

# Accélération de simulations éléments finis de problèmes transitoires par projection de Galerkin à partir de solutions obtenues en régime permanent diphasique

M. Ghestin<sup>1</sup>, J. Bruchon<sup>1</sup>, S. Drapier<sup>1</sup>, R. Ferrier<sup>1</sup>, N. Moulin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mines Saint-Étienne, Université de Lyon, CNRS, UMR 5307 LGF, Centre SMS 158 Cours Fauriel 42023, Saint-Étienne, France, {bruchon, drapier, renaud.ferrier, nmoulin}@emse.fr

**Résumé** — La modélisation des écoulements diphasiques transitoires a mené au développement de solveurs éléments finis efficaces. Néanmoins les coûts en calcul et en stockage deviennent rapidement élevés pour des géométries complexes. Une réduction du problème par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est ainsi étudiée. L'originalité de l'approche est d'utiliser une base de données bien choisie d'écoulements en régime stationnaire, rapides à simuler, afin de traiter un problème transitoire réduit. Cette méthode est illustrée sur un cas générique de problème elliptique.

**Mots clés** — Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres, Projection de Galerkin, Problèmes transitoires.

## 1 Introduction

La simulation d'écoulements diphasiques transitoires en milieux poreux est une problématique qui suscite un grand intérêt scientifique et industriel. Cet article s'inscrit notamment dans la Chaire industrielle Hexcel - Mines Saint-Étienne autour de la modélisation de l'élaboration de pièces aéronautiques composites. L'un des objectifs est de modéliser puis simuler l'infusion de résine liquide à l'intérieur de préformes fibreuses complexes de plusieurs mètres de long.

Un modèle d'écoulement transitoire diphasique couplant les équations de Stokes, de Darcy et l'équation de transport du front fluide a été proposé et implémenté dans le code éléments finis Zset [1] à Mines Saint-Étienne. Toutefois un problème multi-échelles se pose. En effet, les géométries industrielles sont de taille macroscopique tandis que les espaces poreux accessibles à la résine sont définis aux échelles des fibres (microns), des mèches (<mm) et des préformes fibreuses (>cm). Afin de capter les effets des différentes échelles, il faudrait donc utiliser un maillage très fin et un pas de temps également très petit ce qui est impossible à résoudre pour des raisons de coûts de calcul et de stockage. Des travaux sur la détermination de volume élémentaires représentatifs et sur les méthodes d'homogénéisation des propriétés microscopiques et mésoscopiques de l'écoulement sont menés pour simplifier le problème macroscopique [2]. Néanmoins la complexité des géométries aéronautiques nécessite tout de même un maillage raffiné. Ce qui induit irrémédiablement une grande complexité algorithmique, de longs temps de calcul, voire même une impossibilité à résoudre le problème par un trop grand nombre de degrés de liberté.

Nous proposons de contourner cette complexité en réduisant le problème par une méthode de réduction de modèle basée sur la POD. Cette méthode est une projection de Galerkin du problème éléments finis. Elle a déjà été largement utilisée avec succès pour résoudre efficacement des problèmes de turbulences [3]. Cependant une contrainte majeure subsiste : la construction du projecteur nécessite plusieurs résolutions du problème complet avec différents jeux de paramètres. Ainsi, la réduction du modèle implique de pouvoir résoudre ce même problème, ce qui peut être impossible comme nous l'avons mentionné. L'idée est donc d'utiliser des solutions issues de problèmes stationnaires, peu coûteuses, pour construire le projecteur utilisé pour le problème transitoire associé. Cette méthode est illustrée dans le cadre d'un problème elliptique à deux domaines physiques dont le paramètre physique pourra être assimilé à une conductivité, une viscosité ou une perméabilité.

Cet article présente tout d'abord la formulation des problèmes à résoudre. La section suivante décrit succinctement la méthode de réduction de modèle utilisée. Enfin les erreurs associées à la réduction seront étudiées en fonction des données qui sont utilisées pour réduire le problème.

## 2 Formulation du problème

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (avec  $d \in \{1, 2, 3\}$ ) un domaine ouvert et  $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  la frontière de  $\Omega$  telle que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  où  $\Gamma_D$  est la partie de frontière du domaine  $\Omega$  sur laquelle des conditions de Dirichlet sont appliquées et  $\Gamma_N$  celle sur laquelle des conditions de Neumann sont appliquées.

