

Modes acoustiques non linéaires, réduction modale

E. Gourc¹, B. Cochelin¹, C. Vergez¹

¹ Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA, {gourc,cochelin,vergez}@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — Cette communication s'intéresse aux ondes stationnaires non linéaires dans les résonateurs acoustiques, plus particulièrement à la discrétisation modale des équations aux dérivées partielles. Nous proposons une méthode permettant de travailler directement à partir des équations au premier ordre issu des lois de conservation. Nous montrons que les modes ne forment pas une base orthogonale mais que l'on peut exploiter la bi-orthogonalité avec les modes du problème adjoint pour la projection modale. La procédure est illustrée par le calcul des modes normaux non linéaires de l'équation de Westervelt.

Mots clés — acoustique non linéaire, réduction modale, bi-orthogonalité.

1 Introduction

Ce travail s'intéresse au calcul des ondes stationnaires dans les résonateurs acoustiques, et notamment aux effets non linéaires qui peuvent se manifester à fort niveau. Il a été montré que pour un résonateur cylindrique, la pression acoustique est limitée par l'apparition de chocs. Lawrenson a montré expérimentalement que l'utilisation d'un résonateur de section variable permet de retarder la formation du choc et d'atteindre des niveaux de pression plus importants [1], ce qui a été confirmé numériquement par Ilinskii [2].

Les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique du fluide sont obtenus à partir des lois de conservation et d'état du gaz. Une revue chronologique des différents modèles est présentée dans [3]. Un point commun à tous ces modèles est qu'ils sont exprimés en fonction d'une seule variable, que ce soit la pression acoustique, la vitesse des particules de fluide ou plus souvent le potentiel de vitesse. Dans ce même article, il est montré que la formulation en potentiel de vitesse est particulièrement adaptée, puisqu'elle permet d'obtenir une formulation exacte (aux hypothèses de départ près), mais au prix de nombreuses manipulations algébriques.

Une fois le modèle aux dérivées partielles obtenues, les équations doivent être discrétisées pour être traitées numériquement. L'objectif de ce travail est de proposer une méthode de décomposition modale permettant de traiter directement le système au premier ordre issu de lois de conservations dans la perspective de calculer les modes non linéaires. La différence majeure dans ce cas, est que le système linéaire sous-jacent n'est pas auto-adjoint, ce qui a pour conséquence que les modes ne sont pas orthogonaux en eux. Nous montrons que l'on peut exprimer le problème adjoint et ainsi tirer parti de la bi-orthogonalité permettant de découpler les modes.

2 Système étudié

On considère un résonateur acoustique de section variable. En faisant l'hypothèse d'ondes planes, la loi de conservation de la masse s'exprime de la manière suivante

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S \rho v) = 0 \quad (1)$$

où $S(x)$ est la section du résonateur, $\rho(x,t)$ la masse volumique de l'air et $v(x,t)$ la vitesse du flux d'air dans la direction x . La conservation de la quantité de mouvement es donnée par la relation suivante

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

où $p(x,t)$ est la pression du fluide. Enfin, l'équation d'état pour un gaz parfait est donnée par

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3)$$

où $\gamma = 1.4$ est la constante adiabatique. Les variables décrivant l'état du fluide sont exprimées autour de leur valeur d'équilibre tel que $\tilde{p}(x,t) = p(x,t) - p_0$, $\tilde{\rho}(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$ et $\tilde{v}(x,t) = v(x,t) - v_0$. On considère un fluide initialement au repos tel que $v_0 = 0$. L'équation d'état (3) est inversée et développée en série de Taylor à l'ordre 2

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = \frac{\tilde{p}}{\gamma p_0} + \frac{1-\gamma}{2\gamma^2 p_0^2} \tilde{p}^2 + O(\tilde{p}^3) \quad (4)$$

Les variables sont adimensionnées de la manière suivante

$$\hat{p}(x,t) = \frac{\tilde{p}}{\gamma p_0}, \quad \hat{v}(x,t) = \frac{\tilde{v}}{c_0}, \quad \hat{S} = \frac{S(x)}{S(0)}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = t \frac{c_0}{L}, \quad \text{avec } c_0^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \quad (5)$$

L'introduction des variables adimensionnées et la substitution de (4) dans (1, 2) donne

