

Développement d'une technique de projection avec modes homotopiques pour le calcul des solutions propres complexes

J. Sadet¹, F. Massa², T. Tison¹, I. Turpin³, B. Lallemand¹, E-G. Talbi⁴

¹ Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH, CNRS, UMR 8201, F-59313 Valenciennes, France

² Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH, CNRS, UMR 8201, F-59313 Valenciennes, France
INSA Hauts-de-France, F-59313 Valenciennes, France

³ Université Polytechnique Hauts-de-France, CERAMATHS, F-59313 Valenciennes, France

⁴ Université de Lille, CRISTAL UMR CNRS 9189, Inria-Lille Nord Europe

Résumé —

L'objectif de cette étude est de proposer une méthode numérique permettant de construire itérativement un espace de projection optimal, composé de modes normaux et homotopiques, pour le calcul des solutions complexes. Cette méthode est ensuite utilisée pour résoudre une analyse de stabilité associée au phénomène de crissement automobile. Nous nous focaliserons sur le stabilisation du résidu de l'équation aux valeurs propres ainsi que sur les parties réelles des valeurs propres complexes en fonction du nombre de modes normaux et de l'ordre du développement homotopique.

Mots clés — Problème aux valeurs propres, Projection, Développement homotopique, Analyse de stabilité.

1 Introduction

En analyse modale, les algorithmes de résolution actuels (de type QZ) nécessitent la projection sur un espace de dimension réduite. Les techniques de projection les plus connues [1, 2] se basent sur une projection dans une base de déplacements et peuvent fournir une estimation efficace de la réponse fréquentielle du modèle complet si le modèle de projection représente une bonne approximation du modèle complet [3]. Néanmoins, les méthodes classiques ne permettent pas d'obtenir une approximation correcte du modèle complet pour certains problèmes (vibro-acoustique ou vibrations induites par le frottement pour ne citer qu'eux). Ainsi, il est pertinent de s'intéresser à d'autres techniques de projection sur un espace réduit.

La méthode des perturbations homotopiques, proposée par He [4], a d'abord été utilisée pour résoudre les problèmes d'équations différentielles; puis a été appliquée aux problèmes de dynamique. Duigou et al. [5] ont couplé la méthode homotopique avec la méthode asymptotique numérique et celle des approximants de Padé pour étudier les vibrations de structures sandwich amorties. Boumediene et al. [6] ont développé une méthode de réduction se basant sur la méthode des perturbations homotopiques pour résoudre un système à valeurs propres avec de l'amortissement viscoélastique. Récemment, Massa et al. [7] ont construit une méthode d'ordre réduit pour résoudre un problème d'analyse modale linéaire.

Le but de cette communication est d'étudier l'utilisation de la méthode de perturbations homotopiques pour la résolution de problèmes quadratiques à valeurs propres complexes [8]. Pour ce faire, le problème numérique est dans un premier temps rappelé. Ensuite, les équations de la méthode de perturbations homotopiques sont développées et l'algorithme permettant l'approximation des solutions propres du système considéré est présenté. Une application sur un modèle simplifié de frein est ensuite utilisée pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

2 Problème de vibrations induites par le frottement

La détermination des solutions propres (λ_i, Ψ_i) d'un modèle éléments finis soumis à des vibrations induites par le frottement est définie par l'équation (1).

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K}) \Psi_i = \mathbf{0} \quad (1)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité; λ_i et Ψ_i , les $i^{\text{ème}}$ valeur propre et vecteur propre du système.

Les dimensions des modèles éléments finis ne permettent pas une résolution directe de l'équation (1) à cause du nombre trop important d'équations à traiter. Une projection sur un sous-espace $\mathbf{T}$ est donc utilisée pour réduire la taille du système et un algorithme QZ permet de déterminer les solutions propres du système réduit. L'équation (1) est donc réécrite dans l'espace d'état, donnée par l'équation (2).

