

Machines à vecteurs supports pour la fiabilité : Exploitation des estimateurs d'erreur de discrétisation pour la construction de classificateurs

L. Mell¹, V. Rey¹, F. Schoefs¹

¹ GeM, Université de Nantes, {ludovic.mell,valentine.rey,franck.schoefs}@univ-nantes.fr

Résumé — En fiabilité, les machines à vecteurs supports (SVM) sont utilisées pour séparer domaine de sûreté et domaine de défaillance et ainsi classer une population de Monte Carlo en deux sous-populations. Cela permet par la suite d'évaluer à moindre coût la probabilité de défaillance d'un système par échantillonnage. La construction du classificateur SVM repose sur des observations : ici des appels à un code de calcul éléments finis. Le maillage introduit une erreur de discrétisation qui pollue l'estimation de la probabilité de défaillance. Nous proposons 2 approches exploitant les estimateurs d'erreur de discrétisation a posteriori pour améliorer la reconstruction d'un état-limite par SVM.

Mots clés — fiabilité, probabilité de défaillance, machine à vecteurs supports, erreur de discrétisation

1 Introduction

La prise en compte des aléas inhérents à tout système mécanique (incertitudes sur les propriétés matériaux, charges intrinsèquement aléatoires, géométrie non parfaitement connue, ...) est généralement faite par les facteurs de sécurité ou des approches semi-fiabilistes (Eurocodes). Cela donne parfois lieu à des conceptions très conservatives. Afin d'effectuer une prise en compte optimale des aléas, les approches fiabilistes modélisent les incertitudes et propagent celles-ci à travers le modèle mécanique. La simulation numérique est à présent extrêmement utilisée dans l'industrie en phase de conception. Les logiciels éléments finis sont robustes et permettent d'envisager la construction d'un jumeau numérique de la structure. Il faut toutefois garder à l'esprit que ce jumeau n'est pas parfait mais est entaché d'erreurs : l'erreur de modélisation (due à la formulation d'hypothèses), l'erreur de discrétisation (spatiale via le maillage éléments finis ou temporelle). Dans un cadre fiabiliste, on peut y ajouter l'erreur de modélisation des incertitudes et l'erreur d'approximation si des méthodes d'échantillonnage sont utilisées.

Une des grandeurs d'intérêt de l'analyse fiabiliste est la probabilité de défaillance qui est la mesure probabiliste du domaine de défaillance. Ce domaine est séparé du domaine de sûreté par une fonction d'état-limite associée à un scénario de défaillance : le signe de cette fonction état-limite est négatif dans le domaine de défaillance et positif dans le domaine de sûreté. Cette probabilité est généralement estimée par des méthodes d'échantillonnage de type Monte Carlo qui sont moins intrusives que les éléments finis stochastiques [7]. En revanche, leur convergence est lente et nécessite donc de nombreuses réalisations et donc de nombreux appels à un code élément fini ce qui peut être coûteux en temps de calcul. Dès lors, il peut être intéressant d'approximer le modèle mécanique par un méta-modèle peu cher à évoluer. Dans le cadre fiabiliste, cela peut se faire par les méthodes FORM ou SORM [1], par krigeage [2] ou via les machines à vecteurs supports (SVM) [9].

L'erreur de discrétisation introduite par la méthode éléments finis peut avoir de grandes conséquences sur le calcul de la probabilité de défaillance [4]. La prise en compte de cette erreur a été réalisée en fiabilité pour les méthodes SORM [3] ou les méta-modèles de type krigeage [8, 13]. En revanche, à la connaissance des auteurs, cela n'a pas été réalisé pour les SVM. Nous proposons dans cet article deux méthodes pour adapter la taille de discrétisation lors de la construction d'un méta-modèle par SVM. Cela permet d'obtenir des bornes sur la probabilité de défaillance et d'effectuer automatiquement les appels sur maillages fins uniquement proche de l'état-limite. Ces deux méthodes sont décrites et mises en oeuvre sur un problème d'ouverture de fissure à deux variables aléatoires.