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} + \hat{v}' + \frac{S'}{S} \hat{v} + \frac{1}{S} (S \hat{p} \hat{v})' + (1-\gamma) \hat{p} \dot{\hat{p}} &= 0 \\ \dot{\hat{v}} + \hat{p}' + \hat{v} \hat{v}' + \hat{p} \dot{\hat{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Les chapeaux ont été volontairement omis et les points et les primes représentent respectivement les dérivées par rapport au temps et à l'abscisse adimensionnée. Notons que hormis les hypothèses faites pour l'expression de la loi d'état et la troncature aux termes quadratiques, l'équation (6) n'a subi aucune simplification. A l'inverse, si l'on souhaite se ramener à une équation d'onde dans laquelle uniquement la pression intervient, il est possible de prendre en compte l'hypothèse de Westervelt [3] qui consiste à considérer que le Lagrangien est nul $\mathcal{L} \equiv (v^2 - p^2)/2 = 0$. Notons que la validité de cette hypothèse fait débat dans le cadre des ondes stationnaires, mais ce n'est pas le sujet de cette étude. Après la prise en compte des hypothèses de Westervelt, nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} + \frac{1}{S} (S \hat{v})' &= (1+\gamma) \hat{p} \dot{\hat{p}} \\ \dot{\hat{v}} + \hat{p}' &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En condensant les deux équations ci-dessus, nous obtenons l'équation de Westervelt pour un résonateur de section variable

$$\ddot{\hat{p}} - \hat{p}'' - \frac{S'}{S} \hat{p}' = (1+\gamma)(\dot{\hat{p}}^2 + \hat{p} \ddot{\hat{p}}) \quad (8)$$

Notons que le membre de gauche correspond à l'équation des pavillons de Webster, et le membre de droite contient la non-linéarité qui est inchangée par rapport à un résonateur cylindrique. Dans la suite de cette communication, afin d'alléger les calculs, mais sans invalider la méthode proposée, nous étudions le modèle de Westervelt écrit en (p, v) . De plus, nous considérons que le résonateur à une section conique $S(x) = (kx + 1)^2$ et obéit aux conditions aux limites suivantes

$$v(0,t) = 0, \quad p(1,t) = 0 \quad (9)$$

3 Modes propres linéaires

Dans cette section, nous calculons les modes du système linéarisé, c'est à dire sans le membre de gauche de l'équation (7). Le problème aux valeurs propres est obtenu en remplaçant $p(x,t) = p_n(x)e^{i\omega_n t}$ et $v(x,t) = v_n(x)e^{i\omega_n t}$ dans (7)

$$\begin{aligned} i\omega_n p_n + \frac{1}{S} (S v_n)' &= 0 \\ i\omega_n v_n + p_n' &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

En considérant les conditions aux limites (9), les solutions de (10) s'expriment de la manière suivante

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{\omega_n(kx+1)} (\omega_n \cos(\omega_n x) + k \sin(\omega_n x)) \\ v_n(x) &= \frac{i}{\omega_n^2(kx+1)^2} (k^2 \omega_n^2 x \cos(\omega_n x) - (k\omega_n^2 x + k^2 + \omega_n^2) \sin(\omega_n x)) \end{aligned} \quad (11)$$

Les modes ont été normalisés tel que $p_n(0) = 1$, et les pulsations propres sont solutions de l'équation transcendante suivante

$$\omega_n \cos(\omega_n) + k \sin(\omega_n) = 0 \quad (12)$$

4 Projection modale

Dans cette section, nous décrivons pas à pas les étapes nécessaires pour obtenir les équations modales. Pour commencer, nous montrons que le problème aux valeurs propres (10) n'est pas auto-adjoint. Afin d'alléger la notation, l'équation (10) est réécrite sous forme matricielle de la manière suivante

$$i\omega_n \psi_n + \mathbf{A} \psi_n = 0, \quad \psi = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S'}{S} + \frac{\partial}{\partial(x)} \\ \frac{\partial}{\partial(x)} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

On définit par $\phi_n = (q_n, w_n)^T$ les formes propres du problème adjoint et le produit scalaire $\langle \psi_n, \phi_m \rangle = \int_0^1 \phi_m^H \psi_n dx$ où \bullet^H est la transposée conjuguée. Le produit scalaire de (13) par les formes propres adjointes s'écrit

$$\langle i\omega_n \psi_n + \mathbf{A} \psi_n, \phi_n \rangle = \int_0^1 i\omega_n (q_n^* p_n + w_n^* v_n) + q_n^* \left(\frac{S'}{S} v_n + v_n' \right) + w_n^* p_n' dx = 0 \quad (14)$$

