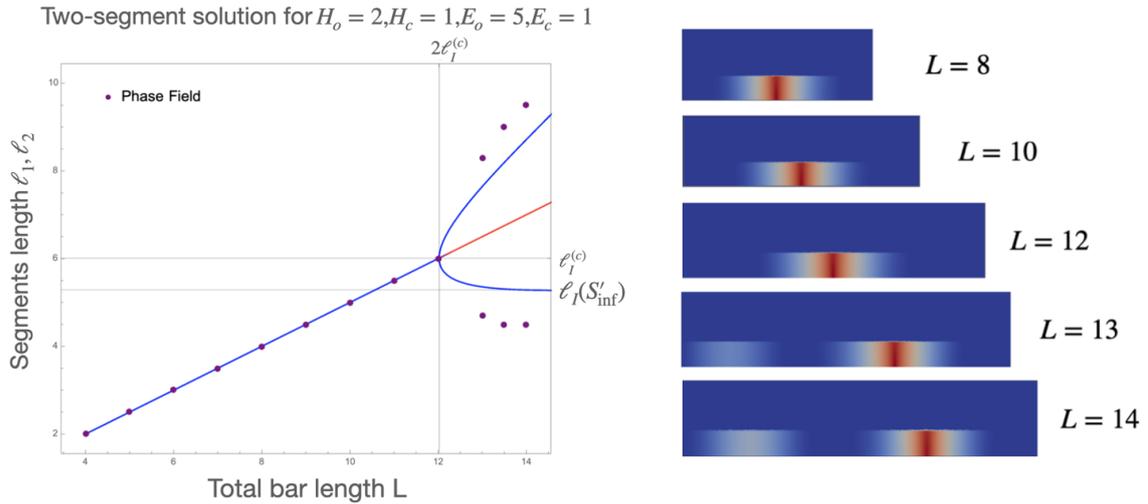


FIGURE 4 – Résultats de la minimisation globale, courbe de bifurcation (à gauche) et de la minimisation locale par méthode de champ de phase (à droite). Paramètres utilisés : $E_o = 5, E_c = 1, H_o = 2, H_c = 1$, longueur interne du Phase Field : $\ell = 0.8$. En rouge : solutions instables. En bleu : solutions stables.

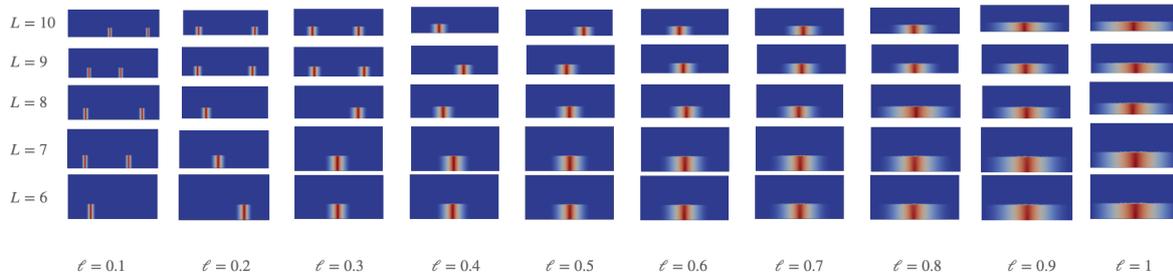


FIGURE 5 – Simulation de minimisation locale par méthode de champ de phase AT1. Premier moment de nucléation pour des barres de différentes longueurs en fonction de différentes longueurs internes ℓ .

4 Conclusion

Pour conclure, nous avons développé une méthode variationnelle qui permet de prédire les espacements des fissures transverses dans les stratifiés UD renforcés présentant un coeur endommageable, sous une traction uniaxiale dans la direction des fibres. Cette méthode permet de retrouver dans une certaine limite les résultats de minimisation locale et notamment d'identifier les paramètres déterminant le régime de fissuration aperiodique de propagation des fissures (moment de bifurcation). Il reste encore à explorer les résultats issus de la méthode de champ de phase pour mieux identifier les critères de propagation aperiodique et à comparer ces résultats avec notre base de données expérimentales.

Références

- [1] Parvizi A. and Bailey J. On multiple transverse cracking in glass fibre epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, page 2131–2136, 1978.
- [2] Parvizi A., Garret K.W., and Bailey J.E. Constrained cracking in glass fibre reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, 13 :195–210, 1978.
- [3] Julien Berthe and M Ragonet. Passive infrared thermography measurement of transverse cracking evolution in cross-ply laminates. *Strain*, 54 :e12293, 10 2018.
- [4] J. Berthelot. Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading. *Applied Mechanics Reviews*, 56 :111–147, 2003.

- [5] J.-M Berthelot and J.-F Le Corre. Statistical analysis of the progression of transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60(14) :2659–2669, 2000.
- [6] Jeremy Bleyer and Roberto Alessi. Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 336, 03 2018.
- [7] B Bourdin, Gilles Francfort, and J.-J Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :797–826, 04 2000.
- [8] Blaise Bourdin, Gilles Francfort, and J.-J Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91 :5–148, 04 2008.
- [9] Flaggs D.L. and Kural M.H. Experimental determination of the in situ transverse lamina strength in graphite/epoxy laminates. *J Composite Materials*, 16, 1982.
- [10] Meisam Jalalvand, Michael R. Wisnom, Hossein Hosseini-Toudeshky, and Bijan Mohammadi. Experimental and numerical study of oblique transverse cracking in cross-ply laminates under tension. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 67 :140–148, 2014.
- [11] M. Javaland, H. Hosseini-Toudeshky, and B. Mohammadi. Numerical modeling of diffuse transverse cracks and induced delamination using cohesive elements. *Proc Instit Mech Eng C : J Mech Eng Sci*, 2012.
- [12] Bin Li, Christian Peco, Daniel Millán, Irene Arias, and Marino Arroyo. Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4) :711–727, 2015.
- [13] P.W. Manders, T.W. Chou, F.R. Jones, and John Rock. Statistical analysis of multiple fracture in [0/90/0] glass fiber/epoxy resin laminates. *J. Mater. Sci.*, 19 :2876–2889, 10 1983.
- [14] J. Nairn and S. Hu. Matrix microcracking. *Elsevier Science R.V. All rights reserved*, 1994.
- [15] Thanh-Tung Nguyen, Julien Réthoré, and Marie-Christine Baietto. Phase field modelling of anisotropic crack propagation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 65 :279–288, 05 2017.
- [16] T. Okabe, M. Nishikawa, and N. Takeda. Numerical modeling of progressive damage in fiber reinforced plastic cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 68(10) :2282–2289, 2008.
- [17] Peters P.M.W. Statistical analysis of multiple fracture in [0/90/0] glass fiber/epoxy resin laminates. 1984.
- [18] Vadim V. Silberschmidt. Matrix cracking in cross-ply laminates : effect of randomness. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(2) :129–135, 2005. 7th International Conference on the Deformation and Fracture of Composites (DFC-7).