### 2.1 Équations du problème stationnaire

Le problème stationnaire s'écrit alors : trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$  telle que

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \mathbf{u}) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \text{sur } \Gamma_D, \\ \lambda \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un champ paramétrique physique (tel qu'un champ de conductivité ou de perméabilité) constant dans chaque domaine physiques et identifiés grâce à une interface,  $\mathbf{u}_D$  un champ imposé à  $\mathbf{u}$  sur  $\Gamma_D$ ,  $\mathbf{g}$  un autre champ imposant le flux normal sur  $\Gamma_N$  et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\Gamma$ . Chaque solution trouvée pour un ensemble de conditions bien choisies permet de construire une base de données qui est utilisée pour réduire le problème transitoire.

### 2.2 Formulation du problème transitoire

L'objectif est d'utiliser notre méthode de réduction sur un écoulement transitoire modélisé comme dans [1]. L'évolution dans le temps de l'écoulement y est modélisée par le transport d'une levelset. Ainsi, la base de données utilisée pour modéliser l'effet transitoire du problème est une succession de solutions de problèmes stationnaires avec différentes positions d'interfaces bien choisies. En fonction du type de problème étudié (thermique ou fluide), un schéma de discrétisation temporel sera défini. En ce qui concerne la résolution en espace, une formulation variationnelle est construite à partir des équations du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in V, a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (1)$$

avec  $V$  l'espace de Sobolev bien choisi et respectant les conditions au bord du problème,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $V \times V$  et  $b$  une forme linéaire sur  $V$ . La formulation variationnelle tient compte des conditions de Neumann. Pour tenir compte des conditions de Dirichlet homogènes, les solutions du problème (1) sont recherchées dans un sous-espace vectoriel de  $V$  noté  $V_0 = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ . Les conditions de Dirichlet inhomogènes sont prises en compte à l'aide d'une fonction de relèvement. Cette fonction permet de chercher une solution dans  $V_0$  puis de retrouver la solution respectant les conditions de Dirichlet inhomogènes.

Un problème discret de résolution par éléments finis est alors construit sur le sous-espace de dimension finie  $V_h \subset \mathbb{R}^m$  de  $V$  ( $V_h = V_{0,h}$  si des conditions de Dirichlet sont appliquées aux bords) avec une base éléments finis  $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ . La solution du problème transitoire s'approxime alors par  $\mathbf{u}_h$  de la forme

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m u^{(j)} \Psi_j(\mathbf{x}),$$

avec  $\mathbf{x} \in \Omega$  et  $u^{(j)}$  la solution exacte au  $j$ -ième noeud du maillage. On note  $\mathcal{U} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})^T$  le vecteur qui est solution du problème (1) discrétisé

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in V_h, a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h). \end{cases} \quad (2)$$

Ces éléments permettent alors de décrire la méthode de réduction de modèle étudiée dans cette contribution.

### 3 Méthode

#### 3.1 Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

##### 3.1.1 Cas discret

La méthode POD est expliquée en détails dans diverses références comme [5]. En résumé, la POD permet d'utiliser une base de données de solutions d'un système différentiel pour identifier une base complète de fonctions orthonormales telle que toute réalisation  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  peut se décomposer sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \phi_k(\mathbf{x}), \quad (3)$$

avec  $\phi_k$  appelé  $k$ -ième mode spatial de la décomposition de  $\mathbf{u}$ ,  $c_k(t) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \phi_k(\mathbf{x}) \rangle$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire à définir. Dans le cas d'une résolution numérique d'un problème, le nombre de modes est nécessairement fini. Ils servent donc à approximer  $\mathbf{u}$  de façon précise. Ces modes sont calculés à partir d'une base de données de solutions de problèmes stationnaires avec différentes positions d'interfaces dont  $\mathbf{u}$  est solution. On appelle la matrice des clichés, couramment appelée matrice des snapshots,  $\mathbf{S} \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  la matrice de solutions particulières de ce problème définie telle que

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix},$$

où  $m$  est le nombre de noeuds du maillage éléments finis,  $n$  le nombre de solutions particulières décrivant le problème transitoire au cours du temps et  $u_{ij}$  la valeur de la  $j$ -ième solution particulière au  $i$ -ème noeud du maillage. Il est alors possible de décomposer  $\mathbf{S}$  en valeurs singulières (SVD) sous la forme

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (4)$$

$(m \times n)$        $(m \times m)$   $(m \times n)$   $(n \times n)$

avec  $\mathbf{U}$  une matrice orthogonale de  $\mathbf{M}_m(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  une matrice diagonale de  $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls et  $\mathbf{V}^T$  la matrice transposée de  $\mathbf{V}$ , une matrice unitaire de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ . Il est montré dans [5] que les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}$  issue de cette décomposition forment la base de la décomposition (3). C'est la méthode que nous utiliserons dans les applications pour calculer ces modes. Ainsi on obtient une approximation de  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^{\min(m,n)} c_k(t) \phi_k(\mathbf{x}).$$

Le nombre de modes est limité au maximum à  $\min(m, n)$  qui est généralement égal au nombre  $n$  de simulations réalisées dans le cadre des applications numériques.

