

Nouvelle résolution numérique du problème de quart de massif en présence de bords libres

A.K. Ahyee^{1,2}, T. Chaise¹, A.Duval¹, D.Nélias¹

¹. Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France.

². Safran SAE, Centre de Villaroche, 77550 Moissy Cramayel, France.
{amakoe-komlanvi.ahyee,thibaut.chaise,arnaud.duval,daniel.nelias}@insa-lyon.fr

Résumé — Les problèmes de contact sur un quart de massif (massif présentant un bord libre tout près de la zone de contact) sont d'un grand intérêt tant dans le milieu industriel qu'académique et ont de nombreuses applications utiles et pratiques partout où des bords sont impliqués. Ainsi la résolution du problème nécessite une extension de la théorie de Hertz. Ce papier présente un nouvel outil numérique rapide et pratique pour la résolution du problème. Une validation de la présente méthode de résolution a été effectuée par comparaison avec la méthode des éléments finis et la littérature.

Mots clés — Quart de massif, Bord libre, Semi-Analytique.

1 Introduction

Bien que la plupart des problèmes de contact soient correctement décrits par la théorie de Hertz, dans certaines applications pratiques telles que les engrenages, les roulements à rouleaux ou les mécanismes de suiveur de came..., la limite de contact est si proche du bord du corps que les effets de bords ne peuvent être négligés ni ignorés.

Une autre situation où les effets de bords modifient la réponse des matériaux, c'est le cas des essais de nanoindentation ou d'indentation. L'essai d'indentation consiste à faire pénétrer une pointe dans un matériau pour en déduire ses propriétés mécaniques. Ainsi au cours de l'essai les propriétés mécaniques sont recherchées jusqu'aux extrémités des bords libres des échantillons. Pour ces cas de contact, les hypothèses de Hertz ne sont plus valides, ainsi un modèle du quart de massif permet de mieux traduire la réalité physique et est plus exact.

Rappelons que le problème de quart de massif a été étudié pour la première fois par Shepherd [6]. Ensuite Hetenyi s'est penché sur le problème en 1960 [2] où il proposa une ingénieuse méthode de réflexion et d'itérations pour obtenir des résultats d'une précision acceptable. Plus tard en 1990, Hanson et Keer [1] ont établi une nouvelle méthode pour résoudre le problème du quart de massif. Elle combine une résolution analytique et numérique. Cependant, l'implémentation numérique de la méthode reste complexe.

En 2010, Guenfoud et al [3] ont utilisé la méthode de Ritz pour calculer avec une précision sans précédent les déplacements d'un quart de massif élastique. Puis en 2011 Guibault et al [4] ont mis en place une méthode de correction rapide ne générant pas d'augmentation du temps de calcul. Par la suite le cas de deux quart de massif soudés ensemble, indentés par une sphère rigide a été étudié par Wang et al [7] et résolu par la méthode des inclusions équivalentes.

Suite aux travaux de Hetenyi et Keer, en 2012 Zhang et al. [8] ont proposé une solution explicite du problème basée sur une formulation matricielle. Récemment en 2016, Zhang et al [9] ont étendu la formulation matricielle au problème du massif ayant deux surfaces libres simultanément.

Dans la suite nous proposons un modèle numérique permettant de résoudre le problème du quart de massif basée sur une nouvelle approche. Cette nouvelle approche est dérivée de la méthode de correction de Guilbault. Ainsi le modèle utilise la technique de superposition

des pressions miroirs de Hetenyi ainsi que les méthodes semi-analytiques optimisés par des Transformées de Fourier Rapides (FFT).

2 Description Théorique

2.1 Méthode de superposition des massifs semi-infini

Si nous considérons le problème du quart de massif soumis à un chargement normal. La présence du chargement près du bord libre va entraîner des contraintes internes dans ce dernier.

