

Couplage hybride IGA/FEM non-intrusif pour la simulation globale/locale non-linéaire de structures

P. Oumaziz¹, E. Lapina^{1,2}, R. Bouclier^{1,2}, J.C. Passieux¹

¹ Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS/INSA/ISAE/Mines Albi/UPS - 3 rue Caroline Aigle, 31 400 Toulouse, France

² Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), Université de Toulouse, UPS-UT1-UT2-INSA-CNRS, Toulouse, France

Résumé — Nous présentons à travers cette communication un couplage non-intrusif de type global/local dont le but est d'enrichir un modèle isogéométrique (IGA) simple par un modèle local non-linéaire éléments finis (EF). Afin de lier le modèle IGA au modèle éléments finis nous nous baserons sur le pont qui peut être fait entre les fonctions de forme splines et les fonctions de forme de Lagrange. Nous construisons un modèle EF local compatible avec un modèle global IGA que nous couplons à travers une approche type globale/locale.

Mots clés — Couplage non-intrusif, global/local, IGA, pont IGA/FEM

1 Introduction

Introduite en 2005 par Hughes et son équipe [1], l'analyse isogéométrique (*IsoGeometric Analysis en anglais, IGA*) se base sur la technologie spline issue du domaine de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Ces fonctions splines sont d'une plus grande régularité que les fonctions de forme Éléments Finis (EF) classiques. Plus précisément, contrairement aux EF qui sont C^0 aux bords des éléments, les fonctions splines peuvent atteindre une régularité C^{p-1} avec p le degré polynomial de la spline (généralement 2 ou 3). Du fait du lien avec la CAO, la technologie spline permet de représenter plus fidèlement la géométrie et évite naturellement la facettisation qui peut être rencontrée dans les maillages EF. De plus, du fait de sa meilleure régularité, elle permet une meilleure approximation par degré de liberté par rapport à l'EF pour capter des solutions globales [2].

Cependant la finalité de faire le calcul directement sur la CAO est encore loin d'être atteinte, notamment lorsque l'on veut intégrer des détails structuraux et des phénomènes non-linéaires locaux : la construction et l'évolution, au gré de la non-linéarité, du maillage spline adapté au calcul à partir d'un modèle CAO n'est pas triviale et reste une vraie problématique scientifique aujourd'hui. La présence d'une géométrie complexe (trous par exemple) impose parfois d'introduire de nombreuses lignes C^0 pour découper la géométrie en une multitude de patches, et alors on en revient à faire du maillage. De plus la prise en compte de singularités de comportement se heurte à la grande régularité des fonctions splines et ne peut donc pas être représentées correctement par un modèle IGA. Enfin, même si quelques travaux existent quand à l'implémentation de l'IGA dans des codes commerciaux ([3, 4, 5, 6]), cela reste finalement assez faible contrairement aux EF classiques dont il existe des codes industriels robustes avec des solveurs non-linéaires pouvant traiter une grande variété de problèmes.

Notre objectif est de traiter des cas localement non-linéaires à partir de modèles IGA. Nous nous plaçons dans un contexte non-intrusif pour lequel nous souhaitons limiter les implémentations numériques et nous baser sur un maximum d'outils existants. Pour cela nous utilisons une approche de type globale/locale [7] afin d'insérer dans un modèle global linéaire IGA un modèle local non-linéaire incluant des détails structuraux. On tire ainsi parti du meilleur des deux méthodes : l'IGA est adaptée pour représenter la géométrie et pour calculer efficacement des comportements globaux réguliers tandis que la FEM offre la possibilité de décrire des comportements singuliers, non-linéaires ou non réguliers. Aussi, contrairement aux travaux en IGA dans le domaine du couplage global/local [8, 9], la subtilité que nous introduisons ici est de proposer un modèle global IGA enrichi par un modèle local EF de façon véritablement non-intrusif, c'est-à-dire sans utiliser un code IGA ou un code particulier pour réaliser du couplage faible avancé. Nous pouvons donc faire appel à des solveurs industriels robustes (en l'occurrence *code-aster* [10]) pour gérer les non-linéarités locales. Nous conservons alors un modèle global

isogéométrique linéaire dont la taille des opérateurs sera fortement réduite par rapport à un modèle EF de précision équivalente. Pour arriver à nos fins nous nous basons sur le pont non-intrusif IGA/FEM proposé par [11]. L'espace engendré par les fonctions de forme spline étant un sous-espace vectoriel de celui engendré par les fonctions de forme EF, nous sommes capables de projeter l'EF pour obtenir l'IGA. Nous pouvons donc reconstruire dans la même idée que [11] les opérateurs de rigidité IGA à partir de rigidité EF. De plus, nous pouvons coupler avec des opérateurs de couplages explicites un modèle IGA global à un modèle EF local à travers l'approche globale/locale et grâce à un maillage de transition EF (même idée que dans [12]).