On intègre par parties pour transférer les dérivée de ψ_n à ϕ_m

$$[q_n^* v_n + w_n^* p_n]_0^1 + \int_0^1 i\omega_n (q_n^* p_n + w_n^* v_n) - p_n w_n'^* + v_n \left(\frac{S'}{S} q_n^* - q_n'^* \right) dx = 0 \quad (15)$$

On en déduit les conditions aux limites du problème adjoint $w_m(0) = 0$ et $q_m(1) = 1$. Le problème adjoint est obtenu en éliminant ψ_n de (15), et en prenant le complexe conjugué

$$\begin{aligned} -i\omega_n q_n - w_n' &= 0 \\ -i\omega_n w_n + \frac{S'}{S} q_n - q_n' &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Où bien sous forme compacte

$$-i\omega_n \phi_n + \mathbf{A}^+ \phi_n = 0, \quad \mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{S'}{S} - \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

où \mathbf{A}^+ est l'opérateur adjoint satisfaisant la relation $\langle \mathbf{A} \psi_n, \phi_m \rangle = \langle \psi_n, \mathbf{A}^+ \phi_m \rangle$. On observe que $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^+$, confirmant que le problème n'est pas auto-adjoint. De plus, on peut clairement voir que ceci est dû à la section variable car si $S' = 0$ les équations (13) et (15) sont identique au signe près. Le fait que le problème soit non auto-adjoint a pour conséquence principale que les modes propres ψ_n ne forment pas une base orthogonale. Notons également, que bien que le problème linéarisé en (p, v) (7) soit non auto-adjoint, il est possible de montrer que le problème linéarisé en (p) (8) est lui, auto-adjoint. Après calcul, les modes propres du problème adjoint peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$\phi_n(x) = C(kx+1)^2 \psi_n \quad (18)$$

Les déformées modales des trois premiers modes du problème régulier et du problème adjoint sont illustrées en figure 1.

A l'aide du problème adjoint, nous pouvons montrer que les modes propres du problème "régulier" et ceux du problème adjoint forment une base bi-orthogonale. On exprime les produits scalaires suivants

$$\begin{aligned} \langle i\omega_n \psi_n + \mathbf{A} \psi_n, \phi_m \rangle &= i\omega_n \langle \psi_n, \phi_m \rangle + \langle \mathbf{A} \psi_n, \phi_m \rangle = 0 \\ \langle \psi_n, -i\omega_m \phi_m + \mathbf{A}^+ \phi_m \rangle &= i\omega_m \langle \psi_n, \phi_m \rangle + \langle \psi_n, \mathbf{A}^+ \phi_m \rangle = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

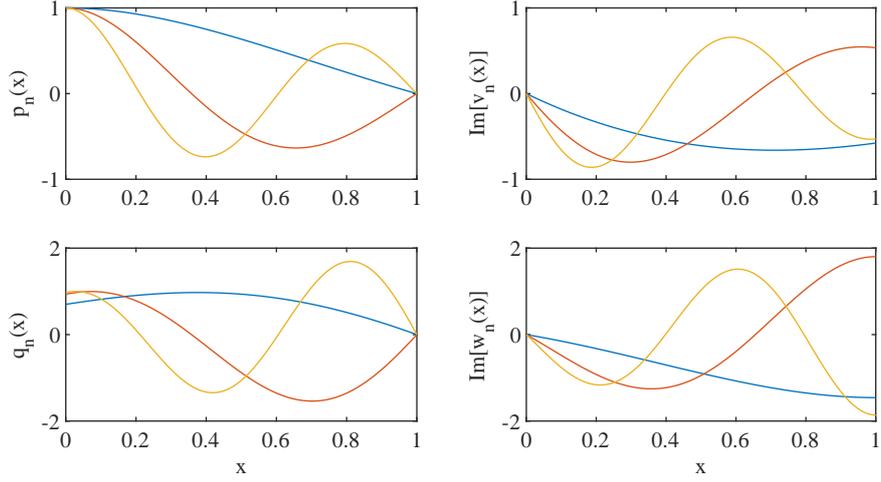


FIGURE 1 – Trois premières déformées modales ainsi que les fonctions adjointes pour $k = 0.9$

En soustrayant les deux équations de (19) tout en prenant en compte la définition de l'opérateur adjoint, on obtient

$$(\omega_n - \omega_m) \langle \psi_n, \phi_m \rangle = 0 \quad (20)$$

de telle sorte, qu'après normalisation des modes propres adjoints, on obtient la condition de bi-orthogonalité suivante

$$\langle \psi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (21)$$

où δ_{nm} est de delta de Kronecker.