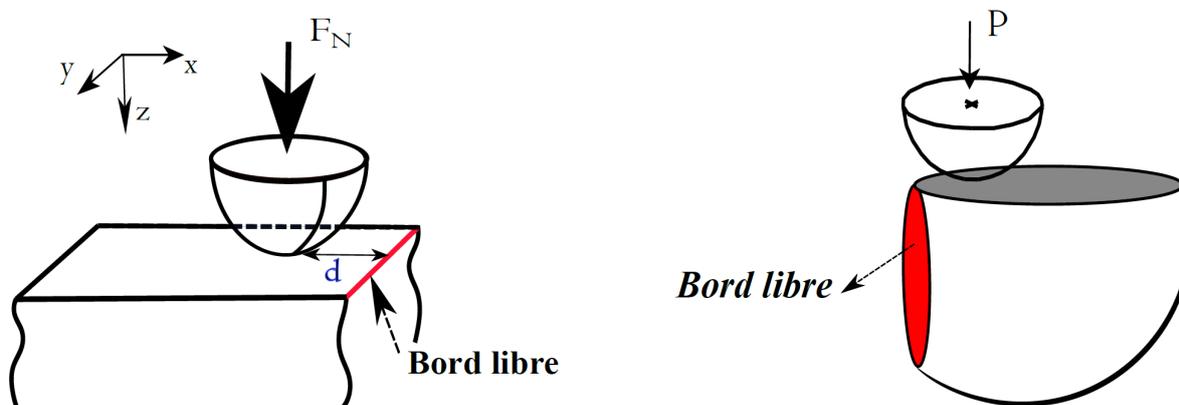


FIGURE 1 – Quart de massif soumis à un chargement normal

Ces contraintes internes sur le bord libre doivent théoriquement être nulles. La méthode de correction de Hetenyi permet d'obtenir les conditions de bords libres (de libérer les bords du massif des contraintes de cisaillement).

Cette méthode consiste donc, pour une pression $P(x,y)$ appliquée en $-x_0$, à appliquer sa pression symétrique $P(-x,y)$ en x_0 . Cette superposition permettra de supprimer le cisaillement sur le plan de chargement ($x = 0$) mais va engendrer sur le plan horizontal ($z = 0$) des contraintes internes. La suppression du cisaillement sur le plan ($x = 0$) passera à son tour par la superposition des pressions miroirs et cette nouvelle correction engendrera une contrainte résiduelle sur le plan horizontal de chargement ($z = 0$).

En répétant ce processus plusieurs fois, les contraintes internes de correction vont s'éloigner du bord et tendre vers 0.

Pour rappel cette méthode de correction ne tient pas compte de l'influence des contraintes normales sur le bord libre. Si l'on réduit le quart de massif 3D à un quart de massif plan 2D, la figure ci dessous illustre le processus de correction.

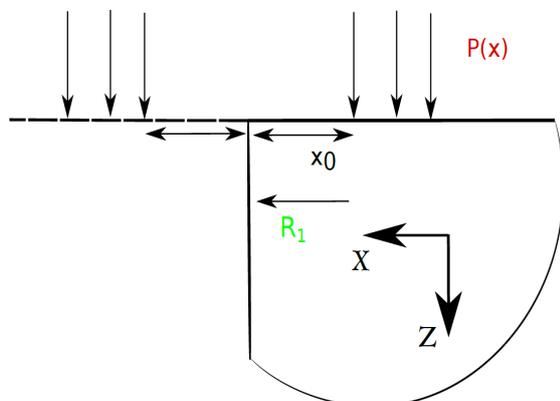


FIGURE 2 – (a)

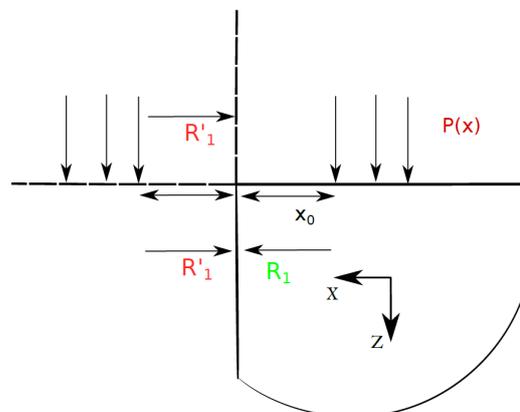


FIGURE 3 – (b)