2 Pont IGA/FEM

Nous présentons dans cette section le lien qui peut être fait entre l'IGA et l'EF. Plus particulièrement nous nous focalisons sur le lien entre l'IGA basée sur les B-Splines et l'EF. L'extension aux NURBS peut être faite aisément et nous renvoyons à [11] pour plus de détail. Nous présentons dans un premier temps les fonctions de base B-Spline avant de montrer l'extraction qui peut être faite pour arriver aux fonctions de base EF.

2.1 B-Splines

Les fonctions B-Splines sont définies à partir d'un espace paramétrique représenté par un vecteur de noeud $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ dont les coordonnées ξ_i sont rangées dans l'ordre croissant. Le vecteur de noeud est caractérisé par le degré polynomial p des fonctions B-Splines et par le nombre n de fonctions de base engendrées. Ces fonctions sont construites récursivement à l'aide de la formule de Cox-de-Boor [13]. La continuité des fonctions B-Splines de degré p au noeud ξ_i est directement liée à la multiplicité m_i de ξ_i dans Ξ . En effet, la fonction associée est alors de classe C^{p-m_i} .

Nous pouvons désormais définir une courbe B-Splines à partir des fonctions B-Splines :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) P_i = \mathbf{P}^{BS^T} \mathbf{N}^{BS}(\xi) \quad (1)$$

avec $\mathbf{N}^{BS}(\xi)$ la matrice des fonctions de base B-Splines et \mathbf{P}^{BS} la matrice $n \times d$ des coordonnées des points de contrôles associées aux n fonctions de base $(N_i)_{i \in [1, n]}$.

Une des forces des B-Splines est d'avoir des techniques de raffinement simple et implémentées de façon efficace dans de nombreuses bibliothèques pour jouer à la fois sur l'élévation du degré des B-Splines et sur l'insertion de noeud sans modification de géométrie [14]. La figure 1 illustre ce principe. Un opérateur de raffinement matriciel \mathbf{D}_{Raf} permet de passer des fonctions de base "fines" \mathbf{N}_f^{BS} aux fonctions de base "grossières" \mathbf{N}_g^{BS} :

$$\mathbf{N}_g^{BS} = \mathbf{D}_{Raf} \mathbf{N}_f^{BS}. \quad (2)$$

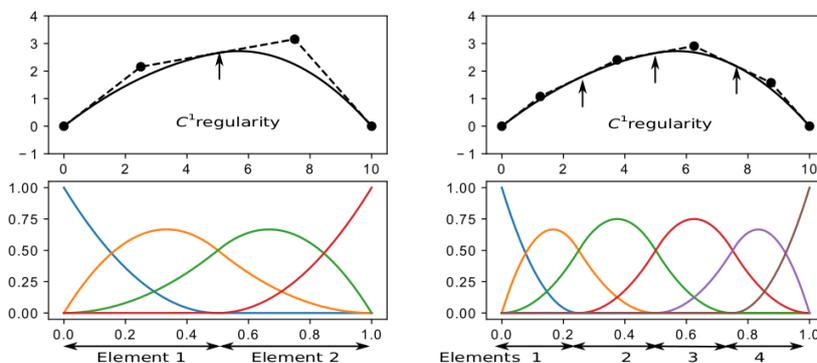


FIGURE 1 – Raffinement des B-Splines (extrait de [15]).

2.2 IGA : une base réduite de FEM

2.2.1 Extraction de Bézier

Les fonctions de base B-Splines sont en général C^{p-1} . Pour un même degré polynomial et un même nombre d'éléments, l'espace engendré par ces fonctions est donc inclus dans l'espace engendré par les fonctions de base EF qui sont elles C^0 aux bords des éléments. La première étape est d'exprimer les fonctions de base B-Splines par une combinaison de fonctions polynomiales C^0 aux bords des éléments. Cela est possible en utilisant l'opérateur de Bézier \mathbf{D}_{Bez} qui permet d'exprimer les fonctions B-Splines par des polynômes de Bernstein [16]. Nous avons alors une relation matricielle simple entre la matrice des fonctions de base B-Splines \mathbf{N}^{BS} et la matrice des fonctions de base de Bernstein \mathbf{N}^{Ber} :

$$\mathbf{N}^{BS} = \mathbf{D}_{Bez} \mathbf{N}^{Ber}. \quad (3)$$

Cette opération consiste simplement à ajouter des points de contrôles interpolants aux bords des éléments en augmentant la multiplicité des nœuds dans le vecteur de nœud Ξ (voir figure 2-b))

