

Sur une approche espace-temps isogéométrique des modèles à gradient d'endommagement

F. Feutang¹, S. Lejeunes¹, D. Eyheramendy¹

¹ LMA, Aix-Marseille Université, Centrale-Marseille, CNRS, {lejeunes,feutang,eyheramendy}@lma-cnrs.mrs.fr

Résumé — Dans ce papier, nous présentons une nouvelle approche pour résoudre les problèmes de propagation de fissure par des modèle à gradient d'endommagement. Cette approche est basée sur la construction d'une formulation variationnelle en Galerkin continue en espace et discontinue en temps adaptée au cas de fissuration fragiles d'un matériau élastique. Le problème variationnel est ensuite discrétisé par des B-splines. A travers quelques exemples numériques, nous discutons de l'intérêt de cette approche comparativement aux approches itératives.

Mots clés — Gradient d'endommagement, Espace-temps, IGA, Galerkin discontinu.

1 Introductions

Oden, Argyris et Sharpf furent les premiers à formuler des éléments-finis espace-temps pour résoudre des problèmes, linéaires, dépendant du temps. Il s'agissait principalement de considérer le temps comme une dimension supplémentaire du problème (c.f. [1]). Suite à ces premiers travaux, on peut trouver dans la littérature de nombreuses applications de cette méthode notamment en élasto-dynamique : dans [2] l'espace-temps en élément-fini est utilisé pour traiter un problème de viscoélasticité en 1D. On trouve aussi des applications au problème de transfert thermique [3], de surface libre [4], ou d'advection-diffusion[5].

L'analyse isogéométrique (IGA), introduite par Huhges et al [6], peut-être vue comme une méthode d'éléments-finis utilisant des fonctions d'approximations NURBS ou B-splines. Le premier intérêt de cette méthode est de pouvoir obtenir une représentation discrète exacte de géométries complexes. D'autre part, l'IGA présente une grande flexibilité dans la définition des espaces d'approximations, car elle permet de contrôler à la fois l'ordre des fonctions et leur ordre de continuité en certains points. Dans des travaux précédents, nous avons proposé d'utiliser l'IGA dans un cadre espace-temps et nous avons exploré les possibilités de ce type de méthode pour des problèmes linéaires et non-linéaires (élastodynamique et couplage multiphysique, cf. [7]). D'autres auteurs ont également proposé des formulations similaires pour traiter des problèmes paraboliques [8], pour des problèmes non-linéaires elliptiques et paraboliques [9] et pour des équations d'advection-diffusion [10]. Bien que les formulations à base de modèles à gradient d'endommagement ne dépendent pas explicitement du temps dans le cas élastique, l'utilisation de schémas itératifs dans la résolution numérique de ces problèmes permet de les considérer comme dépendent implicitement du temps.

Les méthodes de champs de phase pour simuler la propagation de fissures prennent leur origine dans les travaux de Francfort et Marigo [11]. Bourdin [12] a ensuite établi une forme régularisée de la formulation de Francfort et Marigo. Enfin, Miehe [13] proposera une forme modifiée de ces équations notamment en décomposant l'énergie élastique en une partie liée à la traction et une partie liée à la compression afin de gérer des chargements non-monotones.

La simulation numérique de la propagation de fissure par des modèles à gradient d'endommagement présente de nombreux avantages parmi lesquels la possibilité de pouvoir décrire l'initiation et la bifurcation de fissures. La fissure est ainsi représentée par un champ scalaire continu, noté d , variant entre 0 et 1. Néanmoins, ces modèles conduisent à deux inconvénients majeurs sur le plan numérique : un maillage très fin est bien souvent nécessaire et les équations à résoudre sont non convexes. Il faut ainsi mettre en œuvre des schémas itératifs particuliers avec des pas de temps souvent très petits. Certains auteurs ont

néanmoins montré que l'IGA présentait un intérêt certain pour discrétiser l'espace (c.f. [14]). Dans cette communication, nous proposons de reprendre les formulations proposées par [13] que nous traitons en IGA espace-temps à l'aide d'une méthode de type Galerkin discontinue en temps.

