

Modélisation efficace de structures élancées géométriquement non linéaires : réponses en régime forcé et modes non linéaires

M. Debeurre¹, A. Grolet¹, B. Cochelin²,
O. Thomas¹

¹ LISPEN, Arts et Métiers Sciences et Technologies (Lille), {marielle.debeurre,aurelien.grolet,olivier.thomas}@ensam.eu

² LMA, Ecole Centrale Marseille, bruno.cochelin@centrale-marseille.fr

Résumé — Dans ce papier, une méthode originale est présentée pour la simulation périodique de structures élancées hautement flexibles. Les structures flexibles sont discrétisées par éléments finis de poutres géométriquement exactes. Ensuite, le modèle est résolu par une méthode de résolution dans le domaine fréquentiel par continuation de solutions périodiques. La méthode proposée combine les principes de la méthode de l'équilibrage harmonique et la méthode asymptotique numérique. Cette étude vise à développer une méthode de résolution la plus efficace possible pour ces structures flexibles.

Mots clés — non linéarités géométriques, modes non linéaires, éléments finis, méthode de l'équilibrage harmonique, continuation de solutions périodiques

1 Introduction

La modélisation de structures hautement flexibles représente un sujet de recherche actuel et pertinent. Il existe plusieurs applications industrielles, notamment dans les industries automobile et aérospatiale. Ces structures démontrent un comportement fortement non linéaire en raison de leur capacité de déplacement en flexion ; elles atteignent des déplacements extrêmes facilement. La complexité de la modélisation d'un tel comportement explique la pertinence de ce sujet aujourd'hui.

1.1 L'état de l'art

Le modèle souvent utilisé pour la modélisation de ces structures flexibles est basé sur la théorie géométriquement exacte des poutres, une théorie qui a été développée premièrement par Reissner [1] et Simo [2]. Le point clé dans ce modèle géométriquement exact est que toutes les non linéarités géométriques liées à la rotation des sections droites de la poutre sont gardées intactes sans simplifications ni troncatures. Cela révèle la difficulté de ce modèle : suivant le choix du paramétrage de la rotation, la résolution du modèle géométriquement exact devient rapidement très coûteuse en temps de calcul, surtout en trois dimensions. De nombreuses méthodes existent dans la littérature proposant des choix différents de paramétrage de la rotation et de résolution, tels que les discrétisations par éléments finis résolues en domaine temporel de Simo et Vu-Quoc [3], Cardona et Géradin [4], Crisfield et Jelenić [5], Zupan et. al. [6] ou, plus récemment, les discrétisations par développement modal résolues en domaine fréquentiel de Farokhi et Ghayesh [7] et Farokhi et Erturk [8] parmi d'autres. Les stratégies temporelles augmentent souvent le coût de calcul de ces simulations très complexes et n'arrivent pas parfois à capturer l'image complète des phénomènes non linéaires.

1.2 Méthode proposée

On propose ici une méthode de résolution originale du modèle géométriquement exact dans le domaine fréquentiel. Au cœur de cette méthode est une technique de continuation de solutions périodiques nommée *la méthode asymptotique numérique* (MAN) mis au point par Cochelin, Damil et Potier-Ferry [10, 11, 9]. La méthode proposée intègre une discrétisation par éléments finis (EF) du modèle de poutre géométriquement exact avec la résolution en fréquentiel. La résolution est entièrement automatisée, ayant été codée en MATLAB dans un solveur, nommé *MANLAB*. Cette méthode proposée pour la simulation

des structures flexibles de poutres a été conçue afin d'identifier l'image complète des phénomènes non linéaires du système, à la fois la réponse en régime forcé et la backbone (équivalente aux modes non linéaires) de la manière la plus efficace possible.

2 Modèle géométriquement exact

Comme il a été noté précédemment, le modèle de poutre privilégié pour la modélisation de structures élancées hautement flexibles est le modèle géométriquement exact. Ce modèle préserve entièrement toutes non linéarités liées à la rotation des sections droites de la poutre ; aucunes simplifications ni troncatures des termes non linéaires ne sont réalisées dans ce modèle. Cela permet la modélisation exacte d'une structure de poutres très flexible quelle que soit l'amplitude du déplacement en statique ou en dynamique car les non linéarités géométriques ne sont jamais simplifiées. En 2D, la rotation du système est paramétrée en gardant les termes $\cos \theta$ et $\sin \theta$ intacts, où θ représente la rotation de la section droite.