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ s_i^* q_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ s_i^* q_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

où s_i^* et q_i sont les solutions propres approximées du système, avec $\Psi_i = \mathbf{T} q_i$.

L'approche classique consiste à former $\mathbf{T}$ avec un ensemble de modes propres du système conservatif associé, déterminés à partir de l'équation (3).

$$(\mathbf{K}_S - \omega_i^2 \mathbf{M}_S) \phi_i = \mathbf{0} \quad (3)$$

où $\mathbf{K}_S$ et $\mathbf{M}_S$ correspondent aux matrices de rigidité et de masse prenant en compte les contributions normales de contact, ω_i , la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre et ϕ_i , le i^{th} vecteur propre associés à la base conservative.

Bien que cette solution a montré son efficacité dans de nombreux cas comme l'analyse modale avec amortissement visqueux, la construction du sous-espace $\mathbf{T}$ à partir de ϕ_i n'est pas optimale dans le cas des vibrations induites par le frottement car la contribution tangentielle du contact n'est pas prise en compte.

3 Généralisation de la méthode de projection à des ordres supérieurs

Pour améliorer la prédiction de ces solutions propres, nous proposons une généralisation de la méthode de projection présentée précédemment, appelée méthode HOPEP (HOmotopy PERTurbation and Projection), où le sous-espace $\mathbf{T}$ est enrichi par des modes homotopiques à différents ordres, suivant les développements proposés dans [8]. Les matrices de masse et rigidité sont communément décomposées sous la forme (4).

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_S + \varepsilon \mathbf{M}_A \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_S + \varepsilon \mathbf{K}_A \end{aligned} \quad (4)$$

où ε est une variable homotopique associée à la contribution non symétrique. Les contributions symétriques sont données avec un indice S et les contributions assymétriques avec un indice A.

Enfin, l'intégralité de la contribution en amortissement est considérée comme une perturbation afin de lever les limitations observées dans la référence [9] et de retrouver l'équation (3) lors de l'identification à l'ordre 0 du paramètre homotopique. Cette stratégie permet de considérer un problème à valeurs réelles et éviter des instabilités de calcul.

$$\mathbf{C} = \varepsilon \mathbf{C}_A \quad (5)$$

Les solutions propres sont développées en séries de ε comme exprimées dans les équations (6) et (7).

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \varepsilon \lambda_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^n \lambda_i^{(n)} + \dots + \varepsilon^d \lambda_i^{(d)} \quad (6)$$

$$\psi_i = \psi_i^{(0)} + \varepsilon \psi_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^n \psi_i^{(n)} + \dots + \varepsilon^d \psi_i^{(d)} \quad (7)$$

où d correspond à l'ordre homotopique maximum de la troncature.

Les équations des solutions propres perturbées (6) et (7) sont injectées dans l'équation (1), en considérant les décompositions symétriques et assymétriques des matrices de masse, d'amortissement et de

rigidité. L'expression des modes homotopiques est obtenue après identification des différents ordres du paramètre ε . Le détail des équations est présenté dans la référence [8].

La base enrichie s'écrit donc sous la forme de l'équation (8).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(0)} & \dots & \phi_{n_m}^{(0)} & \psi_1^{(1)} & \dots & \psi_m^{(d)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec $\psi_m^{(d)}$, le vecteur homotopique associé au mode m et à l'ordre d .

La procédure HOPEP est présentée dans la figure 1. Premièrement, l'algorithme est initialisé avec n_m modes normaux (déterminés en résolvant le système conservatif associé). Puis, m modes homotopiques sont ajoutés au sous-espace $\mathbf{T}$ et l'équation (2) est résolue. Le résidu, calculé en injectant les solutions propres alors déterminées, est évalué. Si celui-ci n'est pas amélioré, alors un certain pourcentage de modes normaux est ajouté et l'équation (2) est à nouveau résolue. Ensuite, la convergence des solutions propres est évaluée. Si celles-ci n'ont pas convergé, alors un nouvel ordre homotopique est ajouté.