2 Formulation en Galerkin discontinue espace-temps pour l'élasticité linéaire (fissuration fragile)

En suivant [13], on peut définir le potentiel incrémental suivant :

$$\Pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d}) = \frac{d}{dt} E(\mathbf{u}, d) + D(\dot{d}) - P(\dot{\mathbf{u}}) \quad (1)$$

ou \mathbf{u} est le champ cinématique et d le champ d'endommagement, $E(\mathbf{u}, d)$ est l'énergie stockée dont la variation est définie par :

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \dot{\Psi} dV = \int_{\Omega} (\partial_d \Psi) \dot{d} + (\partial_{\varepsilon} \Psi) : \dot{\varepsilon} dV \quad (2)$$

avec $\Psi(\varepsilon, d)$ le potentiel d'énergie libre, que l'on peut choisir sous la forme suivante [13] :

$$\Psi(\varepsilon, d) = (g(d) + k) \Psi_0^+(\varepsilon) + \Psi_0^-(\varepsilon),$$

Le paramètre k est une raideur résiduelle faible (qui ne contribue pas dans le cas où le milieu est totalement fissuré), $\Psi_0^+(\varepsilon)$ et $\Psi_0^-(\varepsilon)$ sont les parties liées à la traction et à la compression. La fonction de dégradation $g(d)$ est prise telle que :

$$g(d) = (1 - d)^2$$

Nous nous plaçons dans le cas isotrope :

$$\Psi(\varepsilon, d) = (g(d) + k) \Psi_0(\varepsilon) \quad \Psi_0(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\varepsilon)^2 + \mu(\varepsilon : \varepsilon)$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé.

L'énergie dissipée par fissuration $D(\dot{d})$ est définie par :

$$D(\dot{d}) = \int_{\Omega} \phi(\dot{d}, \nabla \dot{d}, d, \nabla d) dV = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{g_c}{l} \dot{d} + (g_c l \nabla d) \cdot \nabla \dot{d} + \frac{\rho}{2} < \dot{d} >^2 \right) \right\} dV \quad (3)$$

avec l une longueur caractéristique, g_c l'énergie critique de rupture et ρ un paramètre s'apparentant à une viscosité. La puissance des forces extérieures $P(\dot{\mathbf{u}})$ est définie par :

$$P(\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_n(x, t) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS \quad (4)$$

L'écriture des conditions de stationnarité du potentiel Π défini à l'équation (1), nous donne les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \text{div}(\partial_{\varepsilon} \Psi) + \underline{f} = \underline{0} \\ \text{div}(\partial_{\nabla d} \phi) - (\partial_d \Psi + \partial_d \phi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Nous définissons ensuite le domaine espace temps Q , tel que $Q = \Omega \times [0, T]$. Ce domaine est divisé dans le temps en n domaines $Q_i = \Omega \times [T_{i-1}, T_i]$. Nous adoptons une forme discontinue en temps en considérant des termes de discontinuités qui sont évalués entre les faces en temps des domaines $\{Q_{i-1}, Q_i\}$, définissant ainsi des "time slabs". Enfin nous ne considérons que le cas des maillages structurés en temps, qui peuvent être vu comme une extrusion dans le temps d'un domaine espace. La forme variationnelle va nous conduire à un problème qui peut-être mis sous forme itérative : chaque "time slab" est résolu successivement. La forme variationnelle correspondant aux équations d'Euler-Lagrange précédentes est telle que pour chaque Q_i , on cherche $(\mathbf{u}_i, d_i) \in (\mathcal{H}^u \times \mathcal{H}^d)$, tel que $\forall (\delta \mathbf{u}_i, \delta d_i) \in (\mathcal{H}_0^u \times \mathcal{H}^d)$ on ait :

$$\begin{cases} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{\Omega} -g(d_i) \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \mathbf{u}_i) dQ_i + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{\Omega} f \delta \mathbf{u}_i dQ_i + \int_{P_i} \hat{T} \delta \mathbf{u}_i dP_i + \alpha_u \int_{\partial P_i} [u_i - u_{i-1}] \delta \mathbf{u}_i dP_i = 0 \\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{\Omega} \left(\frac{G_c}{l} d_i + \frac{\partial \Psi}{\partial d} + \rho < \dot{d}_i > \right) \delta d_i dQ_i + G_c l \int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{\Omega} \nabla d_i \nabla(\delta d_i) dQ_i + \alpha_d \int_{\partial P_i} [d_i - d_{i-1}] \delta d_i dP_i = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Les termes en bleu, sont des termes de discontinuités en temps.