FIGURE 4 – a) Etape 1 de la superposition b) Etape 2 de la superposition

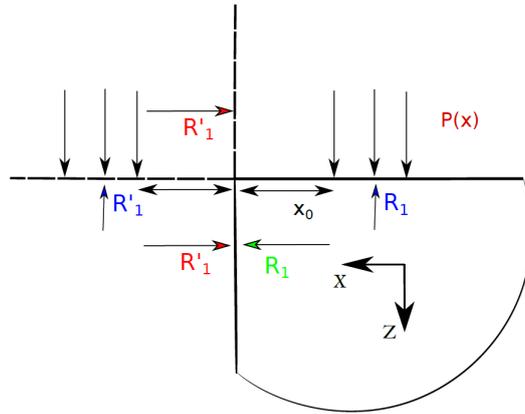


FIGURE 5 – Etape 3 de la superposition

Pour tenir compte de l'effet du chargement normal sur le comportement du bord, le raisonnement de Guilbault sera adopté. Son raisonnement consiste à compenser l'influence de la contrainte normale sur l'amplitude de déplacement par la détermination d'un facteur de correction.

En effet lorsqu'un solide est soumis à une charge normale concentrée suivant z , le champ de déplacements à la surface du solide est donné par :

$$\begin{aligned} U_x(F) &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\} \\ U_y(F) &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\} \\ U_z(F) &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + 2\left(\frac{1-2\nu}{\rho}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Les équations 1 écrites ci dessus seront réécrites pour quantifier l'influence des forces successives de corrections sur le déplacement normal massif. Ainsi la nouvelle méthode de correction déployée consiste en l'application de deux facteurs de corrections ψ_1 et ψ_2 respectivement associés au champ de pression suivant les axes (ox) et (oz). Cette méthode est illustrée sur la figure ci-dessous.

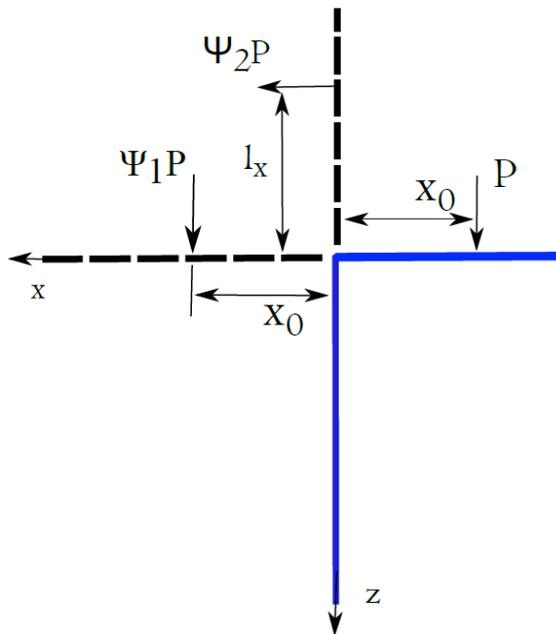


FIGURE 6 – Nouvelle méthode de correction en 2D

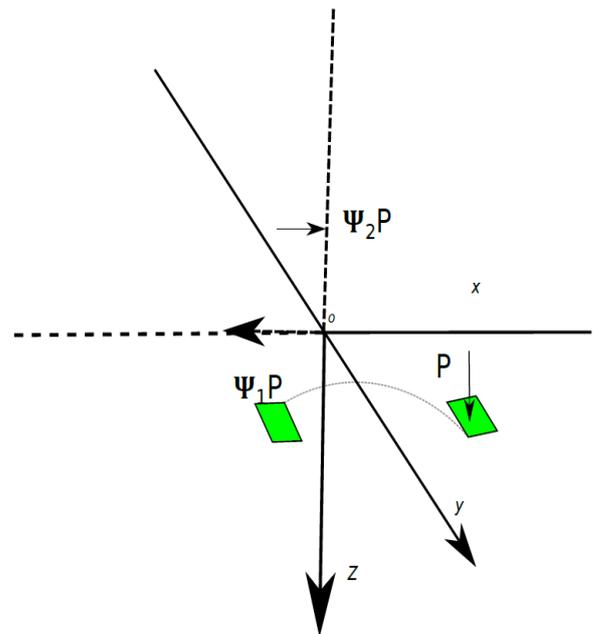


FIGURE 7 – Nouvelle méthode de correction en 3D

3 Distribution et amplitude de la pression de contact

Un contact sphérique est réalisé sur un quart de massif tel que le centre de contact soit situé à une distance d du bord libre. Les valeurs des paramètres de chargement du problème sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