2.1 Modèle éléments finis

Une discrétisation par éléments finis (EF) est effectuée en se basant sur une formulation Lagrangienne non linéaire. Le modèle discrétisé utilise des éléments de poutre Timoshenko et des fonctions de forme linéaires. Le modèle EF non linéaire s'écrit alors,

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{D}\dot{\underline{q}} + \underline{f}_{int}(\underline{q}) = \underline{f}_{ext}, \quad \forall t \quad (1)$$

Dans (1), \underline{q} est le vecteur de taille $3n$ des degrés de liberté nodaux $\underline{q} = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \dots \ u_n \ w_n \ \theta_n]$ avec u et w les degrés de liberté dans les directions axiale et transverse respectivement et θ la rotation de la section droite à chaque nœud, pour n nœuds. \underline{M} et \underline{D} sont respectivement les matrices de masse et d'amortissement de taille $3n \times 3n$. Le vecteur $\underline{f}_{int}(\underline{q})$ représente le vecteur des forces internes non linéaires et \underline{f}_{ext} le vecteur des forces externes appliquées à la structure, tous deux de taille $3n$. L'équation du mouvement (1) définissant la structure étudiée est codée puis résolue avec la technique en fréquentiel décrite ci-dessous.

3 Résolution dans le domaine fréquentiel

On introduit ensuite la méthode de résolution de la structure élancée qui représente en grande partie l'originalité de cette étude. Contrairement aux méthodes susmentionnées dans l'introduction, la stratégie ici proposée résout le système entièrement dans le domaine fréquentiel en se basant sur un développement en série de Fourier du déplacement de la poutre $\underline{u}(t)$ conformément à la *méthode de l'équilibrage harmonique* (HBM). La *méthode asymptotique numérique* (MAN) est ensuite appliquée au système afin de tracer les solutions $\underline{u}(t)$ en fonction d'un paramètre réel λ selon la solution souhaitée : la réponse en régime forcé ou les modes non linéaires du système. Ce procédé est codé directement dans un solveur, nommé *MANLAB* et écrit en *MATLAB*. Une explication plus détaillée de ces étapes sera présentée dans les paragraphes à venir. Il est néanmoins noté que la MAN telle qu'elle est codée dans *MANLAB* nécessite une étape clé, une réécriture des termes non linéaires sous forme polynomiale d'ordre deux ou moins ; on l'appelle ici la *réécriture quadratique*.

3.1 Réécriture quadratique

La réécriture quadratique est réalisée afin de réduire la complexité des termes non linéaires non polynomiaux d'ordre deux ou moins dans le système. Les non linéarités géométriques sinus et cosinus peuvent être réécrites par exemple en introduisant des variables additionnelles, appelées des variables *auxiliaires*, tels que,

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta \\ s &= \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

où c et s représentent des solutions d'équations différentielles linéaires [13]. L'intérêt de cette réécriture est que, lors du développement des équations en séries, le calcul des seconds membres non linéaires est facilité [9]. L'introduction des variables auxiliaires augmente la taille du système, mais réduit en même temps la complexité globale. Des dérivations plus détaillées avec plusieurs exemples de la réécriture quadratique peuvent être trouvées dans [11, 9, 13].

3.2 Résolution avec le solveur *MANLAB*

Les équations du mouvement (1) sont réécrites afin d'intégrer les variables auxiliaires avant d'être implémentées dans le solveur *MANLAB*. Si on note \underline{u} le vecteur des inconnues du système quadratique, on le développe en série de Fourier tronquée à un certain nombre d'harmoniques H selon l'HBM,

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_0 + \sum_{k=1}^H (\underline{u}_k^c \cos k\omega t + \underline{u}_k^s \sin k\omega t) \quad (3)$$

Ensuite, *MANLAB* résout le système via la MAN, où les solutions de l'équation algébrique non linéaire

$$\underline{R}(\underline{u}, \lambda) = 0, \quad \underline{R}, \underline{u} \in \mathbb{R}^N \quad (4)$$

sont obtenues en développant \underline{u} et un paramètre réel λ sous forme de séries entières en fonction d'un paramètre de chemin a ,

$$\begin{aligned} \underline{u}(a) &= \underline{u}_0 + a\underline{u}_1 + a^2\underline{u}_2 + a^3\underline{u}_3 + \dots \\ \lambda(a) &= \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

selon les principes des méthodes de continuation. Comme la résolution est entièrement automatisée dans *MANLAB*, seules les équations sont entrées dans le solveur après avoir été retravaillées en fonction de la réécriture quadratique. *MANLAB* résout les équations en suivant cette procédure; la totalité de la résolution est effectuée dans le domaine fréquentiel.