3 IGA espace-temps et implémentation numérique

Dans cette section nous présenterons brièvement la construction de l'approximation espace-temps à l'aide de fonctions NURBS (c.f. [6]). Les NURBS sont construites à partir des B-splines qui sont des fonctions polynomiales. Les B-splines sont évaluées à partir d'une série de points (appelé "knot vector") définie dans un espace paramétrique.

la i^{eme} fonction NURBS d'ordre p est donnée par :

$$R_{i,p}(\zeta) = \frac{N_{i,p}(\zeta)\omega_i}{\sum_l N_{l,p}(\zeta)\omega_l} \quad (7)$$

ou $N_{i,p}(\zeta)$ est une fonction B-splines définie par la formule de Cox-de-Boor et ω_i et le i^{eme} poids qui est un paramètre de l'approximation.

Dans les cas 1D ou 2D, le domaine espace-temps Q est décrit par une surface ou un volume paramétré. Ainsi, en 1D par exemple un point du domaine espace-temps est défini par ces coordonnées, tel que :

$$t(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,p}(\zeta) R_{j,p}(\eta) B_{i,j}^t \quad (8)$$

$$x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,p}(\zeta) R_{j,p}(\eta) B_{i,j}^x \quad (9)$$

les $(B_{i,j}^x, B_{i,j}^t)$ sont appelés points de contrôles (équivalent au nœud en Élément finis). La représentation précédente est généralisable aux cas 2D et 3D sans difficultés grâce à la nature tensorielle de la construction de la base d'approximation. Les champs inconnus sont approximés de la même manière que la géométrie (eqs. (8)-(9)). On a ainsi (toujours en 1D) :

$$\mathbf{u}_h(\eta, \xi) = [N_u(\eta, \xi)]\{u\} \quad (10)$$

$$d_h(\eta, \xi) = [N_d(\eta, \xi)]\{d\} \quad (11)$$

ou les matrices $[N_u]$ et $[N_d]$ contiennent les fonctions d'approximations évalués en (η, ξ) (qui sont à support compact) des champs \mathbf{u} et d . Les degrés de libertés (i.e. les valeurs aux points de contrôles) sont ici représentés par les vecteurs $\{u\}$ et $\{d\}$. On peut également simplement exprimer les différents opérateurs différentiels utilisés dans la formulation variationnelles. On a par exemple :

$$\nabla_x u_h(\eta, \xi) = [B_x(\eta, \xi)]\{u\} \quad (12)$$

$$\varepsilon(u_h(\eta, \xi)) = [B_x^{\text{sym}}(\eta, \xi)]\{u\} \quad (13)$$

$$\nabla_x d_h(\eta, \xi) = [B_x(\eta, \xi)]\{d\} \quad (14)$$

La nature séquentielle de la formulation en Galerkin discontinue en temps nous permet de résoudre le problème de manière itérative en ne considérant pour le calcul qu'un seul "patch"¹. Ce même patch est constitué d'une seule couche d'élément en temps, que nous faisons avancer dès que la convergence est atteinte pour l'itération i . Chaque itération étant non-linéaire, nous utilisons un schéma de type Newton-Raphson dans chaque patch. En remplaçant tous les opérateurs différentiel et les champs dans l'eq. (6), la forme faible approximée est obtenue sans difficulté et peut être mise sous forme matricielle (après une opération d'assemblage lié au support compact des fonctions d'approximation) :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ud} \\ K_{du} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^u \\ f^d \end{Bmatrix} \quad (15)$$

On obtient ainsi un système linéaire non-symétrique à résoudre.

1. Un patch est constitué d'un espace paramétrique, d'un knot vector et de fonctions d'approximations. Les patch espace-temps correspondent aux domaines Q_i de la formulation variationnelle

4 Exemple numérique

Nous considérons une plaque carrée de dimension 100 X 100 en déformation plane, le module de young E est de 210 GPa et le coefficient de poisson $\nu = 0.38$. Cette plaque contient un fissure initiale et est soumise à des déplacements imposés de traction (voir figure 1). Le taux critique de restitution d'énergie est pris tel que $G_c = 2.7 * 10^{-3}$ KN/mm et la longueur interne est choisi tel que $l = 1$ mm.

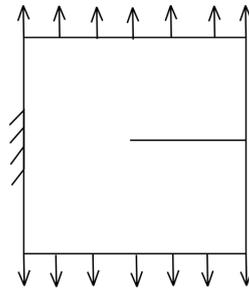


FIGURE 1 – Géométrie considérée et conditions aux limites

La simulation est réalisée avec FemJava² en IGA espace temps.