2 Problème mécano-fiabiliste

Dans cette section, on commence par définir le problème mécanique sous sa forme continue ainsi que la fonction de performance et la probabilité de défaillance. La discrétisation du problème mécanique est ensuite présentée. Les estimateurs d'erreur a posteriori permettant d'encadrer la valeur exacte de la fonction de performance sont introduits. Enfin, nous indiquons comment les SVM permettent d'estimer une probabilité de défaillance.

2.1 Problème continu

On considère une structure occupant un ouvert Ω , soumise à une force volumique $\underline{f}_{vol}$, à une densité d'effort surfacique $\underline{F}$ sur $\partial_F \Omega$ et à un déplacement imposé $\underline{u}_d$ sur $\partial_u \Omega$. On fait l'hypothèse des petites perturbations et du comportement élastique linéaire isotrope caractérisé par le tenseur de Hooke $\mathbb{H}$. On note $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, $\underline{u}$ le champ de déplacement et $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$ la partie symétrique du gradient des déplacements. On introduit l'espace des champs cinématiquement admissibles $CA = \left\{ \underline{u} \in (H^1(\Omega))^d, \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$ et notons CA^0 l'espace vectoriel associé; l'espace des champs statiquement admissibles $SA = \left\{ \underline{\tau} \in (L^2(\Omega))_{sym}^{d \times d}; \forall \underline{v} \in CA^0, \int_{\Omega} \underline{\tau} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_{vol} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \underline{F} \cdot \underline{v} dS \right\}$ et l'erreur en relation de comportement [5] $e_{CR\Omega}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \|\underline{\sigma} - \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}$ où l'on note

$$\|\underline{\kappa}\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\underline{\kappa} : \mathbb{H}^{-1} : \underline{\kappa}) d\Omega}.$$

Modélisons les incertitudes présentes dans ce problème mécanique par des variables aléatoires. Les variables aléatoires sont regroupées dans un vecteur $X : \zeta \in Z \rightarrow X(\zeta) = x \in \mathbb{R}^q$ où Z est l'Univers et $x \in \mathbb{R}^q$ une réalisation de la variable aléatoire. Notons p la distribution jointe de X . Les aléas peuvent se situer au niveau du chargement extérieur ($\underline{f}_{vol}$, $\underline{F}$, $\underline{u}_d$, $\partial_u \Omega$, $\partial_F \Omega$), du tenseur de Hooke ($\mathbb{H}$) ou bien de la géométrie (Ω). Pour plus de clarté, nous omettons la dépendance en X (et donc à l'aléa ζ) dans la formulation suivante. L'égalité est écrite presque sûrement :

$$\begin{cases} \text{Trouver un champ de déplacement } \underline{u} \text{ et un champ de contraintes } \underline{\sigma} \text{ tels que} \\ \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial_u \Omega \text{ et } \underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{grad}(\underline{u}) + \underline{grad}^T(\underline{u})) \text{ sur } \Omega \\ \underline{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_{vol} = \underline{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{F} \text{ sur } \partial_F \Omega \\ \underline{\sigma} = \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

La solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ de ce problème existe et est unique. Soulignons que ce couple de champs solution n'est pas déterministe et dépend donc de ζ .

Définissons la fonction de performance qui sépare le domaine de sûreté du domaine de défaillance. La fonction de défaillance G_{ex} , également appelée fonction d'état limite, est $G_{ex} = R - S_{ex} = R - S(\underline{u}_{ex})$ où R désigne la résistance et où S est la sollicitation. On fait l'hypothèse que la sollicitation est une fonctionnelle linéaire du champ de déplacement. La structure est défaillante si $G_{ex} \leq 0$ et sûre si $G_{ex} > 0$. La probabilité de défaillance est alors $P_{f,ex} = \int_{G_{ex}(x) \leq 0} p(x) dx$.

La solution exacte est malheureusement souvent inconnue si bien que le problème mécanique est résolu par une méthode de discrétisation, typiquement la méthode des éléments finis qui introduit une erreur de discrétisation. Nous présentons le problème discrétisé dans la sous-section suivante.