##### 3.1.2 Sélection du nombre de modes

Afin de déterminer un espace de projection adapté dans lequel réduire le problème et le résoudre, il est important d'utiliser uniquement les modes les plus représentatifs du système étudié, c'est-à-dire ceux qui représentent au mieux la matrice de snapshots. Pour cela, on utilise classiquement le critère dit *énergétique* [4]. Il est défini à partir des valeurs singulières de la décomposition SVD (4) tel que

$$\frac{\sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i} \geq \tau, \quad (5)$$

où  $\sigma_i$  est la  $i$ -ème plus grande valeur singulière et  $\tau \in ]0, 1[$  est un taux énergétique dont la valeur est souvent choisie au moins supérieure à 0.99 et  $\ell$  le nombre de modes à utiliser qu'on recherche. En effet, les valeurs singulières décroissent rapidement s'il existe un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de  $\mathbf{S}$  qui l'approche assez précisément. Les modes retenus sont donc les vecteurs de  $\mathbf{U}$  associés aux  $\ell$  plus grandes valeurs singulières. On note ces vecteurs  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{M}_{(m,\ell)}(\mathbb{R})$ .

## 3.2 POD-Galerkin

La POD est fondamentalement une méthode de compression de l'information contenue dans un champ  $\mathbf{u}$ . Elle ne suffit pas à réduire le problème éléments finis. C'est pourquoi on utilise une projection de Galerkin du problème éléments finis dans le sous-espace vectoriel engendré par  $\tilde{\mathbf{U}}$ . La combinaison de ces deux méthodes, appelée POD-Galerkin, permet la réduction du problème.

### 3.2.1 Principe

Revenons au problème éléments finis (2). À partir de la base éléments finis  $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ , on peut construire un système linéaire avec une matrice  $\mathbf{K} \in \mathbf{M}_m(\mathbb{R})$  et un vecteur  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^m$  permettant de trouver  $\mathbf{u}_h$  tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h, a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = b_h(\mathbf{v}_h) \iff \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \mathcal{V}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{V}^T \cdot \mathbf{F} \iff \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{K} \cdot \mathcal{U} = \mathbf{F},$$

avec  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{R}^m$  les vecteurs de coefficients tels que  $\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^m \mathcal{U}_j \Psi_j(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{v}_h = \sum_{j=1}^m \mathcal{V}_j \Psi_j(\mathbf{x})$ .

Résoudre ce problème est une opération coûteuse. La projection de Galerkin permet de chercher une solution approchée  $\mathbf{u}_h^\ell \in V_{rom} \subset \mathbb{R}^\ell$  de  $\mathbf{u}_h \in V_h \subset \mathbb{R}^m$  telle que

$$\mathbf{u}_h^\ell = \sum_{k=1}^{\ell} u_{rom}^{(k)} \phi_k,$$

avec  $(u_{rom}^{(1)}, u_{rom}^{(2)}, \dots, u_{rom}^{(\ell)})^T = \mathcal{U}_{rom} \in \mathbb{R}^\ell$  et  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\ell}$  une base de  $V_{rom}$  choisie telle que

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} \Psi_j(\mathbf{x}), \quad \forall k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$$

avec  $(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})^T$  identifié au  $k$ -ième vecteur de  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$  la base éléments finis du problème (2). Ainsi  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$  constitue une matrice de passage entre  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^\ell$  telle que

$$\mathcal{U} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathcal{U}_{rom}.$$

La recherche de  $\mathbf{u}_h^\ell \in \mathbb{R}^\ell$  mène alors à résoudre quel que soit  $\mathbf{v}_h^\ell \in \mathbb{R}^\ell$

$$a_h(\mathbf{u}_h^\ell, \mathbf{v}_h^\ell) = b_h(\mathbf{v}_h^\ell) \iff \mathcal{V}_{rom}^T \cdot \tilde{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathcal{U}_{rom} = \mathcal{V}_{rom}^T \cdot \tilde{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{F} \iff \mathbf{K}_{rom} \cdot \mathcal{U}_{rom} = \mathbf{F}_{rom},$$

avec  $\mathbf{K}_{rom} = \tilde{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{F}_{rom} = \tilde{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{F}$ .