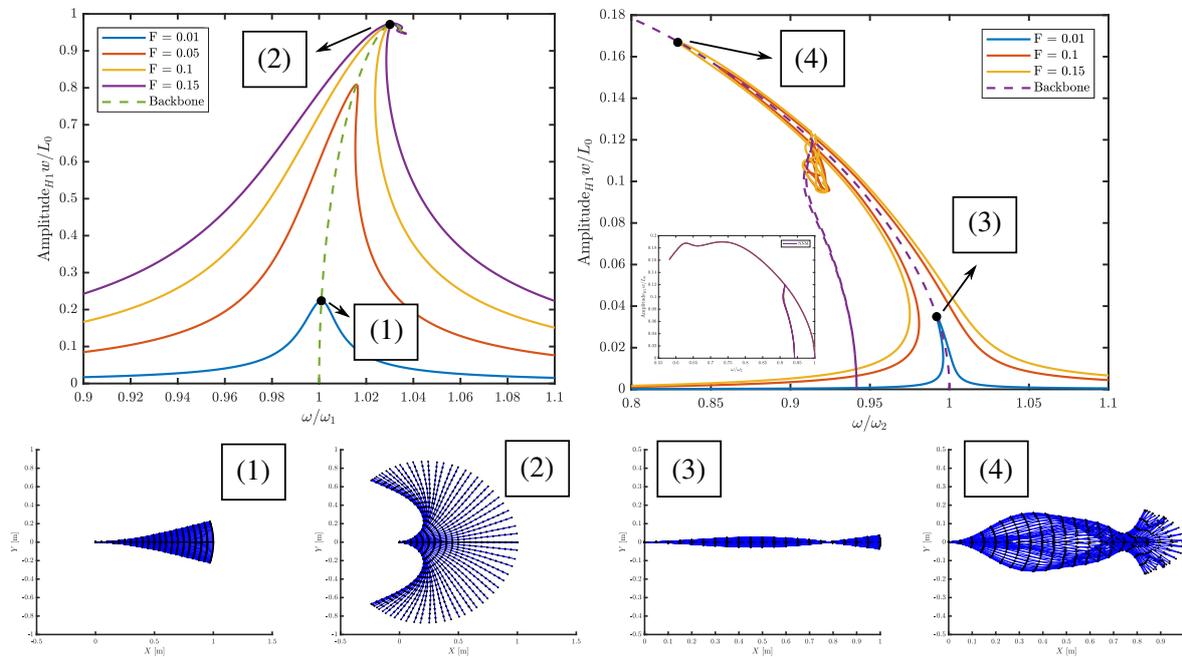


FIGURE 1 – Modes 1 et 2 de vibration et déformées d'une poutre encastree-libre avec forçage à son extrémité; (gauche) premier mode, amplitude de la première harmonique du déplacement transverse normalisé par la longueur de la poutre en fonction de la fréquence normalisée, (droite) deuxième mode.

Si la réponse en régime forcé est souhaitée, l'équation (1) est résolue directement, avec λ contrôlant la fréquence de forçage,

$$\underline{M}\ddot{q} + \underline{D}\dot{q} + \underline{f}_{int}(q) = \underline{F}_0 \cos \lambda t \quad (6)$$

Par contre, si les modes non linéaires sont souhaités, l'équation à résoudre s'écrit,

$$\underline{M}\ddot{q} + \lambda \underline{q} + \underline{f}_{int}(q) = 0 \quad (7)$$

vu que les modes non linéaires représentent les solutions du système conservatif libre [14]. Une condition de phase est ajoutée à l'équation (7), par exemple une composante de u_k^s égale à zéro. La Figure 1 illumine un exemple de ces solutions pour le cas d'une poutre encastree-libre flexible, démontrant la superposition de la réponse en régime forcé (6) et la backbone, équivalente aux modes non linéaires (7). Dans ce cas, la matrice d'amortissement \underline{D} est représentée par un amortissement de Rayleigh massique,

$$\underline{D} = \alpha \underline{M} \quad (8)$$

avec $\alpha = 5 \times 10^{-2}$ le coefficient d'amortissement.