2.2 Problème discrétisé

La méthode des éléments finis consiste à chercher la solution dans un sous-espace de dimension finie de l'espace des champs cinématiquement admissibles $CA_H = \left\{ \underline{u} \in (H^1(\Omega))^d, \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega_H \right\}$. Le problème discrétisé s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{u}_H \in CA_H \text{ tel que } \underline{\sigma}_H = \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_H) \text{ et} \\ &\int_{\Omega_H} \underline{\sigma}_H : \underline{\varepsilon}(\underline{v}_H) d\Omega = \int_{\Omega_H} \underline{f}_{vol} \cdot \underline{v}_H d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_H} \underline{F} \cdot \underline{v}_H dS \end{aligned} \quad (2)$$

En exploitant l'erreur en relation de comportement, l'exploitation d'extracteurs ainsi que des techniques de reconstruction de champs statiquement admissibles [10], il est possible d'obtenir un encadrement garanti de $S(\underline{u}_{ex})$ [6] et donc de G_{ex} de cette forme $G_- \leq G_{ex} \leq G_+$.

Définissons l'espace suivant $\widetilde{SA}(\omega) = \left\{ \underline{\tau} \in (L^2(\omega))^{\frac{d \times d}{\text{sym}}} ; \forall \underline{v} \in CA^0(\omega), \int_{\omega} \underline{\tau} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) d\omega = \tilde{L}(\underline{v}) \right\}$ et le problème adjoint

$$\text{Trouver } (\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\underline{\sigma}}_{ex}) \in CA^0(\Omega) \times \widetilde{SA}(\Omega) \text{ tel que } e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\underline{\sigma}}_{ex}) = 0 \quad (3)$$

Ce problème est résolu par la méthode des éléments finis, sur un maillage qui peut être différent de celui du problème de référence. Notons $\tilde{\underline{u}}_{\tilde{H}}$ la solution obtenue par résolution éléments finis du problème adjoint. Notons $\hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}$ le champ de contraintes statiquement admissible reconstruit à partir de $\tilde{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}$. Notons $\hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}$ le champ de contraintes statiquement admissible reconstruit à partir de $\tilde{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}$. Alors

$$G_- := G_m - \frac{1}{2} e_{CR\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}) e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_{\tilde{H}}, \hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}) \quad (4)$$

et

$$G_+ := G_m + \frac{1}{2} e_{CR\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}) e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_{\tilde{H}}, \hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}}) \quad (5)$$

avec

$$G_m = G_H - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}} + \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\tilde{\underline{u}}_{\tilde{H}})) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}} - \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_H)) d\Omega \quad (6)$$

A cause de la discrétisation, $S(\underline{u}_H) \neq S(\underline{u}_{ex})$ et donc $G_H = R - S(\underline{u}_H) \neq G_{ex}$. L'erreur de discrétisation a donc une influence directe sur l'estimation de la probabilité de défaillance.

3 Machines à vecteurs supports (SVM) pour la fiabilité

Dans cette section, on rappelle succinctement les bases des SVM linéaires et non linéaires. Le lecteur intéressé pourra se référer à [12]. Les SVM permettent de construire un classificateur $D : \mathbb{R}^q \rightarrow \{-1; 1\}$ à partir de n observations $(\mathbf{x}_i, y_i)_{i=1..n}$.

3.1 Séparateur linéaire

Si les données sont linéairement séparables, le classificateur D peut être construit à partir de la fonction f définie par $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{x} + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ où $\mathbf{v}^T \mathbf{x}$ est le produit scalaire entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{x}$. Alors $D(\mathbf{x}) = \text{signe}(f(\mathbf{x}))$. L'hyperplan Δ est défini comme $\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } f(\mathbf{x}) = 0\}$ et la marge m entre les observations et l'hyperplan Δ est $m = \min_{i=1..n} \left(\frac{|\mathbf{v}^T \mathbf{x}_i + a|}{\|\mathbf{v}\|} \right)$. Les paramètres $\mathbf{v}$ et a sont cherchées pour maximiser la marge m . Pour obtenir une unique solution, le problème d'optimisation est réécrit à l'aide de nouvelles variables $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{m\|\mathbf{v}\|}$ et $b = \frac{a}{m\|\mathbf{v}\|}$ et devient :

$$\text{Trouver } \mathbf{w} \text{ et } b \text{ tel que } \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \text{ est minimum et } y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1 \quad \forall i = 1..n \quad (7)$$

Ce problème est appelé problème primal. Il est possible d'obtenir une formulation duale du problème en introduisant le Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) - 1)$ où α_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \alpha_i \text{ pour } i \in [1; n] \text{ tel que } & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{ est minimum et} \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \text{ et } \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1..n \end{aligned} \quad (8)$$

Les deux formulations du problème (primale et duale) peuvent être résolues par des solveur standards de type programmation quadratique.