Ainsi, la résolution numérique du nouveau problème considéré ne nécessite que la résolution d'un système linéaire avec  $\mathbf{K}_{rom} \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{R})$  et  $\ell \ll m$ . Par exemple, il est possible de retenir uniquement une dizaine de modes POD alors que le nombre de degrés de liberté est de l'ordre de plusieurs millions.

### 3.2.2 Traitement des conditions limites

Projeter le problème éléments finis dans un sous-espace beaucoup plus petit facilite grandement sa résolution et permet de gagner énormément en temps de calcul. Néanmoins cette projection ne vérifie pas les conditions limites de la formulation faible du problème. En effet, les solutions obtenues dans le problème réduit s'écrivent comme combinaisons linéaires des snapshots. Ainsi seules les conditions aux bords homogènes sont conservées par la projection de Galerkin. Toutefois les conditions de Neumann inhomogènes sont imposées faiblement dans le problème réduit. Il existe plusieurs méthodes pour imposer les conditions aux bords fortement au problème réduit [6]. Dans le cadre de ce travail, seules des conditions de Dirichlet inhomogènes et indépendantes du temps seront utilisées. La méthode la plus adaptée pour ce type de condition est d'utiliser une fonction de relèvement  $g$  qui respecte les conditions de Dirichlet puis de la soustraire à chaque snapshots pour rendre leurs conditions limites homogènes. Cette nouvelle matrice de snapshots  $\tilde{\mathbf{S}}$  est alors décomposée en valeurs singulières pour extraire les modes POD. Ainsi il reste à projeter le problème éléments finis et à le résoudre. La solution obtenue respectera alors une condition de Dirichlet homogène. Il restera à ajouter la fonction de relèvement  $g$  pour obtenir la solution approchée du problème initial.

## 4 Application à un problème thermique

Avant de modéliser un problème thermique transitoire à partir de solutions trouvées en régime permanent, deux cas tests sont étudiés dans le cas où la température ne dépend que de l'abscisse. Cela permet de comparer facilement l'erreur entre la solution exacte (linéaire par morceaux) et celle du modèle réduit en fonction du paramètre modifié qui est la position de l'interface physique ou la conductivité.

### 4.1 Tests avec des conductivités variables

Le premier test que nous menons concerne le changement des constantes de conductivité dans chaque snapshot. La construction des snapshots est illustrée par la Figure 1. La position d'interface est fixée alors que la conductivité du milieu de droite est modifiée pour chaque snapshot.

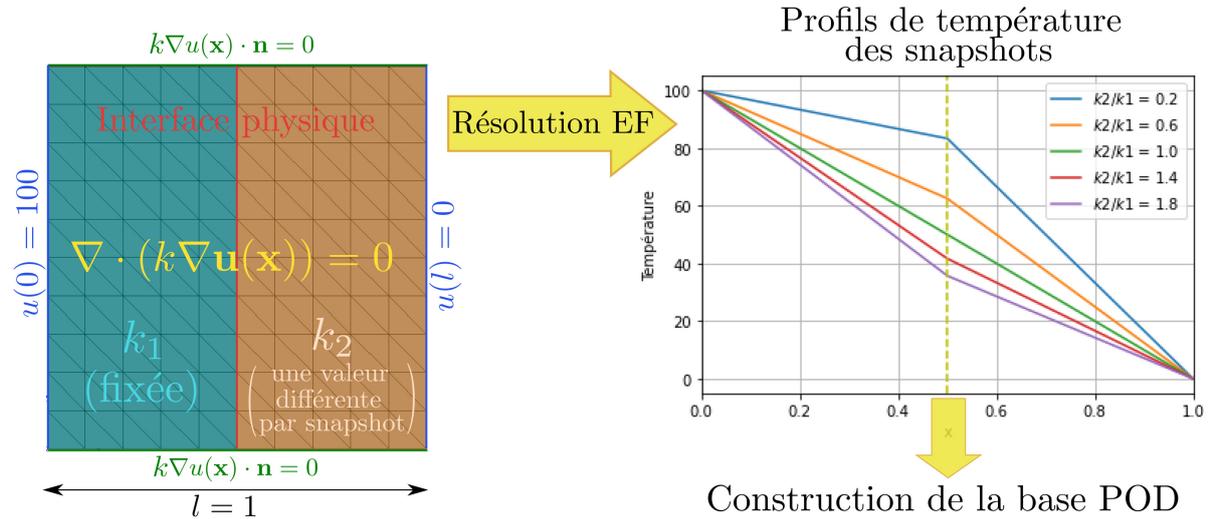
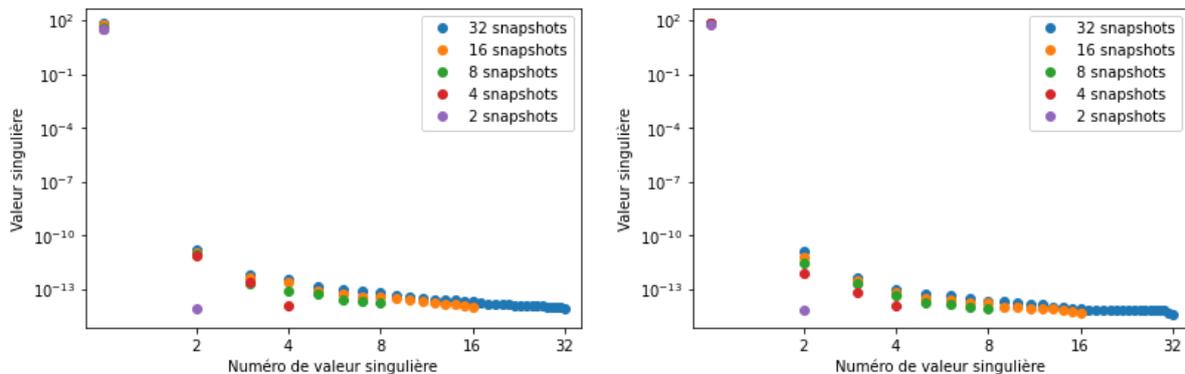