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour procéder à la projection modale des équations (7). Les variables sont exprimées de la manière suivante

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_n r_n + \psi_n^* r_n^* \quad (22)$$

où r_n sont les coordonnées modales. La substitution de (22) dans (7) donne

$$\sum_{n=1}^N (\psi_n \dot{r}_n + \psi_n^* \dot{r}_n^* + \mathbf{A} \psi_n r_n + \mathbf{A} \psi_n^* r_n^*) = (1 + \gamma) \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^N p_i p_j r_i (r_i \dot{r}_j + r_i^* \dot{r}_j) \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. \quad (23)$$

où $c.c.$ désigne le complexe conjugué des termes précédents. Contrairement au cas auto-adjoint, ici, la projection modale est effectuée en prenant le produit scalaire avec les modes propres adjoints

$$\sum_{n=1}^N (\langle \psi_n, \phi_m \rangle \dot{r}_n + \langle \psi_n^*, \phi_m \rangle \dot{r}_n^* + \langle \mathbf{A} \psi_n, \phi_m \rangle r_n + \langle \mathbf{A} \psi_n^*, \phi_m \rangle r_n^*) (1 + \gamma) \langle \mathbf{b}, \phi_m \rangle \quad (24)$$

En suivant une procédure similaire à celle utilisée dans (19) pour l'explicitation des conditions de bi-orthogonalités, on peut montrer que $\langle \psi_n^*, \phi_m \rangle = \langle \mathbf{A} \psi_n^*, \phi_m \rangle = 0, \forall (m, n)$. L'équation (24) devient donc

$$\dot{r}_n - i \omega_n r_n = (1 + \gamma) \langle \mathbf{b}, \phi_n \rangle \quad (25)$$

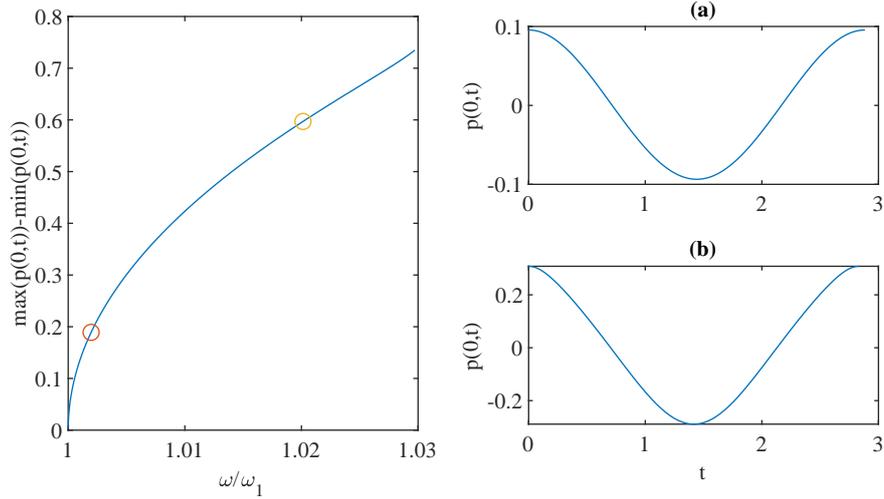


FIGURE 2 – Mode non linéaire pour $k = 1.5$. Orbite périodique de la pression pour (a) : $\omega/\omega_1 = 1.002$, (b) : $\omega/\omega_1 = 1.005$.

5 Calcul des modes normaux non linéaires

Le modèle modal ainsi obtenu est utilisé pour calculer les modes normaux non linéaires correspondant à l'équation de Westervelt. Ceux-ci peuvent être définis comme l'ensemble des solutions périodiques du sous système conservatif [4]. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul de ces solutions périodiques comme le *shooting* [5], l'équilibrage harmonique [6] ou bien la collocation orthogonale [7]. Dans ce papier, nous avons utilisé une méthode de *shooting* qui consiste simplement à transformer la recherche des solutions périodiques en un problème aux conditions initiales. Pour les systèmes autonomes, le système à résoudre est composé d'une condition de périodicité et d'une condition de phase

$$\begin{aligned} r_n(T) - r_n(0) &= 0 \\ \text{Im}(r_1) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Le premier mode non linéaire pour $k = 1.5$ est présenté en figure 2 où l'amplitude de la pression en $x = 0$ en fonction de la fréquence adimensionnée du premier mode est affichée. Le mode non linéaire permet donc de voir que le système est raidissant. De plus les formes d'ondes de la pression pour $\omega/\omega_1 = 1.002$ et $\omega/\omega_1 = 1.02$ montrent que la dynamique est dominée par le premier harmonique.