3.2 Séparateur non-linéaire

En général, les données ne sont pas linéairement séparables. Ainsi, un noyau est utilisé pour remplacer le produit scalaire $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$ par une mesure de l'influence de $\mathbf{x}_i$ sur $\mathbf{x}_j$ notée $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Puisque ce noyau représente une corrélation, il doit être positif. Dans cet article, nous utilisons un noyau gaussien $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$ où σ est un hyperparamètre. La détermination de la valeur de l'hyperparamètre se fait généralement par validation croisée. La formulation duale non-linéaire est :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \alpha_i \text{ pour } i \in [1; n] \text{ tel que } & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \kappa(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{ est minimum et} \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \text{ et } 0 \leq \alpha_i \leq C \forall i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (9)$$

où C est un paramètre de pénalité. Choisir une valeur de C finie autorise la mauvaise classification des données. Dans ce papier, nous choisissons une valeur très grande si bien que les α_i ne sont pas bornées.

3.3 Estimation de la probabilité de défaillance via SVM

Les SVM peuvent être utilisées pour construire le classificateur D qui est alors un méta-modèle peu coûteux du signe de la fonction de performance G . A partir de résolutions éléments finis pour certaines réalisations de variables aléatoires (plan d'expérience), le séparateur est construit en résolvant le problème 9. Une population de Monte Carlo U est alors générée puis classée grâce au séparateur et la probabilité de défaillance est alors estimée. Citons [9] qui propose un algorithme adaptatif permettant d'enrichir le méta-modèle (et donc améliorer la construction du séparateur) en identifiant les nouveaux points à ajouter au méta-modèle via une fonction d'apprentissage. ξ est le ratio de nombre de points de U situés dans la marge du classificateur divisé par le nombre de points de U . Si $\xi > \eta_1$, le nombre de points dans la marge est trop important et il faut enrichir le méta-modèle en évaluant G en un nouveau point x_{new} . Le point x_{new} est choisi à la fois proche du séparateur (frontière qui classe la population U) et loin des autres observations (afin d'être informatif). Ainsi, on définit :

$$x_{new} = \underset{x \in U}{\operatorname{argmin}} \frac{s(x) \max(d)}{d(x) \max(s)} \quad (10)$$

où $s(x)$ est la distance de x au séparateur et $d(x)$ est la distance entre x et le plus proche point d'observation.

4 Classificateurs SVM exploitant les estimateurs d'erreur

Dans cette section, nous proposons d'améliorer l'estimation de la probabilité de défaillance par SVM en prenant en compte l'erreur de discrétisation. Pour cela, nous proposons deux nouveaux algorithmes basés sur [9] exploitant les estimateurs d'erreur a posteriori et autorisant les calculs sur plusieurs niveaux de maillage.

4.1 Première approche : classificateur par état garanti

Dans cet algorithme, nous proposons d'utiliser pour la construction du méta-modèle uniquement des points pour lesquels les bornes d'erreur nous permettent de garantir le signe de G_{ex} . Deux maillages sont définis : un grossier de taille h_{max} et un plus fin de taille h_{min} . Les appels au code éléments finis sont faits par défaut sur maillage grossier. Si le signe du produit $G_+ G_-$ est négatif, le calcul éléments finis est relancé sur maillage fin. On introduit la sous-routine dans l'algorithme 1 décrivant l'exploitation du séparateur et l'estimation de la probabilité de défaillance ainsi que l'évaluation des critères d'arrêt. Notre approche dite par état garanti est alors décrite dans l'algorithme 2.

Il est possible après l'arrêt de l'algorithme de construire deux nouveaux séparateurs à partir des observations $(G_+(x_i))_i$ et $(G_-(x_i))_i$ générées pendant le déroulement de l'algorithme ce qui permet de borner la probabilité de défaillance entre P_+ et P_- .