4 Conclusion

Cette étude se concentre sur le développement d'une méthode robuste et efficace pour la simulation dynamique de structures élancées qui atteignent des amplitudes de vibration extrêmement larges. Deux buts sont donc identifiés lors du développement : (1) mener la simulation des structures jusqu'à la plus grande amplitude de vibration possible et (2) diminuer le plus possible le temps de calcul, surtout par rapport aux méthodes existantes.

La méthode ci-proposée atteint ces objectifs en introduisant une nouvelle méthodologie pour la simulation de poutres géométriquement exactes. Cette méthodologie est idéale pour la modélisation de structures flexibles manifestants d'extrêmes amplitudes de vibration. Elle vise en particulier à rendre les simulations aussi efficaces que possible, car de telles simulations sont connues pour leur coût de calcul très élevé. En plaçant la méthode de résolution entièrement dans le domaine fréquentiel et en appliquant des techniques de réduction de modèles, on vise à développer une méthode qui réduit le plus possible le temps de calcul pour la simulation d'une dynamique extrêmement large.

4.1 Perspectives

La méthode actuelle est capable de simuler les structures hautement flexibles en 2D. Trois perspectives pour la suite de cette étude sont identifiées : premièrement, le modèle actuel, en 2D, doit être réduit afin de le rendre encore plus efficace. La réduction d'ordre de ce modèle sera effectuée selon les principes de la forme normale. Une méthode nommée *direct normal form* (DNF) a été récemment développée pour une application aux modèles éléments finis non linéaires géométriquement exacts [15]. Dans un deuxième temps, le modèle 2D sera généralisé en trois dimensions afin de modéliser tous comportements possibles de la structure flexible. Cette étape par contre représente un travail important : il existe plusieurs manières de paramétrer les rotations des sections droites de la poutre en trois dimensions, toutes avec leurs avantages et leurs inconvénients.

Le modèle 3D sera ensuite réduit selon la même méthode DNF. L'objectif de cette étude étant atteint, la méthode servira en tant qu'un outil robuste et efficace pour toutes simulations de structures hautement flexibles manifestant une dynamique géométriquement non linéaire.

Références

- [1] E. Reissner. *On one-dimensional finite-strain beam theory : The plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics, 23, page795-page804, 1972.
- [2] J.C. Simo. *A finite strain beam formulation. The threedimensional dynamic problem. Part I*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49, page55-page70, 1985.
- [3] J.C. Simo, L. Vu-Quoc. *A three-dimensional finite-strain rod model. Part II : Computational aspects*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, page79-page116, 1986.

- [4] A. Cardona, M. Géradin. *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, page2403-page2438, 1988.
- [5] M.A. Crisfield, G. Jelenić. *Objectivity of strain measures in geometrically exact 3D beam theory and its finite element implementation*, Proceedings of the Royal Society of London, 455, page1125-page1147, 1999.
- [6] E. Zupan, M. Saje, D. Zupan. *The quaternion-based three-dimensional beam theory*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, page3944-page3956, 2009.
- [7] H. Farokhi, M.H. Ghayesh. *Geometrically exact extreme vibrations of cantilevers*, International Journal of Mechanical Sciences, 168, 105051, 2020.
- [8] H. Farokhi, A. Erturk. *Three-dimensional nonlinear extreme vibrations of cantilevers based on a geometrically exact model*, Journal of Sound and Vibration, 510, 116295, 2021.
- [9] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique, collections méthodes numériques*, Hermes Sciences Lavoisier, 2007.
- [10] N. Damil, M. Potier-Ferry. *A new method to compute perturbed bifurcation : application to the buckling of imperfect elastic structures*, International Journal of Engineering Sciences, 26, page943-page957, 1990.
- [11] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Asymptotic-numerical method and Padé approximations for non-linear elastic structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, page1187-1213, 1994.
- [12] O. Thomas, A. Sénéchal, J.F. Deü. *Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams*, Nonlinear Dynamics, 86, page1293-page1318, 2016.
- [13] B. Cochelin, C. Vergez. *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*, Journal of Sound and Vibration, 324, page243-page262, 2009.
- [14] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne. *Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes*, Journal of Sound and Vibration, 273, page77-page101, 2004.
- [15] A. Vizzaccaro, Y. Shen, L. Salles, J. Blahos, C. Touzé. *Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 384, 113957, 2021.