TABLE 1 – Les paramètres matériaux et conditions du contact

Paramètre	Valeur
Chargement normal, $P(N)$	1923
Module d'Young de l'indenteur, $E1(GPa)$	Rigide
Rayon de l'indenteur (sphère), $R(mm)$	20
Module d'Young du quart de massif, $E2(GPa)$	210
Rayon de l'indenteur (sphère), $R(mm)$	20
Coefficient de poisson du quart de massif, $\nu2$	0.3
Pression maximale de contact de Hertz, $P_0 (MPa)$	3672.76
Rayon de contact de Hertz, $a (mm)$	0.5
Distance d/a	0-3

La figure ci-dessous montre le profil de pression au centre du contact en fonction de la distance d/a par rapport au bord.

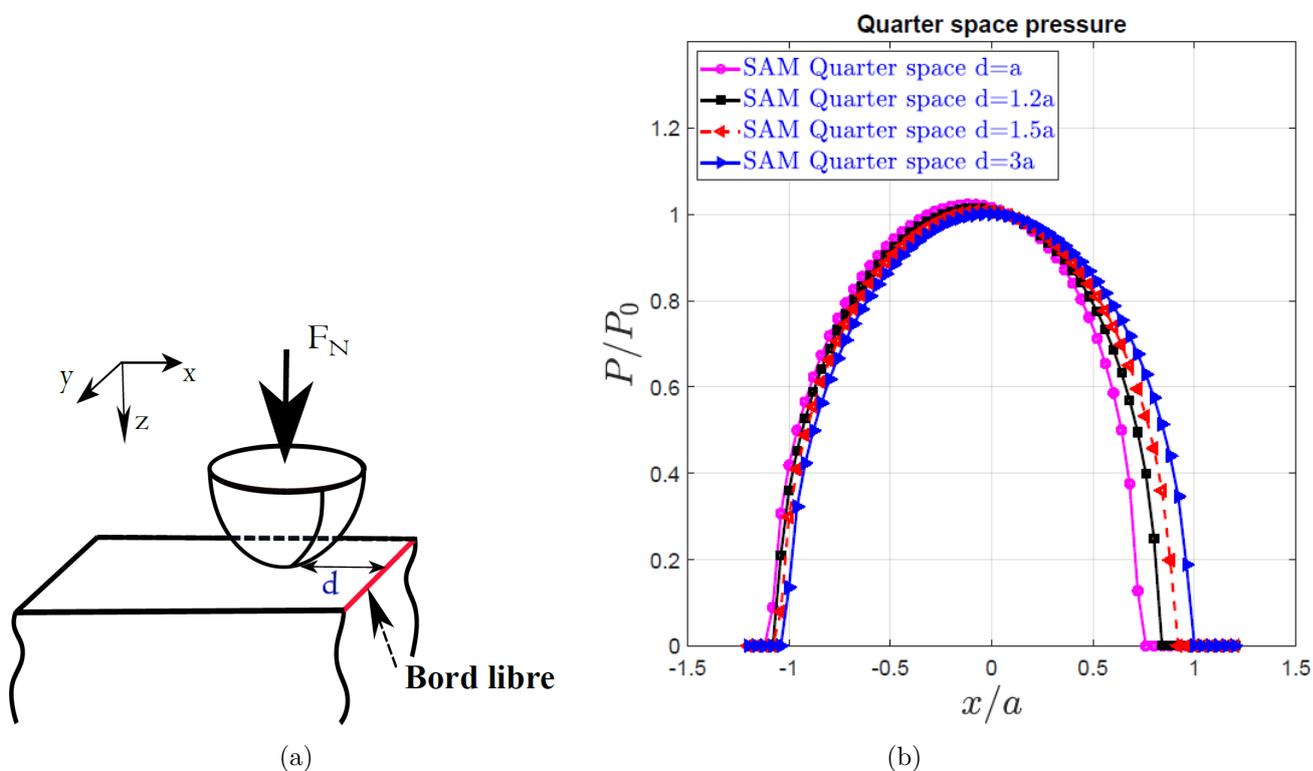


FIGURE 8 – a) Quart de massif avec le bord situé à une distance d du centre de contact b) Champ de pression solution en fonction de la distance d