Algorithme 1 : Evaluation SVM

Classer la population de Monte Carlo en deux populations $U_f = \{x_i \in U | D(x_i) = -1\}$ et $U_s = \{x_i \in U | D(x_i) = +1\}$;
Estimer la probabilité de défaillance $P = \frac{\text{card}(U_f)}{n_{MC}}$;
Calculer le coefficient de variation $\text{COV} = \sqrt{\frac{1-P}{P \times n_{MC}}}$;
Evaluer la fonction d'apprentissage ξ ;

Algorithme 2 : Approche par état garanti

Générer la population de Monte Carlo U de taille n_{MC} ;
 Générer le plan d'expérience de taille n_{DOE} ;
 pour $i = 1..n_{DOE}$ **faire**
 Evaluer $G_+(x_i)$ et $G_-(x_i)$ pour la taille de maille h_{max} ;
 si $G_+(x_i)G_-(x_i) < 0$ **alors**
 Evaluer $G_+(x_i)$ et $G_-(x_i)$ pour la taille de maille h_{min} ;
 fin
 Compléter le vecteur d'observations avec $y_i = \text{signe}(G_m(x_i))$;
 fin
 Construire un séparateur D à partir des observations en résolvant le problème 9 ;
 Appeler l'algorithme **Evaluation SVM** ;
 tant que $\xi > \eta_1$ ou $\text{COV} > \eta_2$ **faire**
 si $\xi > \eta_1$ **alors**
 Sélectionner le point d'apprentissage x_{new} selon 10 ;
 Evaluer $G_-(x_{new})$ et $G_+(x_{new})$ sur le maillage h_{max} ;
 si $G_+(x_{new})G_-(x_{new}) < 0$ **alors**
 Evaluer $G_+(x_{new})$ et $G_-(x_{new})$ pour la taille de maille h_{min} ;
 fin
 Ajouter $\text{signe}(G_m(x_{new}))$ au vecteur d'observations ;
 Construire un séparateur D à partir des observations en résolvant le problème 9 ;
 sinon
 Aggrandir la population de Monte Carlo ;
 fin
 Appeler l'algorithme **Evaluation SVM** ;
 fin

4.2 Seconde approche : double classificateur

Dans cet algorithme, nous proposons de construire simultanément deux séparateurs permettant d'effectuer deux classifications : séparer les points certainement sûrs $U_{cs} = \{x_i \in U | G_-(x_i) > 0\}$ du reste et séparer les points certainement défaillants $U_{cf} = \{x_i \in U | G_+(x_i) < 0\}$ du reste. Ainsi, il est possible de calculer les deux probabilités de défaillance P_+ et P_- à partir de ces deux classifications. On introduit la sous-routine suivante 3 indiquant comment sont évalués les 2 classificateurs et les deux probabilités de défaillance. Cela nous permet alors de définir l'approche par double classificateur dans l'algorithme 4.

Algorithme 3 : Evaluation double séparateur SVM

Définir les populations $U_{cs} = \{x \in U | D_-(x_i) = +1\}$ et $U_{cf} = \{x \in U | D_+(x_i) = -1\}$;
 Estimer les probabilités de défaillance $P_+ = \frac{\text{card}(U_{cf})}{n_{MC}}$; $P_- = \frac{\text{card}(U_{cs})}{n_{MC}}$ et $P = \frac{P_+ + P_-}{2}$;
 Calculer le coefficient de variation $\text{COV} = \sqrt{\frac{1-P}{P n_{MC}}}$;
 Evaluer les fonction d'apprentissage ξ_+ et ξ_- ;

Il est à noter que 2 bornes sont calculées à chaque fois que l'un des méta-modèle doit être enrichi. Elles sont exploitées pour la mise à jour des deux méta-modèles quand bien même l'un des deux ne nécessitait pas d'apprentissage. Il est possible de piloter la construction du méta-modèle par un objectif de précision sur la probabilité de défaillance. En effet, si le ratio $\frac{2(P_+ - P_-)}{P_+ + P_-}$ est plus grand qu'une précision souhaitée, alors un nouveau maillage h_{next} est défini. On pourrait par exemple choisir $h_{next} = \frac{h}{2}$. L'algorithme est à nouveau utilisé. Il est possible alors de ne chercher à classer que la population incertaine $U_{uc} = U - U_{cs} \cup U_{cf}$.