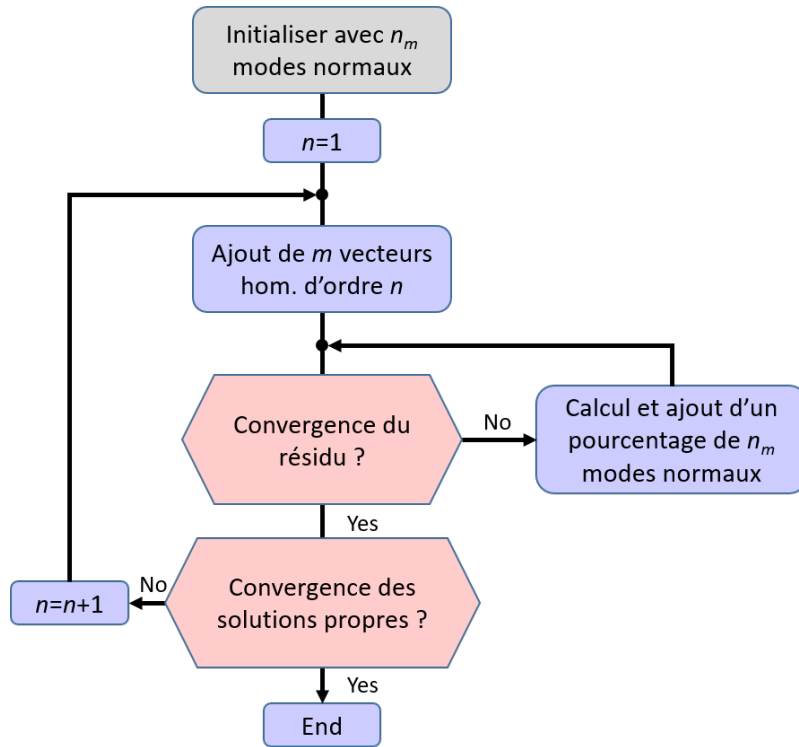


FIGURE 1 – Construction de la base de projection par la méthode HOPEP.

Ainsi, les modes homotopiques sont déterminés à chaque itération de la méthode HOPEP en utilisant la méthode de Wang [10]. Ces modes sont ensuite injectés dans la base de projection $\mathbf{T}$, qui est orthonormalisée à chaque itération en utilisant une méthode de Gram-Schmidt itératif [11].

4 Application numérique

L'application considérée dans cette communication est un modèle simplifié de système de freinage, présenté en figure 2. Les matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont déterminées au sein du logiciel Abaqus. Quant aux solutions propres, celles-ci sont calculées à partir de fonctions dédiées développées sous Matlab. Les données du modèle sont disponibles dans [8].

Les deux techniques de projection sont comparées grâce à l'évaluation du résidu qui est obtenu en substituant les solutions propres calculées dans l'équation (1). Nous nous intéressons ici au résidu des 74 premiers modes de la base modale du modèle de freinage, ce qui représente une bande fréquentielle inférieure à 20 kHz.

Trois configurations de la base de projection sont testées :

- Une augmentation graduelle du nombre de modes normaux (de n_m à $7 \times n_m$);