FIGURE 1 – Construction des snapshots en modifiant le rapport de conductivité  $k_2/k_1$  avec  $k_1 = 10$ .

#### 4.1.1 Comportement des valeurs singulières

Une première étude pour évaluer la qualité des snapshots est la décroissance des valeurs singulières de la décomposition SVD de la matrice des snapshots  $\mathbf{S}$  puisqu'elles traduisent l'importance des modes POD via le critère énergétique (5). Sur la Figure 2, ces valeurs sont rangées dans l'ordre décroissant et on observe une décroissance très rapide : la première valeur propre possède plusieurs ordres de grandeurs de différence avec la deuxième, suffisamment pour satisfaire le critère de sélection énergétique des modes. Le paramètre de conductivité des snapshots de la Figure 2a varie dans l'intervalle  $[0, 20]$  alors que celui de la Figure 2b dans l'intervalle  $[0, 2000]$ . Cela montre que la significativité des modes ne dépend pas du rapport de conductivité entre les deux domaines physiques définis par leur conductivité respective.



(a) Paramètres de conductivité :  $k_1 = 10$ ,  $k_2 \in [2, 20]$ . (b) Paramètres de conductivité :  $k_1 = 10$ ,  $k_2 \in [2, 2000]$ .

FIGURE 2 – Décroissance des valeurs singulières selon le nombre de snapshots choisis par valeur de conductivité prises linéairement dans deux différents intervalles dans le deuxième domaine physique.

Ce résultat est cohérent avec la solution théorique. En effet, elle est linéaire par morceaux et les conditions aux bords sont imposées fortement dans notre méthode. Ainsi, à partir de la seule température

à l'interface, on obtient la forme de la solution, ce que traduit également la forte valeur singulière du premier mode.

#### 4.1.2 Évolution des erreurs du modèle réduit

Ce cas d'étude est l'un des plus simples sur lequel tester notre méthode de réduction car la solution exacte, les modes, et la solution approchée sont linéaires par morceaux. Les erreurs sont calculées entre la solution exacte et la solution approchée avec quatre normes, à savoir :

$$\text{la norme 1 sur } \mathbb{R}^m : \|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^m |u_i|, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