Algorithme 4 : Approche par double classificateur

```
Genérer la population de Monte Carlo  $U$  de taille  $n_{MC}$  ;
Générer le plan d'expérience de taille  $n_{DOE}$ ;
pour  $i = 1..n_{DOE}$  faire
    Evaluer  $G_+(x_i)$  et  $G_-(x_i)$  pour la taille de maille  $h$ ;
    Compléter les vecteurs d'observations avec  $y_+ = \text{signe}(G_+)$  et  $y_- = \text{signe}(G_-)$  ;
fin
Construire les séparateurs  $D_+$  et  $D_-$  à partir de  $y_+$  et  $y_-$  en résolvant le problème 9 ;
Appeler l'algorithme Evaluation double séparateur SVM;
tant que  $\xi_+ > \eta_1$  ou  $\xi_- > \eta_1$  ou  $\text{COV} > \eta_2$  faire
    si  $\xi_+ > \eta_1$  ou  $\xi_- > \eta_1$  alors
        si  $\xi_+ > \eta_1$  alors
            Sélectionner le point d'apprentissage  $x_{new}$  selon 10;
            Evaluer  $G_-(x_{new})$  et  $G_+(x_{new})$  ;
            Compléter les vecteurs d'observations avec  $y_+ = \text{signe}(G_+(x_{new}))$  et  $y_- = \text{signe}(G_-(x_{new}))$  ;
            Construire les séparateurs  $D_+$  et  $D_-$  à partir de  $y_+$  et  $y_-$  en résolvant le problème 9 ;
        fin
        si  $\xi_- > \eta_1$  alors
            Sélectionner le point d'apprentissage  $x_{new}$  selon 10;
            Evaluer  $G_-(x_{new})$  et  $G_+(x_{new})$  ;
            Compléter les vecteurs d'observations avec  $y_+ = \text{signe}(G_+(x_{new}))$  et  $y_- = \text{signe}(G_-(x_{new}))$  ;
            Construire les séparateurs  $D_+$  et  $D_-$  à partir de  $y_+$  et  $y_-$  en résolvant le problème 9 ;
        fin
    sinon
        Aggrandir la population de Monte Carlo;
    fin
Appeler l'algorithme Evaluation double séparateur SVM;
fin
```

5 Illustration numérique

5.1 Plaque fissurée

Considérons une plaque rectangulaire de largeur w , de longueur L , avec une fissure horizontale de taille a . La plaque est supposée avoir un comportement linéaire élastique homogène isotrope caractérisé par un coefficient de Poisson de $\nu = 0.3$ et un module de Young de $E = 210$ GPa. Cette plaque est sollicitée en traction. Le scénario de défaillance est l'ouverture de la fissure traduite par le critère de Griffith : $G = K_{lim} - K_I$ avec $K_{lim} = 22$ la résistance. Le facteur d'intensité de contrainte K_I est la fonctionnelle linéaire du champ de déplacement calculé grâce à des intégrales sur une couronne [11], comme illustré en figure . Ici, les rayons intérieur et extérieur de la couronne valent $R_i = 1$ et $R_e = 1.5$. La taille de la fissure $a \in [2; 5]$ suit une loi bêta de paramètres de forme 2 et 2. L'angle d'application de la force $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ suit une loi bêta de paramètres de forme 3 et 2. Les critères d'arrêt pour l'enrichissement du méta-modèle et l'agrandissement de la population ont été fixés à $\eta_1 = 10^{-4}$ et $\eta_2 = 0.02$. Le plan d'expérience est un plan factoriel puisque les variables sont bornées et $n_{DOE} = 12$.