La situation est différente si l'on regarde ce même mode non linéaire pour $k = 0.9$, présenté en figure 3. Dans ce cas, la courbe d'amplitude de pression fait apparaître un brusque changement de pente pour $\omega/\omega_1 = 1.003$. La comparaison des formes d'ondes de la pression avant et après ce changement de pente montre que cela est dû à une interaction modale avec le troisième mode dont la fréquence est proche de $4\omega_1$ pour cette conicité.

6 Conclusion

Nous nous sommes intéressé à la décomposition modale d'un résonateur acoustique non linéaires. L'écriture des équations au premier ordre, en (p, v) , permet de réduire les manipulations algébriques nécessaires pour se ramener à une équation du second ordre à une variable. La difficulté dans ce cas est que les modes ne forment pas une base orthogonale. On peut néanmoins découpler ces modes à l'aide de la propriété de bi-orthogonalité apportée par les modes du problème adjoint. Cette procédure permet donc de travailler directement sur les lois de conservation. Nous avons illustré cette méthode avec le calcul des modes normaux non linéaires de l'équation de Westervelt écrite en (p, v) . Ceci permet de

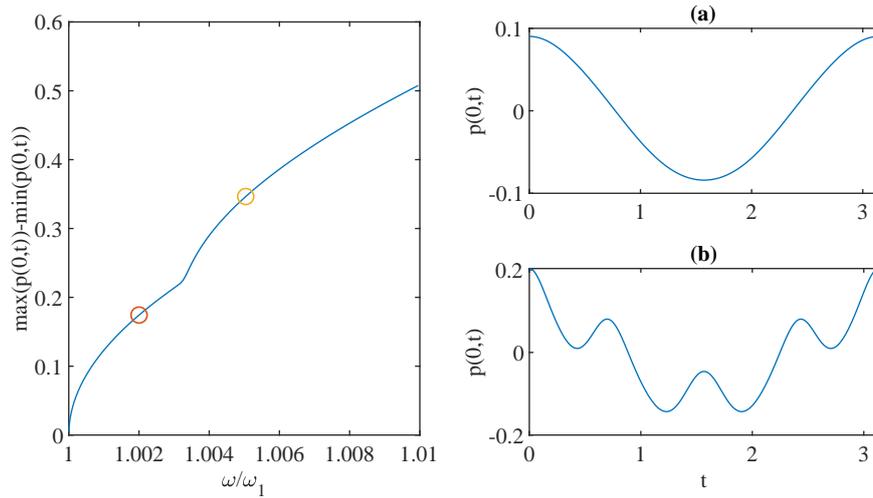


FIGURE 3 – Mode non linéaire pour $k = 0.9$. Orbite périodique de la pression pour (a) : $\omega/\omega_1 = 1.002$, (b) : $\omega/\omega_1 = 1.005$.

mettre en évidence des phénomènes non linéaires tel que le caractère raidissant du système ou bien des interactions modales.

Références

- [1] C.C. Lawrenson, B. Lipkens, T.S. Lucas, D.K. Perkins, and T.W. Van Doren. Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2) :623–636, 1998.
- [2] Y.A. Ilinskii, B. Lipkens, T.S. Lucas, T.W. Van Doren, and E.A. Zabolotskaya. Nonlinear standing waves in an acoustical resonator. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5) :2664–2674, 1998.
- [3] P.M. Jordan. A survey of weakly-nonlinear acoustic models : 1910–2009. *Mechanics Research Communications*, 73 :127–139, 2016.
- [4] L. Renson, G. Kerschen, and B. Cochelin. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 364 :177–206, 2016.
- [5] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.C. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1) :195–216, 2009.
- [6] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of sound and vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.
- [7] S. Karkar, B. Cochelin, and C. Vergez. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2554–2567, 2014.