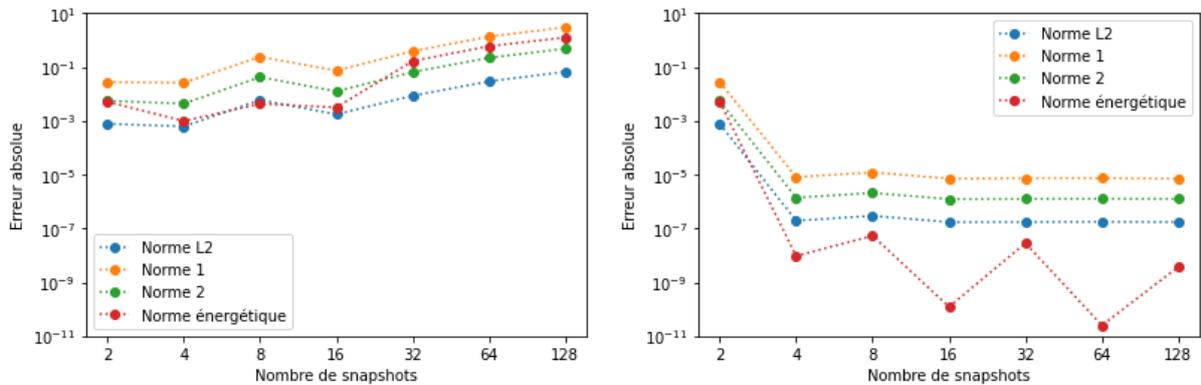
$$\text{la norme 2 sur } \mathbb{R}^m : \|\mathbf{u}\|_2 = \sum_{i=1}^m |u_i|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

$$\text{la norme L2 sur } L^2(\Omega) : \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in L^2(\Omega),$$

$$\text{la norme énergétique sur } \mathbb{R}^m : \|\mathbf{u}\|_{\text{energetic}} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

avec  $\mathbf{K} \in M_m(\mathbb{R})$  la matrice de rigidité du problème éléments finis. La norme L2 de la solution exacte est calculée analytiquement tandis que l'intégrale de l'erreur l'est par la méthode des trapèzes. L'utilisation de la norme 1, 2 et la norme L2 sont conventionnelles pour le calcul d'erreurs. Utiliser la norme énergétique permet de prendre en compte la formulation éléments finis dans l'erreur.

Sur la Figure 3, on observe les erreurs entre la solution exacte et la solution approchée selon le nombre de snapshots utilisés. Sur la Figure 3a, tous les modes sont utilisés alors que sur la Figure 3b, seulement les deux premiers sont utilisés. On constate que si le nombre de modes augmente alors que leur significativité est trop faible, l'erreur augmente elle aussi. D'un autre côté, limiter le nombre de modes de façon artificiel empêche l'apparition de modes parasites mais limite la convergence de l'erreur du problème. Il est donc important de choisir le bon nombre de modes pour garantir une solution optimale. L'efficacité du critère énergétique de sélection des modes (5) est illustrée dans le deuxième cas test.



(a) Erreurs entre la solution exacte et la solution approchée en utilisant tous les modes.

(b) Erreurs entre la solution exacte et la solution approchée en utilisant les deux premiers modes.

FIGURE 3 – Erreurs du modèle réduit en fonction du nombre de snapshots choisis et du nombre de modes retenus avec conductivités variables.

## 4.2 Tests avec des positions d'interface variables et une conductivité fixe par sous-domaine

Le but est d'utiliser une description du problème instationnaire comme une succession d'états stationnaires avec discontinuité de propriété physique. On teste par analogie le cas où on déplace une interface plane, qui nous permet de définir deux conductivités (qui seront une viscosité dans le cas de Darcy). La Figure 4 illustre la génération des snapshots.