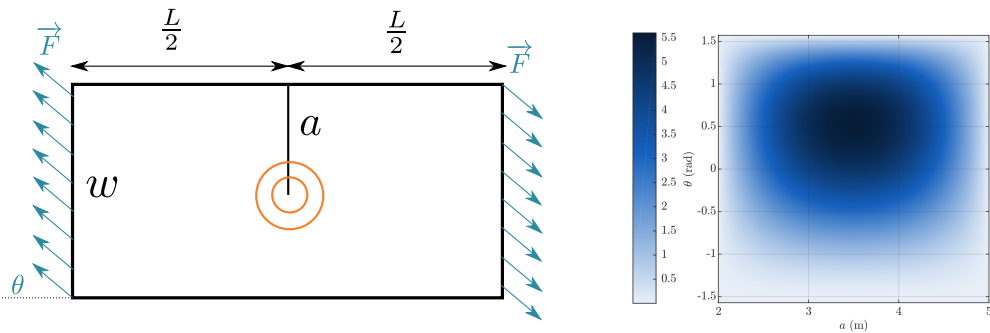


FIGURE 1 – Plaque fissurée : géométrie (gauche) et densité de probabilité (droite)

5.2 Résultats

Une approche mono-fidélité basée sur [9] a été déployée sur un maillage *overkill* très fin de taille $h = 0.02$. La probabilité de défaillance obtenue pour la première population est $P_{ref} = 5.89 \cdot 10^{-3}$. Le temps total de calcul 16 191 secondes, venant principalement des résolutions éléments finis.

L'approche 1 est mise en oeuvre pour les deux niveaux de fidélité correspondant à $h_{max} = 0.5$ et $h_{min} = 0.1$ sur 5 populations de Monte Carlo afin de tester la robustesse de la méthode. Les résultats sont donnés dans la figure 2.

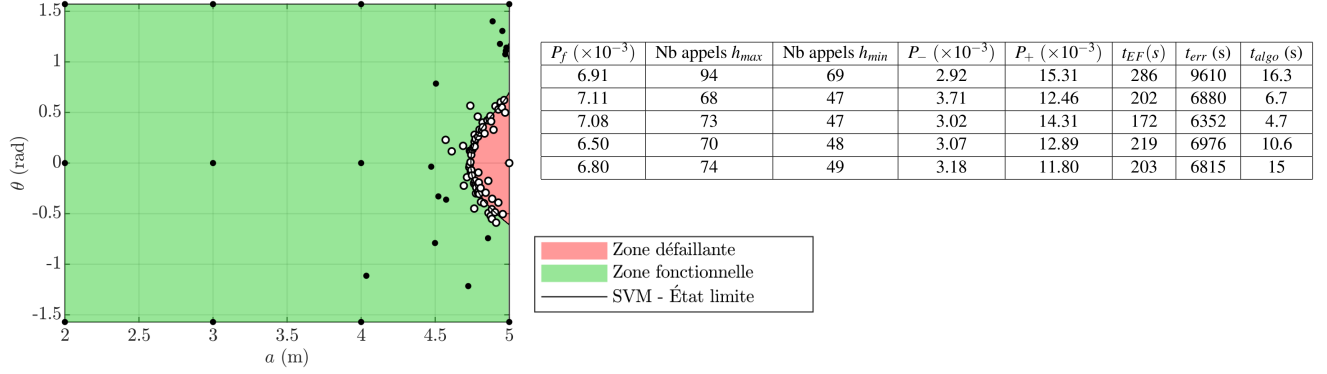


FIGURE 2 – Stratégie 1 par état garanti

On observe que les appels sur maillage fin sont effectués proche de l'état-limite, ce que nous souhaitons. La probabilité obtenue est un peu plus élevée que la probabilité de référence P_{ref} . Cela peut être dû au fait que G_m et non G_H est utilisé pour construire le méta-modèle dans notre approche. L'utilisation des estimateurs d'erreur entraîne un surcoût de calcul (dû à la construction des champs statiquement admissibles) mais permet l'obtention de bornes sur la probabilité de défaillance. Notons que cette approche reste moins coûteuse que l'approche standard sur maillage de taille $h = 0.02$.

L'approche 2 est mise en oeuvre pour les deux niveaux de fidélité correspondant à $h_1 = 0.28$ puis $h_2 = 0.14$ sur les 5 mêmes populations de Monte Carlo. Les résultats sont présentés en figure 3.