2.2.2 Extraction de Lagrange

L'espace engendré par les polynômes de Bernstein et celui par les polynômes de Lagrange dans le cas EF sont les mêmes : de degré p et C^0 aux bords des éléments. Cependant comme observé à la figure 2-b), les points de contrôles ne sont pas encore tous interpolants dans le cas des polynômes de Bernstein. Une légère transformation doit donc être appliquée sur ces polynômes pour les exprimer en fonction de ceux de Lagrange \mathbf{N}^{Lag} . Cette opération est réalisée à travers l'opérateur d'extraction de Lagrange \mathbf{D}_{Lag} :

$$\mathbf{N}^{Ber} = \mathbf{D}_{Lag} \mathbf{N}^{Lag} \quad (4)$$

Plus de détails peuvent être trouvés dans [17].

Nous pouvons donc faire un lien directement entre les fonctions de base B-Splines et les fonctions de base EF :

$$\mathbf{N}^{BS} = \underbrace{\mathbf{D}_{Bez} \mathbf{D}_{Lag}}_{\mathbf{D}_{FE}} \mathbf{N}^{Lag} \quad (5)$$

En notant \mathbf{D}_{FE} l'opérateur faisant le pont entre les fonctions de base B-Splines et les fonctions de base EF, nous pouvons également en déduire une relation entre les nœuds EF \mathbf{P}^{FE} et les points de contrôle B-Splines \mathbf{P}^{BS} de sorte que les EF et les splines génèrent la même géométrie. :

$$\mathbf{P}^{FE} = \mathbf{D}_{FE}^T \mathbf{P}^{BS}. \quad (6)$$

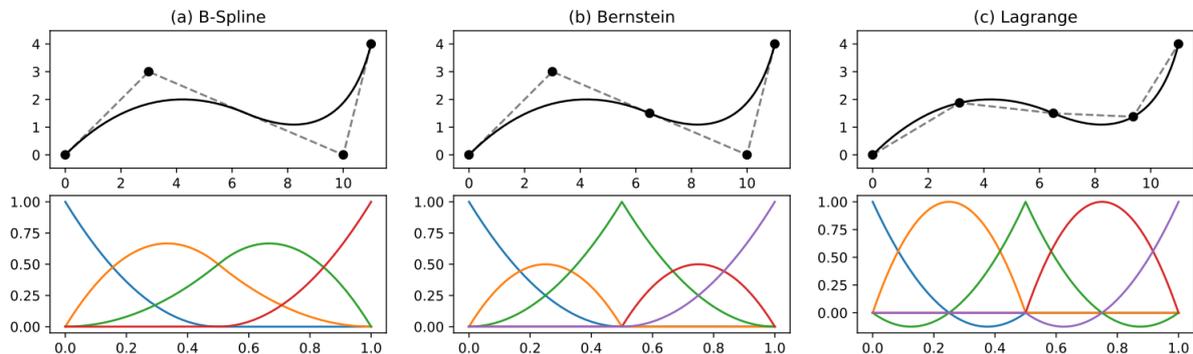


FIGURE 2 – Lien B-Splines - Bernstein - Lagrange (extrait de [15]).

3 Couplage non-intrusif global/local

Dans cette section nous présentons la méthode de couplage non-intrusive entre un modèle global linéaire isogéométrique et un modèle local non-linéaire éléments finis. Nous présentons dans un premier temps notre stratégie pour construire de façon compatible un modèle local EF à partir d'un modèle global IGA. Dans un second temps nous détaillerons l'approche globale/locale qui nous permet de coupler ces deux modèles.