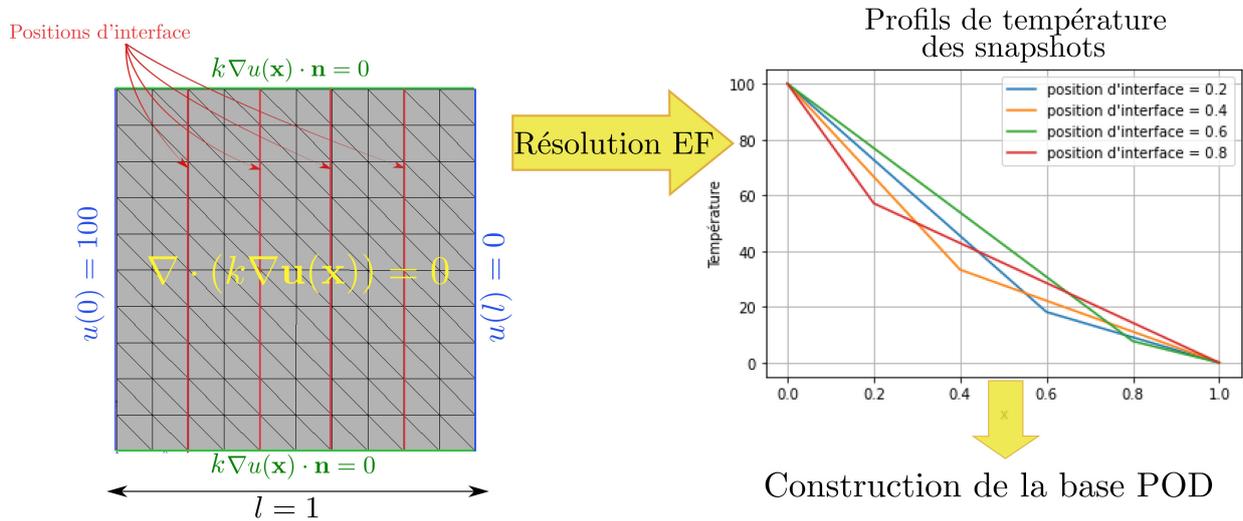


FIGURE 4 – Construction des snapshots en modifiant la position de l’interface physique avec  $k_1 = 10$  et  $k_2 = 30$ .

#### 4.2.1 Comportement des valeurs singulières

Si on choisit des snapshots correspondant à des positions prises uniformément dans l’intervalle  $]0, 1[$  en augmentant progressivement leur nombre, les valeurs singulières décroissent sous la forme d’une fonction puissance  $x^{-1.7}$  par rapport à leur numéro (voir Figure 5). La Figure 5a montre que le dernier mode n’a aucun poids dans le critère de sélection (5) quelque soit le nombre de snapshots choisis. Sur la Figure 5b l’allure de décroissance des valeurs singulières se stabilise. Ce qui peut amener à un premier choix de sélection du nombre de snapshots nécessaires à la réduction du problème transitoire.

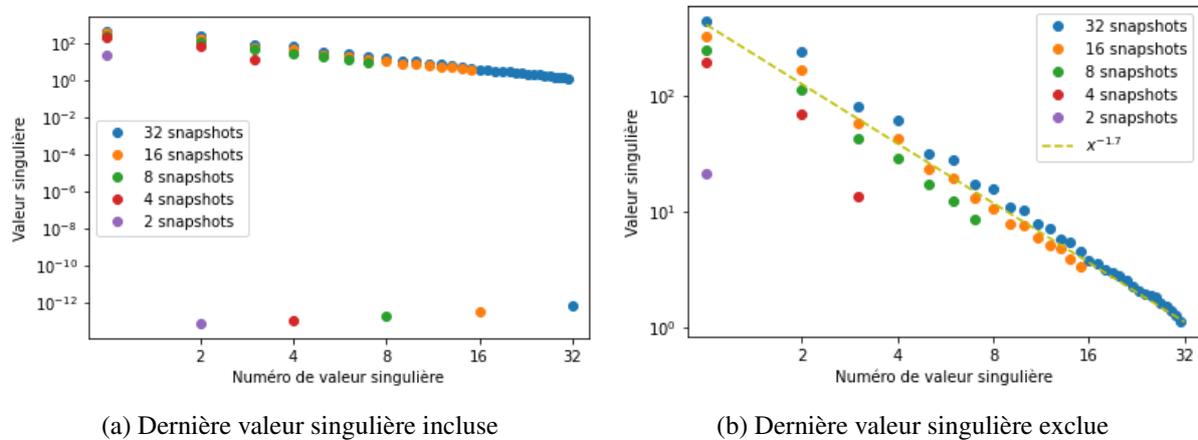


FIGURE 5 – Décroissance des valeurs singulières selon le nombre de snapshots choisis pour des positions de l’interface physique prises linéairement dans l’intervalle  $]0, 1[$ .

#### 4.2.2 Évolution des erreurs du modèle réduit

Pour illustrer l’efficacité du critère énergétique (5), nous avons testé la réduction de modèle avec  $\tau$  prenant les valeurs  $1, 1 - 10^{-3}, 1 - 10^{-2}$  puis  $1 - 10^{-1}$ . Le nombre de modes retenus pour chaque valeur de  $\tau$  est dans la Table (1). Comme pour le cas de changement de conductivités, l’erreur en fonction du nombre de snapshots et du nombre de modes sélectionnés en fonction de  $\tau$  est illustré sur la Figure 6. On observe que pour  $\tau = 1 - 10^{-1}$ , l’erreur augmente significativement par rapport aux autres valeurs de  $\tau$  dès que le nombre de snapshots devient supérieur à 16. Le comportement de l’erreur pour  $\tau = 1$  et  $\tau = 1 - 10^{-3}$  est très proche mais peu de modes sont retirés pour simplifier le problème. On trouve une erreur relativement proche du modèle réduit utilisant tous les modes avec  $\tau = 1 - 10^{-2}$  tout en retirant plus de la moitié des modes pour un nombre de snapshots initial égal à 128. Une valeur de  $\tau$  au moins supérieure à  $1 - 10^{-2}$  sera donc utilisée pour nos applications futures. En utilisant une valeur de  $\tau$  égale

à  $1 - 10^{-2}$ , le problème initial est passé de 1001 degrés de liberté selon l'axe des abscisses à seulement 56 pour 128 snapshots utilisés. Cela illustre l'efficacité de la méthode de réduction POD-Galerkin.