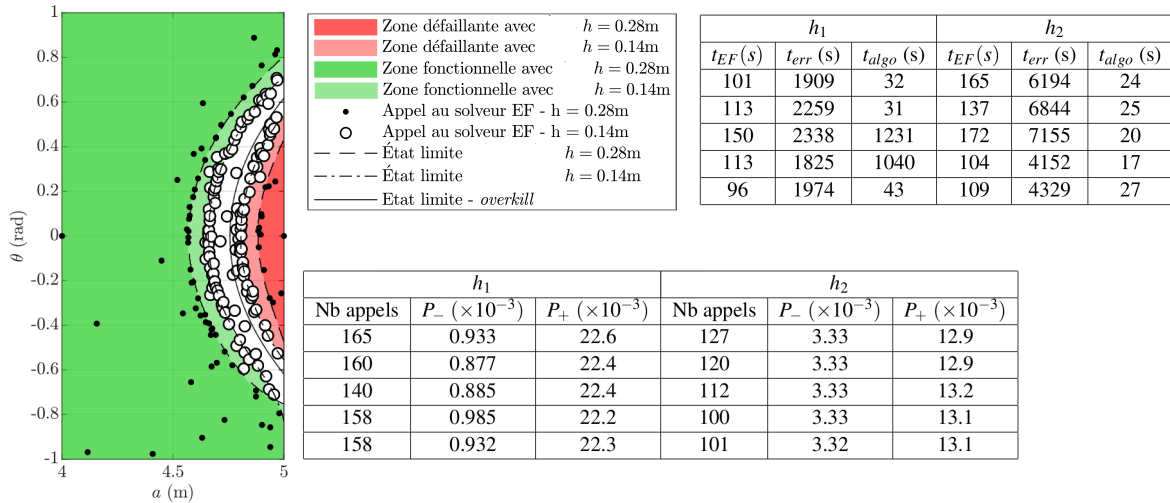


FIGURE 3 – Stratégie 2 : double classificateur

A l'issue du calcul sur maillage grossier, les bornes ne sont pas satisfaisantes. Néanmoins, après calcul sur un second maillage, elles sont plus précises. On constate aussi graphiquement que l'état-limite *overkill* obtenu pour $h = 0.02$ est bien à l'intérieur des bornes. Cette seconde approche a un coût comparable à la première.

Remerciements

This work was carried out within the framework of the WEAMEC, West Atlantic Marine Energy Community, and with funding from the Pays de la Loire Region.

Références

- [1] K. Breitug *Asymptotic approximations for multinormal integrals*, Journal of engineering Mechanics, 110(3), 357–366, 1984.
- [2] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, *AK-MCS : an active learning reliability method combining kriging and Monte Carlo simulation*, Structural Safety, 33(2), 145–154, 2011.
- [3] L. Gallimard, *Error bounds for the reliability index in finite element reliability analysis*, International journal for numerical methods in engineering, 87(8) :781–794, 2011
- [4] A. Ghavidel, S.R. Mousavi, M. Rashki, *The effect of FEM mesh density on the failure probability analysis of structure*. KSCE Journal of civil engineering 22(7), 2370–2383, 2018
- [5] P. Ladevèze, J.P. Pelle. *Mastering calculations on linear and non-linear mechanics*, Springer, 2006.
- [6] P. Ladevèze *Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics*, Computational Mechanics, 42(2), 271–286, 2008.
- [7] H.G. Matthiers, A. Keese, *Galerkin methods for linear and non linear elliptic stochastic partial differential equation*, 194 (12-16), 1295–1331, 2005
- [8] L. Mell, V. Rey, and F. Schoefs, *Multifidelity adaptive kriging metamodel based on discretization error bounds*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 121(20) :4566–4583, 2020
- [9] Q. Pan, D. Dias, *An efficient reliability method combining adaptive Support Vector Machine and Monte Carlo Simulation*. Structural Safety 67, 85–95, 2017
- [10] F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze, *On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : performances on engineering examples*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 88 (5), 409–441, 2011
- [11] M. Stern, E. B. Becker, and R. S. Dunham, *A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors*, International Journal of Fracture, 12(3) :359–368, 1976.
- [12] V. Vapnik *The nature of statistical learning theory*, Springer Science and business media, 2013.
- [13] J. Yi, F. Wu, Q. Zhou, Y. Cheng, H. Ling, and J. Liu. *An active-learning method based on multi-fidelity kriging model for structural reliability analysis*, Structural and Multidisciplinary Optimization, pages 1–23, 2020