3.1 Construction du modèle local EF

L'objectif est d'enrichir un modèle global IGA par un modèle local EF. Afin de pouvoir utiliser des routines issues de codes EF industriels existants, on va construire un modèle local EF compatible avec le modèle global IGA (c'est-à-dire que quelques frontières d'éléments MEF et IGA sont alignées) en utilisant la démarche suivante et illustrée en figure 3 :

- (a)-(b) Raffinement du maillage global IGA via l'opérateur \mathbf{D}_{Raf} : l'objectif est d'avoir *in fine* une description plus précise du maillage EF.
- (b)-(c) Création du maillage global EF équivalent via l'opérateur \mathbf{D}_{FE} .
- (c)-(d) Extraction du maillage EF d'interface via l'opérateur de trace \mathbf{C}_G .
- (d)-(e) Construction du maillage de la géométrie du modèle local conforme avec le maillage de l'interface.

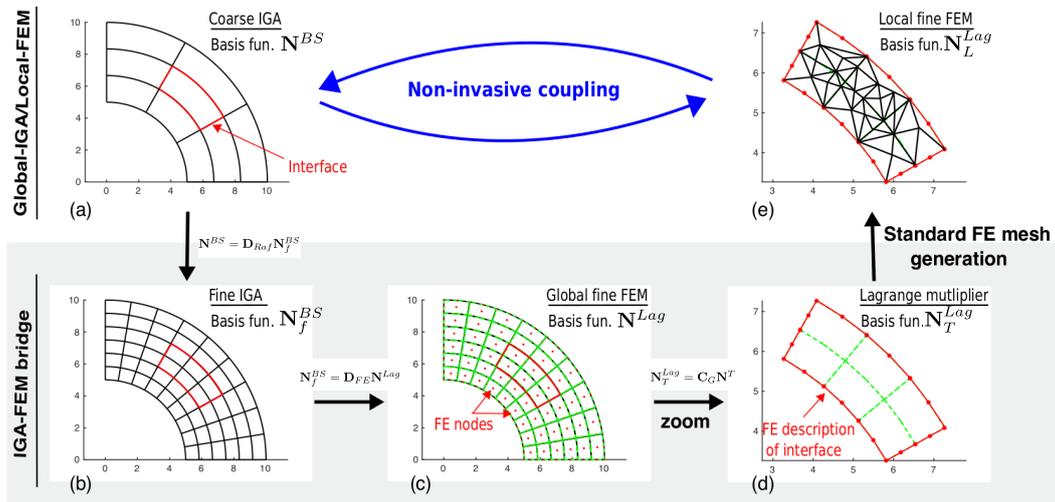


FIGURE 3 – Illustration de la stratégie proposée pour effectuer automatiquement le couplage global-IGA/local-FEM. L'utilisation du pont IGA-FEM [11] permet d'atteindre une interface géométriquement conforme et offre l'opportunité de simplifier la mise en œuvre en faisant appel à des opérateurs EF standards.

3.2 Approche globale/locale IGA/EF non-intrusive

La démarche précédente nous permet d'échanger sans difficulté entre le modèle global IGA et le modèle local EF. Pour cela nous utilisons une approche de type globale/locale non-intrusive. On note Ω_G le domaine global, Ω_L le domaine local et Ω_A le domaine constitué des éléments du modèle IGA recouverts par Ω_L . L'interface entre le local et le global est notée Γ .

L'idée de l'approche globale/locale est de résoudre itérativement et successivement :

- un problème de Neumann à l'interface sur le modèle IGA : en plus des conditions limites globales, nous imposons un inter-effort \mathbf{P}^{BS} qui représente le déséquilibre entre le modèle IGA et le modèle EF.
- un problème de Dirichlet sur le modèle EF : nous imposons le déplacement \mathbf{u}_G^{BS} obtenu lors du problème précédent sur le bord du modèle local.

Afin de déterminer l'inter-effort \mathbf{P}^{BS} il faut faire remonter les réactions λ_L^{FE} du problème local, mais également les réactions du modèle IGA sur le domaine Ω_A . Cela est fait simplement en résolvant un petit problème de Dirichlet sur le modèle EF dit *auxiliaire* pour remonter les réactions λ_A^{FE} .