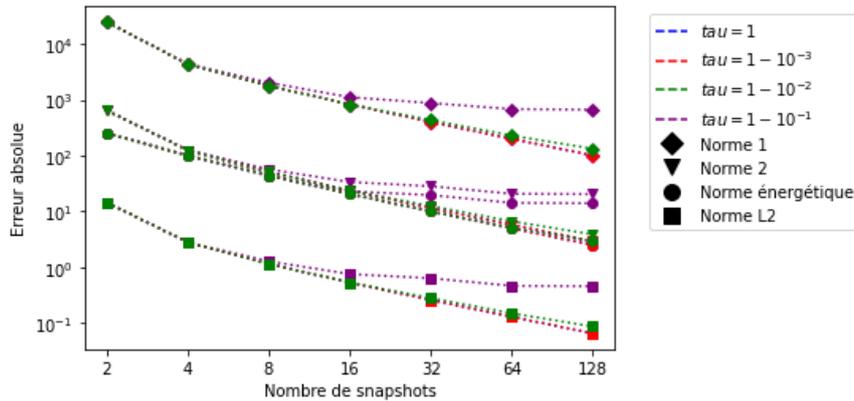


FIGURE 6 – Erreurs de modèle en fonction du nombre de snapshots choisis et du nombre de modes retenus par le critère énergétique avec différentes valeurs de  $\tau$ .

TABLE 1 – Nombre de modes pour la réduction de modèle par rapport au nombre initial de snapshots ( $\tau = 1$ ) pour le critère énergétique utilisé avec différentes valeurs de  $\tau$ .

nombre de snapshots ( $\tau = 1$ )	2	4	8	16	32	64	128
nombre de modes avec $\tau = 1 - 10^{-3}$	1	3	7	14	30	59	113
nombre de modes avec $\tau = 1 - 10^{-2}$	1	2	6	13	23	39	56
nombre de modes avec $\tau = 1 - 10^{-1}$	1	2	4	6	7	8	9

## 5 Conclusion

L'utilisation de la méthode de réduction POD-Galerkin est prometteuse dans le cadre de nos cas tests. Le critère énergétique (5) sera celui que nous utiliserons par la suite pour choisir nos modes dans le problème de mécanique des fluides présenté dans [1]. Par la suite, le choix des positions des interfaces des snapshots sera étudié selon des aprioris physiques du problème transitoire. Il sera également question de tester différentes formes d'interface (planes jusqu'ici) pour la construction de la base de données. Une fois le couplage fonctionnel en appliquant la méthode de réduction, il faudra vérifier la stabilité de la méthode ainsi que les erreurs commises en réduisant le modèle. Enfin, l'objectif est de passer aux problèmes 2D et 3D pour évaluer sur des cas plus réalistes l'efficacité de la méthode de réduction.

## Références

- [1] L. Abouorm, M. Blais, J. Bruchon, S. Drapier, et N. Moulin. *A robust monolithic approach for resin infusion based process modelling*, Key Engineering Materials, numéro 2014, volume 612, pages 306–315, 2014.
- [2] A. Geoffre, M. Ghestin, J. Bruchon, S. Drapier et N. Moulin. *Bounding transverse permeability of fibrous media : a statistical study from random representative volume elements with consideration of fluid slip*, International Journal of Multiphase Flow, volume 143, pages 103751–103763, 2021.
- [3] A. Tello, J. Baiges et R. Codina. *Fluid structure interaction by means of variational multiscale reduced order models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, pages 2601–2625, Wiley Online Library, 2020.
- [4] L. Sirovich et M. Kirby, *Low-dimensional procedure for the characterization of human faces*, Josa a, pages 519–524, Optical Society of America, 1987.
- [5] P. Holmes, J. Lumley, G. Berkooz et C. Rowley, *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*, Cambridge university press, 2012.
- [6] K. Y. Tang, W. R. Graham et J. Peraire, *Active flow control using a reduced order model and optimum control*, in Proceedings of the 27th AIAA Fluid Dynamics Conference (Vol. 96), page 1946, 1996.