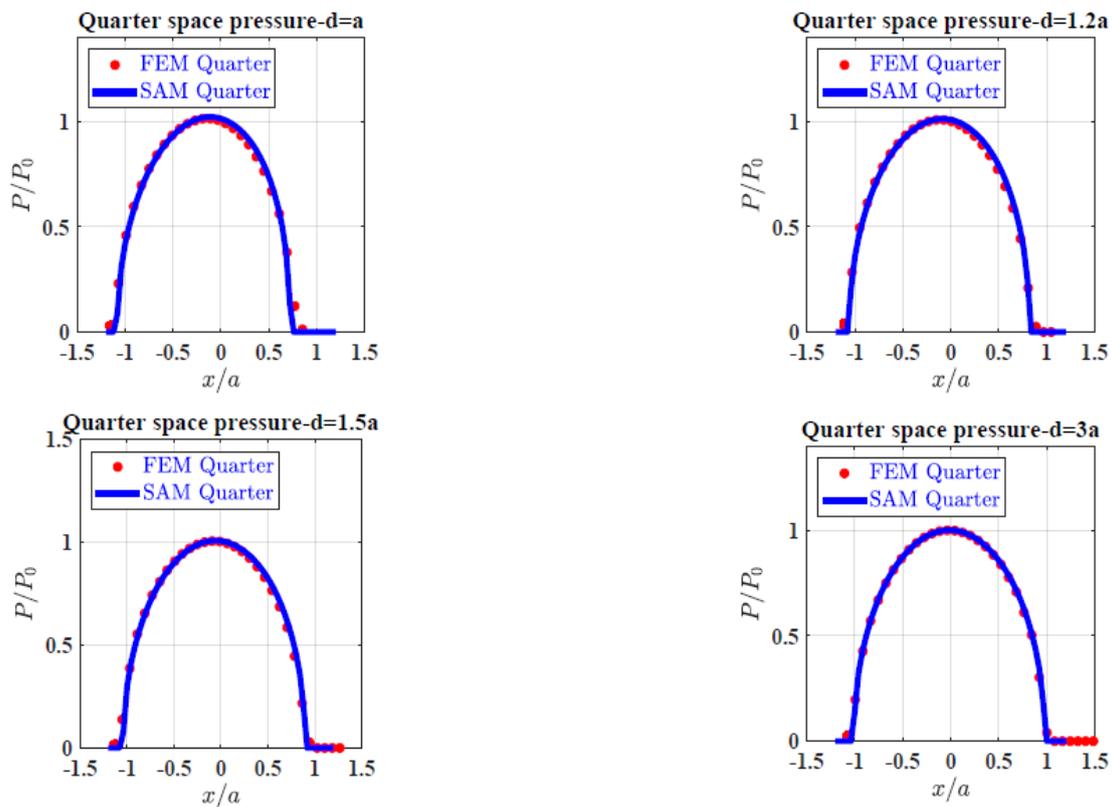
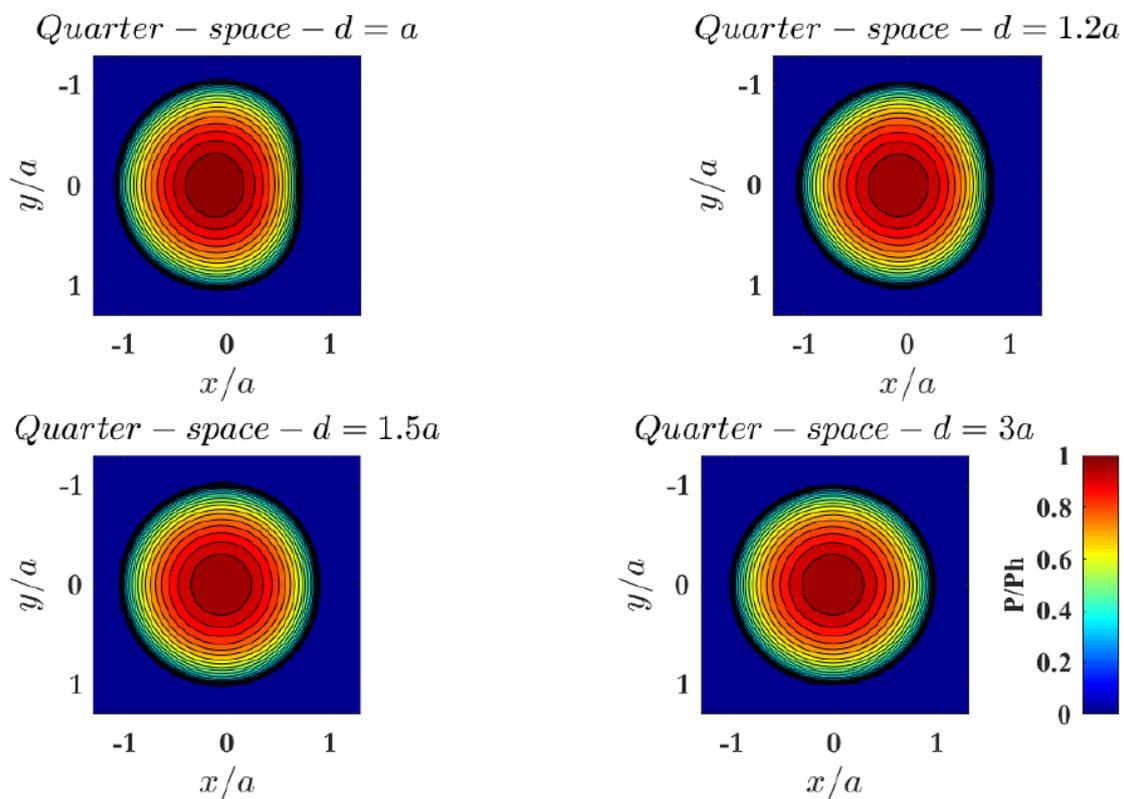