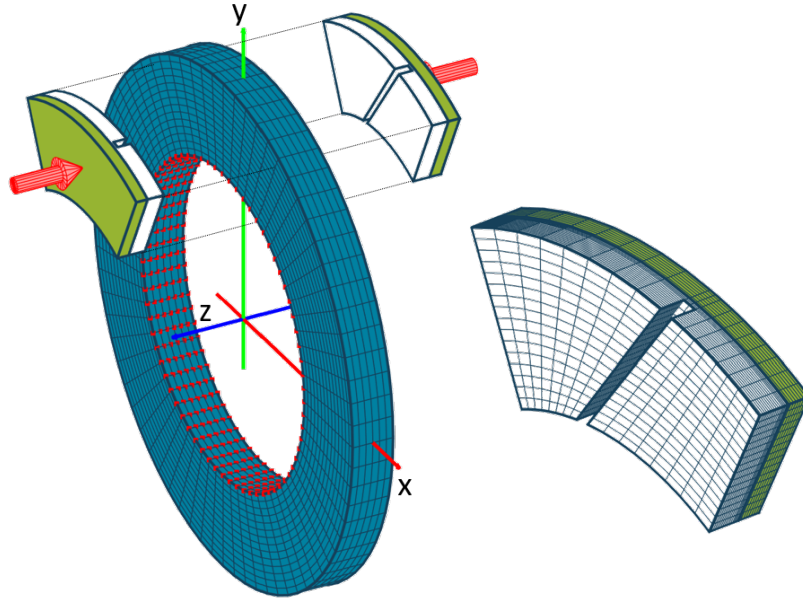


FIGURE 2 – Modèle éléments finis simplifié

- Un ensemble de n_m modes normaux, complété avec un ensemble de m vecteurs propres perturbés (de l'ordre 1 à 6);
- Un ensemble de $2 \times n_m$ modes normaux, complété avec un ensemble de m vecteurs propres perturbés (de l'ordre 1 à 6).

4.1 Influence de la constitution de la base de projection

La figure 3 montre l'évolution du résidu avec l'augmentation de la taille de la base de projection considérée. Le cercle représente la valeur moyenne du résidu sur les 74 modes considérés, alors que les carrés représentent l'intervalle min-max du résidu pour le mode le mieux calculé et le moins bien calculé.

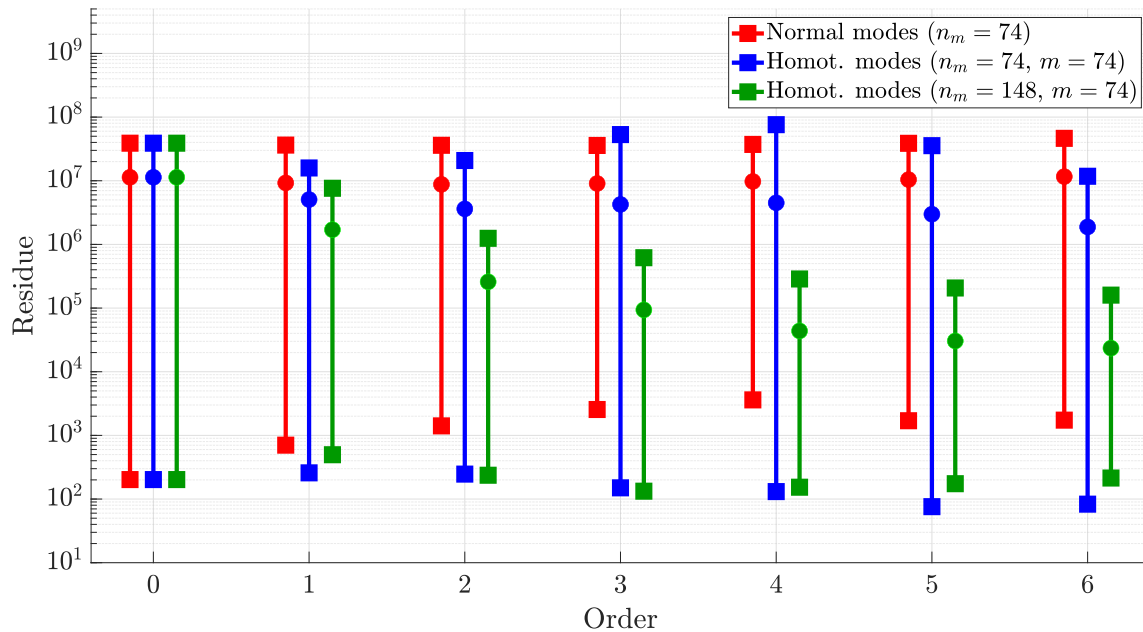


FIGURE 3 – Evolution du résidu pour les deux techniques de projections considérées

Il est intéressant de noter que l'accroissement de la base $\mathbf{T}$ de la configuration 1 ne permet pas de

réduire le résidu des 74 modes considérés. De plus, nous constatons que l'effet des modes homotopiques est bénéfique dès lors que le nombre de modes normaux est suffisant. En effet, l'amélioration associée à la configuration 2 n'est que d'une décade, alors que celle associée à la configuration 3 est de trois décades.