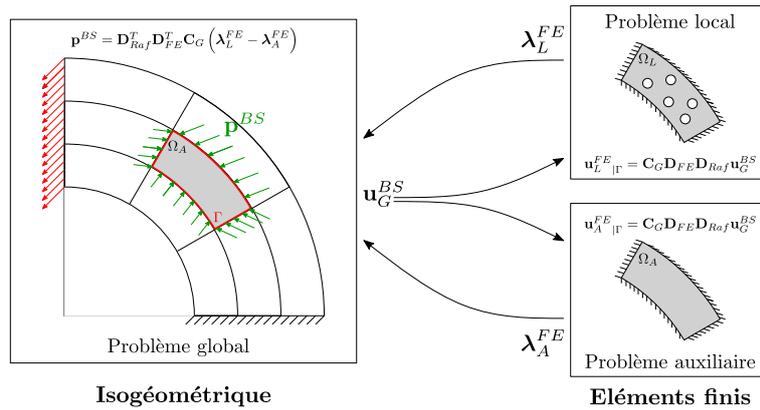


FIGURE 4 – Illustration du calcul via l'approche globale/locale non-intrusive

4 Résultats numériques

Afin d'illustrer la faisabilité de notre approche, nous considérons un cas sous l'hypothèse d'élasticité linéaire en petites perturbations. Nous utilisons *code-aster* comme solveur EF. Cela nous permet de construire de façon non-intrusive les rigidités IGA et de résoudre un problème non-linéaire de contact frottant sur le modèle local EF. Le cas test est illustré à la figure 5. Le modèle local présente des trous et certaines singularités géométriques. Nous rappelons que les opérateurs de rigidité sont obtenus par projection à partir des opérateurs de rigidité déterminés sur les maillages EF. Cela permet en particulier de passer de 3234 degrés de liberté sur le modèle global EF à seulement 936 degrés de liberté sur le modèle global IGA.

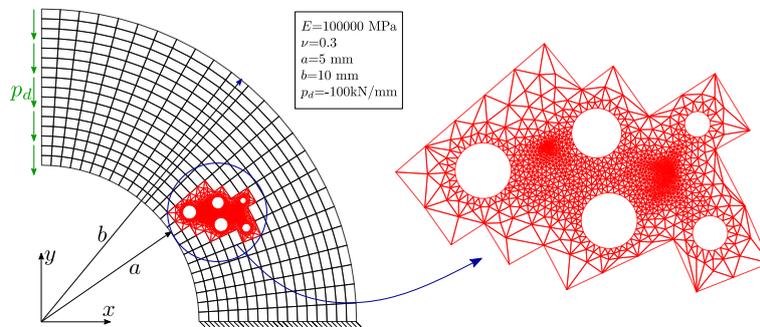


FIGURE 5 – Cas test préliminaire.

La figure 6 montre la convergence de l'algorithme : en une quinzaine d'itérations nous atteignons un résidu normalisé de 10^{-4} . Le chargement imposé provoque une mise en contact de certaines lèvres dans le modèle local. Nous illustrons ces zones de contact en rouge à la figure 7b. A la figure 7a nous présentons la carte des contraintes σ_{xx} afin de montrer l'équilibre à l'interface entre le modèle global et le modèle local. De par la nature de l'approche globale/locale, le champs de déplacement à l'interface est naturellement continu.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une approche intéressante pour prendre en compte des non-linéarités locales de façon non-intrusive dans un modèle isogéométrique. L'idée est de passer par un pont IGA/FEM et ainsi bénéficier des nombreux codes de calcul EF pour traiter les non-linéarités locales. Nous conservons également l'avantage de l'IGA au niveau global en terme de précision par rapport au nombre de degrés

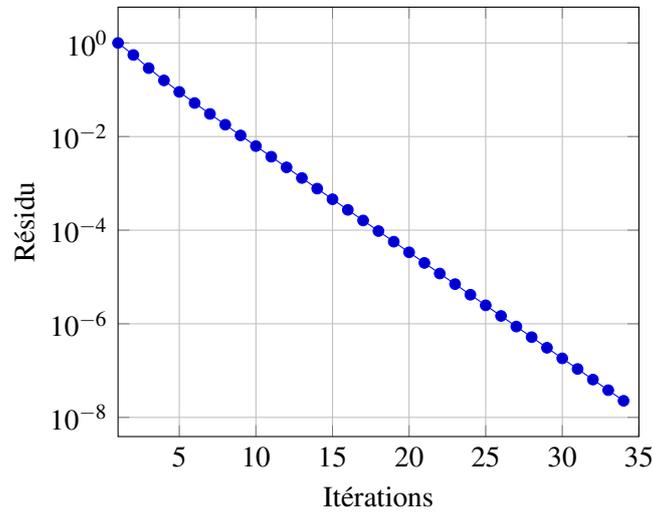


FIGURE 6 – Convergence de l’algorithme global/local.