FIGURE 9 – Comparaison des solutions SAM avec les solutions éléments finis/abaqus

FIGURE 10 – Profils de pression du quart de massif en fonction de la distance d

4 Conclusion

Une nouvelle méthode numérique de résolution du problème de contact de quart de massif a été développée. Les résultats de cette méthode ont été validés par la méthode des éléments finis et la littérature.

Références

- [1] Hanson, M. T., and Keer, L. M., "A Simplified Analysis for an Elastic Quarter-Space," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 43(4), pp. 561–587, 1990.
- [2] Hetenyi, M., "A Method of Solution for the Elastic Quarter Plane," *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, Vol. 27, *TRANS. ASME*, Vol. 82, Series E, No. 2., pp. 289-290. June 1960.
- [3] Guenfoud, S., Bosakov, S. V., and Laefer, D. F., "A Ritz's Method Based Solution for the Contact Problem of a Deformable Rectangular Plate on an Elastic Quarter-Space," *Int. J. Solids Struct.*, 47(14–15), pp. 1822–1829, 2010.
- [4] Guilbault, R., "A Fast Correction for Elastic Quarter-Space Applied to 3D Modeling of Edge Contact Problems," *ASME J. Tribol.*, 133(3), p. 031402, 2011.
- [5] Keer, L. M., Lee, J. C., and Mura, T., "A Contact Problem for the Elastic Quarter Space," *Int. J. Solids Struct.*, 20(5), pp. 513–524, 1984.
- [6] Shepherd W. M., "Stress Systems in an Infinite Sector", *Proc. R. Soc. , A* 148 284-303, 1935.
- [7] Wang, Z. J., Jin, X. Q., Keer, L. M., and Wang, Q., "Numerical Methods for Contact Between Two Joined Quarter Spaces and a Rigid Sphere," *Int. J. Solids Struct.*, 49(18), pp. 2515–2527, 2012.
- [8] Zhang, Z. M., Wang, W., and Wong, P. L., "An Explicit Solution for the Elastic Quarter-Space Problem in Matrix Formulation," *Int. J. Solids Struct.*, 50(6), pp. 976–980, 2013.
- [9] Zhang, H., Wang, W., Zhang, S., Zhao, Z., "Modeling of Finite-Length Line Contact Problem With Consideration of Two Free-End Surfaces" *ASME J. Appl. Mech.*, 021402-10 / Vol. 138, APRIL 2016