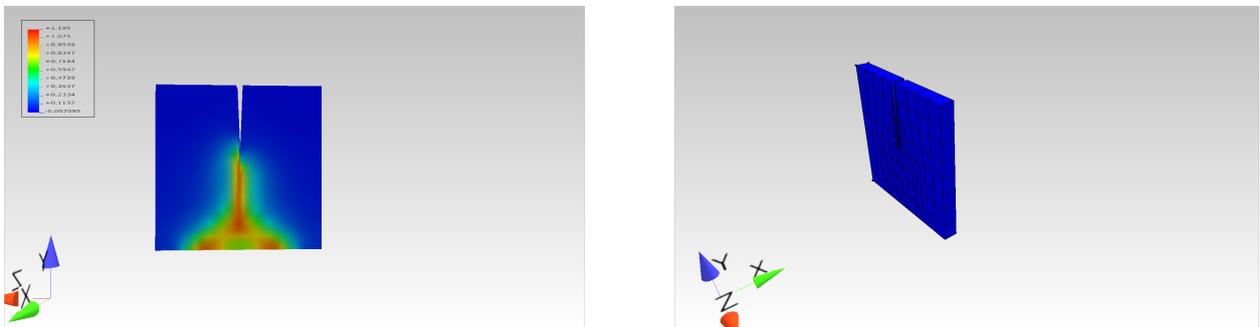


FIGURE 2 – Isocouleur du champs d'endommagement et représentation du maillage espace-temps considéré

La figure 2 représente l'endommagement dans la plaque à la fin du chargement. Le résultat est qualitativement en accord avec des simulations réalisées avec des éléments-finis classiques (à l'aide du logiciel FeNicS). La fissure se propage initialement horizontalement puis elle bifurque en deux fissures en accord avec les conditions aux limites du problème. Ce premier résultat a été obtenu avec un maillage assez grossier et des fonctions d'approximations quadratiques en espace et en temps. Le nombre de time slab utilisé est assez faible au regard du nombre d'itérations nécessaire sous FeNicS. Ces premiers résultats encourageants devront être confirmés par une étude plus systématique et plus quantitative.

5 Conclusion

Nous avons développé une approche originale qui vise à résoudre des problèmes de propagation de fissure à l'aide de modèles à gradients d'endommagement. Notre objectif premier étant d'obtenir un gain en terme de performances numériques en particulier dans le cas de la propagation fragile. Pour ce faire, nous utilisons une approche espace-temps en Galerkin discontinue (en temps uniquement) basée sur l'analyse isogéométrique.

Notre objectif à plus long terme consiste à prendre en compte des modèles ductiles voir couplés thermique-mécanique pour bénéficier ainsi de la souplesse offerte par notre approche puisque nous pouvons contrôler très simplement l'ordre et la continuité en temps (et en espace) des modèles numériques que nous développons.

2. Code de calcul éléments-finis et IGA développé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

Références

- [1] J Tinsley Oden. A general theory of finite elements. ii. applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3) :247–259, 1969.
 - [2] Adam Podhorecki. The viscoelastic space-time element. *Computers & structures*, 23(4) :535–544, 1986.
 - [3] John C Bruch Jr and George Zyzolowski. Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3) :481–494, 1974.
 - [4] P Jamet and R Bonnerot. Numerical solution of the eulerian equations of compressible flow by a finite element method which follows the free boundary and the interfaces. *Journal of Computational Physics*, 18(1) :21–45, 1975.
 - [5] H Nguyen and J Reynen. A space-time least-square finite element scheme for advection-diffusion equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42(3) :331–342, 1984.
 - [6] Thomas JR Hughes, John A Cottrell, and Yuri Bazilevs. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41) :4135–4195, 2005.
 - [7] Christelle Saade. *Méthodes isogéométriques espace-temps pour des équations multi-champs en mécanique*. PhD thesis, Ecole centrale de Marseille, 2020.
 - [8] Ulrich Langer, Stephen E Moore, and Martin Neumüller. Space–time isogeometric analysis of parabolic evolution problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 306 :342–363, 2016.
 - [9] C Hesch, S Schuß, M Dittmann, SR Eugster, M Favino, and R Krause. Variational space–time elements for large-scale systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326 :541–572, 2017.
 - [10] Jesús Bonilla and Santiago Badia. Maximum-principle preserving space–time isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 354 :422–440, 2019.
 - [11] Gilles A Francfort and J-J Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
 - [12] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort, and Jean-Jacques Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797–826, 2000.
 - [13] Christian Miehe, Fabian Welschinger, and Martina Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field fe implementations. *International journal for numerical methods in engineering*, 83(10) :1273–1311, 2010.
 - [14] Michael Johns Borden. *Isogeometric analysis of phase-field models for dynamic brittle and ductile fracture*. PhD thesis, 2012.
-