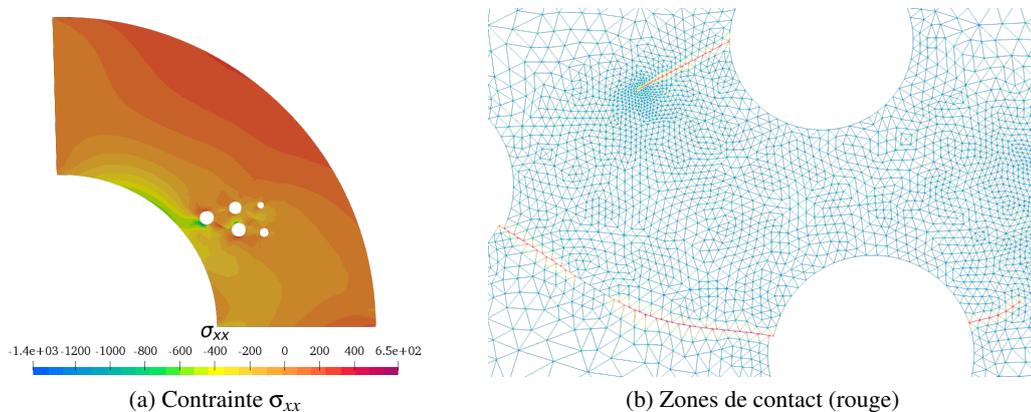


FIGURE 7 – Résultat à convergence

de liberté. Lors de la communication nous illustrerons notre approche avec des cas 3D dans lesquels nous introduirons de nombreuses zones de contact pour simuler le comportement de liaisons d’assemblage.

6 Références bibliographiques

Références

- [1] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4135–4195, 2005
- [2] J.A. Evans, Y. Bazilevs, I. Babuška and T.J.R. Hughes. *n-Widths, sup-infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometric finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1726–1741, 2009
- [3] S Hartmann, D Benson, A Nagy, *Isogeometric analysis with LS-DYNA*, Journal of Physics : Conference Series, 2016
- [4] A Duval, T Elguedj, H Al-Akhras, F Maurin, *abqNURBS : implémentation d’éléments isogéométriques dans Abaqus et outils de pré-et post-traitement dédiés*, 12e Colloque national en calcul des structures, 2015
- [5] Y. Lai, Y. Zhang, L. Liu, X. Wei, E. Fang, J. Lua, *Integrating CAD with Abaqus : a practical isogeometric analysis software platform for industrial applications*, Computers & Mathematics with Applications, 1648–1660, 2017
- [6] M. Occelli, T. Elguedj, S. Bouabdallah, L. Morançay, *LR B-Splines implementation in the Altair Radioss™ solver for explicit dynamics IsoGeometric Analysis*, Advances in Engineering Software, 166-185, 2019

- [7] P. Gosselet, M. Blanchard, O. Allix, G. Guguin, *Non-invasive global–local coupling as a Schwarz domain decomposition method : acceleration and generalization*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, ,2018
- [8] R. Bouclier, J.-C. Passieux, M. Salaun, *Local enrichment of NURBS patches using a non-intrusive coupling strategy : geometric details, local refinement, inclusion, fracture* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1-26, 2016
- [9] R. Bouclier, J.-C. Passieux, *A Nitsche-based non-intrusive coupling strategy for global / local isogeometric structural analysis* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 253–277, 2018
- [10] EDF Research & Developement, *code-aster*,www.code-aster.org
- [11] M. Tirvaudey, R. Bouclier, J.-C. Passieux, L. Chamoin, *Non-invasive implementation of nonlinear isogeometric analysis in an industrial FE software*, Engineering Computations, 237-261, 2020
- [12] S. Guinard, R. Bouclier, M. Toniolli, J.C. Passieux, *Multiscale analysis of complex aeronautical structures using robust non-intrusive coupling* Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, 5(1), 2018
- [13] E. Cohen, T. Lyche and R. Riesenfeld. *Discrete B-spline and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics*, Computer Graphics and Image Processing, 87-111, 1980.
- [14] J.-A. Cottrell, T.-J.-R. Hughes, A. Reali, *Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4160–4183, 2007
- [15] G. Colantonio, M. Chapelier, R. Bouclier, J.C. Passieux, E. Marenic, *Non-invasive multilevel geometric regularization of mesh-based 3D shape measurement*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1877-1897, 2020
- [16] M. Borden, M.A. Scott, J.A. Evans, and T.J.R Hughes. *Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15-47, 2011
- [17] D. Schillinger, P.K. Ruthala and L.H. Nguyen. *Lagrange extraction and projection for NURBS basis functions : A direct link between isogeometric and standard nodal finite element formulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 515-534, 2016