4.2 Application de l'algorithme proposé

Les figures 4 et 5 proposent une application de l'algorithme HOPEP pour l'estimation des solutions propres du système considéré. Le nombre de modes normaux pour la configuration 1 (Figure 4) est de 74, soit une bande de fréquences d'étude de 0 à 20kHz. La seconde configuration (Figure 5) utilise 113 modes normaux, soit une augmentation de 20% de la plage de fréquence précédente.

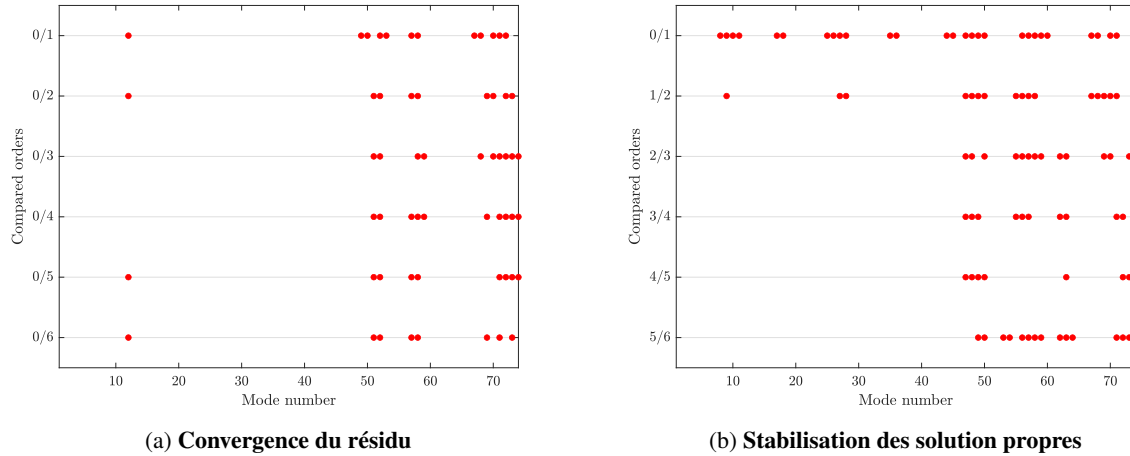


FIGURE 4 – Configuration 1 – (a) Convergence du résidu par mode; (b) Stabilisation des solutions propres par mode en fonction du nombre d'ordre homotopique. Un point rouge indique un mode non convergé

Avec cette première configuration, la base de modes normaux est insuffisante pour stabiliser les modes complexes des hautes fréquences et le résidu n'est pas amélioré pour 10% des modes, quelque soit l'ordre homotopique utilisé.

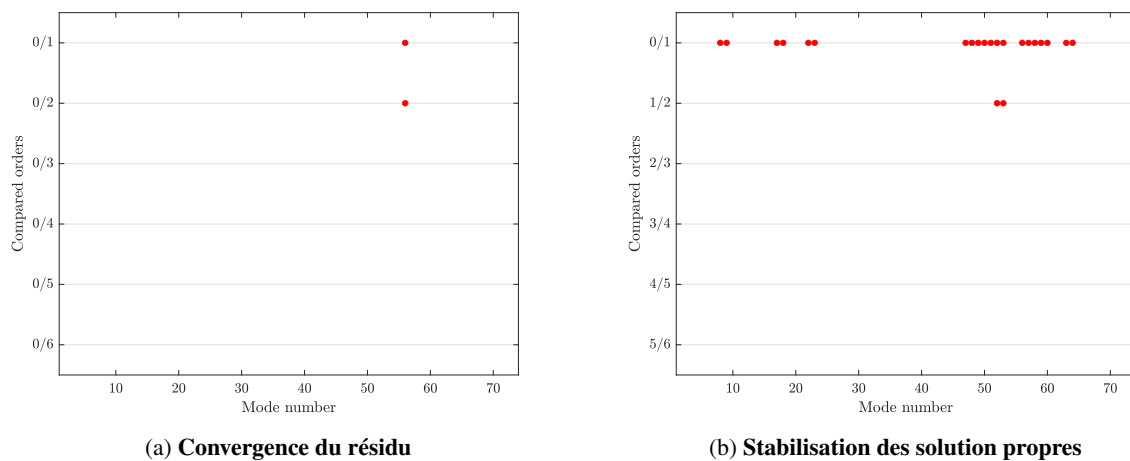


FIGURE 5 – Configuration 2 – (a) Convergence du résidu par mode; (b) Stabilisation des solutions propres par mode en fonction du nombre d'ordre homotopique. Un point rouge indique un mode non convergé

Pour cette seconde configuration, les résultats montrent que l'utilisation d'HOPEP permet une stabilisation rapide à la fois du résidu et des solutions propres du système. Ainsi, la confiance dans le calcul

de ces quantités est donc améliorée par rapport à l'utilisation d'un espace de projection classique.

Ces deux résultats mettent donc en avant l'importance d'un équilibre entre modes normaux et modes homotopiques.

5 Conclusions

Cette communication a permis d'étendre la stratégie numérique, traditionnellement utilisée pour la résolution des problèmes quadratiques aux valeurs propres, en complétant l'espace de projection composée de modes normaux par des modes homotopiques. En effet, la combinaison de ces 2 types de modes permet une meilleure stabilisation du résidu de l'équation aux valeurs propres ainsi que des parties réelles des solutions propres. Une analyse du nombre de modes normaux et de l'ordre du développement homotopiques a été ainsi proposée.

Références

- [1] Olivier Chiello Xavier Lorange Guillaume Vermot des Roches, Etienne Balmès. Reduced order brake models to study the effect on squeal of pad redesign. Europe's braking technology conference & exhibition, Jun 2013.
- [2] M. Monteil, S. Besset, and J.-J. Sinou. A double modal synthesis approach for brake squeal prediction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71 :1073–1084, March 2016.
- [3] Etienne Balmès. Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4) :381 – 394, 1996.
- [4] Ji-Huan He. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(3) :257 – 262, 1999.
- [5] Laëtitia Duigou, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11) :1323 – 1335, 2003.
- [6] Faiza Boumediene, Jean-Marc Cadou, Laëtitia Duigou, and El Mostafa Daya. A reduction model for eigen-solutions of damped viscoelastic sandwich structures. *Mechanics Research Communications*, 57 :74 – 81, 2014.
- [7] F. Massa, I. Turpin, and T. Tison. From homotopy perturbation technique to reduced order model for multiparametric modal analysis of large finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 96 :291 – 302, 2017.
- [8] Jérémy Sadet, Franck Massa, Thierry Tison, Isabelle Turpin, Bertrand Lallemand, and El-Ghazali Talbi. Homotopy perturbation technique for improving solutions of large quadratic eigenvalue problems : Application to friction-induced vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 153 :107492, May 2021.
- [9] F. Massa, B. Lallemand, and T. Tison. Multi-level homotopy perturbation and projection techniques for the reanalysis of quadratic eigenvalue problems : The application of stability analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52-53 :88 – 104, 2015.
- [10] B. P. Wang. Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics. *AIAA Journal*, 29(6) :1018–1020, June 1991.
- [11] Rédouane Jamaï and Noureddine Damil. Influence of iterated gram–schmidt orthonormalization in the asymptotic numerical method. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(5) :351 – 356, 2003.