

# Contrôle actif d'un système non-linéaire par modes glissants et équilibre harmonique

L. Mesny, S. Baguet, S. Chesné

*Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France*

**Résumé** — Le contrôle par modes glissants est une loi de contrôle discontinue connue pour sa robustesse face aux perturbations extérieures. De plus en plus utilisée dans le contrôle actif des vibrations, son utilisation reste limitée à l'intégration temporelle du fait de son aspect non-linéaire. Ce papier propose une approche pour calculer de manière efficace les fonctions de réponse en fréquence d'une structure non-linéaire contrôlée par modes glissants. Cette approche se base sur la méthode de la balance harmonique (HBM) couplée à une méthode de continuation et à une analyse de bifurcations pour permettre l'étude approfondie d'une telle structure.

**Mots clés** — Absorbeur de vibrations, Contrôle actif, Dynamique non-linéaire, Commande par modes glissants, Méthode de la balance harmonique.

## 1 Introduction

Un des grands enjeux en contrôle des structures est la diminution des vibrations. Les intérêts sont multiples : réduction de bruit, allègement de structure, récupération d'énergie... Les absorbeurs passifs ou Tuned Mass Damper (TMD) sont couramment utilisés pour réduire les vibrations [10]. Cependant, leur performance reste limitée malgré les nombreux travaux d'optimisation [2, 6]. Le contrôle actif permet de pallier ce problème en intégrant des capteurs, un ou plusieurs actionneurs et une loi de contrôle pour améliorer les performances en contrôle de vibrations [1]. Le choix de la loi de contrôle est donc primordial pour obtenir d'une part de bonnes performances tout en restant robuste et stable face aux perturbations extérieures et, d'autre part, un coût énergétique réduit.

Le contrôle par modes glissants (ou SMC pour sliding mode control en anglais) d'abord développé pour les structures variables [12] est de plus en plus utilisé dans le contrôle actif des vibrations pour des raisons de performance, de robustesse et de stabilité face aux incertitudes. Le SMC est une loi de contrôle qui consiste en un retour d'état discontinu (non-linéaire) et un continu. Son objectif est de forcer le système à atteindre un régime prédéterminé, et ce, quelles que soient les conditions initiales. Pour ce faire, on définit une hyper surface (surface de glissement) dans l'espace des phases qui correspond à une combinaison linéaire ou non-linéaire des variables d'états. On fait alors converger la dynamique du système vers le régime prédéterminé par l'intermédiaire de cette surface de glissement. La dynamique finale ne dépend plus que des paramètres qui composent l'hyper surface.

Du fait de l'aspect non-linéaire de cette loi de contrôle, l'approche temporelle est couramment utilisée. Cependant, cette dernière ne donne pas facilement accès à la réponse du système sur une grande plage de fréquence. Or cette fonction de réponse en fréquence est une représentation souvent utilisée pour quantifier les performances.

La méthode de la balance harmonique est un outil très utilisé pour le calcul des solutions périodiques. Cette méthode, couplée à une méthode de continuation permet de calculer la réponse en fréquence d'un système dynamique linéaire ou non-linéaire. Afin d'obtenir des informations sur les différents points de bifurcations et les changements de régime dynamique qu'ils engendrent, une analyse de stabilité est réalisée par la méthode de Hill [13]. Le lecteur pourra s'appuyer sur les travaux de Grenat et al. [5] et Xie et al. [14] pour plus d'informations sur l'analyse paramétrique de systèmes dynamiques non-linéaires et le suivi numérique des bifurcations.

Dans cet article, nous proposons une approche pour calculer la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) d'un système non-linéaire contrôlé par la méthode des modes glissants ainsi qu'une analyse des

bifurcations (voir figure 1). Dans un premier temps, la mise en équation d'un système avec loi de contrôle ainsi que la méthodologie de résolution sont détaillés dans la section 2. Puis des résultats numériques et une discussion sont présentés en section 3. Enfin, la section 4 liste quelques conclusions et perspectives.

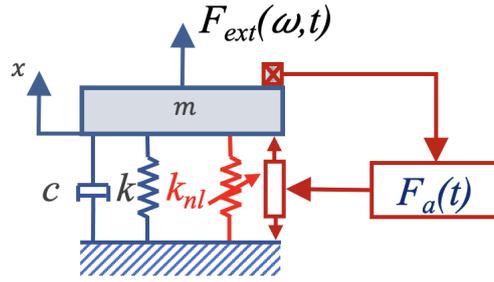


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une structure contrôlée par SMC.

## 2 Méthodologie

### 2.1 Équation de la dynamique dans le domaine temporel

La figure 1 illustre l'oscillateur non-linéaire contrôlé activement sur lequel se base cette étude. Le résidu d'équilibre  $r(x, \omega, t)$  s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(x, \omega, t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + k_{nl}x(t)^3 - F_{ext}(\omega, t) - F_a(x, \dot{x}, y) = 0 \\ \mathbf{g}(x, y) = \dot{y} - x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec  $m$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $k_{nl}$ ,  $F_{ext}$ ,  $F_a(t)$ ,  $x(t)$ , respectivement la masse, la raideur, l'amortissement, la raideur non-linéaire la force harmonique extérieure du système, la force active, le déplacement de la masse  $m$ . La variable  $y(t)$  correspond à l'intégrale du déplacement. Elle est traitée par la deuxième ligne de (1) qui permet l'unicité de la solution. Selon la théorie de la commande par modes glissants [8], on définit une surface de glissement  $\sigma(t)$  :

$$\sigma(t) = \dot{x} + \alpha_1 x + \alpha_2 \underbrace{\int x(\tau) d\tau}_{y(t)} \quad (2)$$

Avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 > 0$  des paramètres réglables qui définissent la pente de la surface de glissement dite intégrale du fait de sa dépendance à l'intégrale du déplacement. Ce type de surface de glissement permet d'augmenter la performance de suivi du contrôleur [9].

La partie non-linéaire des SMC permet de gérer les perturbations extérieures alors que la partie linéaire maintient la dynamique sur la surface de glissement.

La force active se décompose en parties continue et discontinue telle que :

$$F_a(t) = \underbrace{kx + knlx^3 + \left(c - \frac{\alpha_1}{m}\right)\dot{x} - \frac{\alpha_2}{m}x}_{\text{commande continue}} - \underbrace{\rho \text{sgn}(\sigma(t))}_{\text{commande discontinue}} \quad (3)$$

où  $\rho > 0$  est le gain de la partie discontinue et "sgn" est la fonction signe que nous régularisons par l'approximation suivante :

$$\text{sgn}(\sigma(t)) \approx \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\sigma(t)^2 + \eta}} \quad (4)$$

avec  $\eta = 10^{-5}$ . Cette régularisation rend la loi de contrôle moins performante mais évite le phénomène de réticence [7] qui peut endommager l'actionneur.

Le contrôleur converge en 2 phases. La première phase est la "reaching phase" qui sert à se positionner sur la sliding surface. Puis, lorsque le système est sur la surface de glissement, on a :

$$\sigma = 0 \implies \dot{x} = -\alpha_1 x - \alpha_2 \int x(\tau) d\tau \quad (5)$$

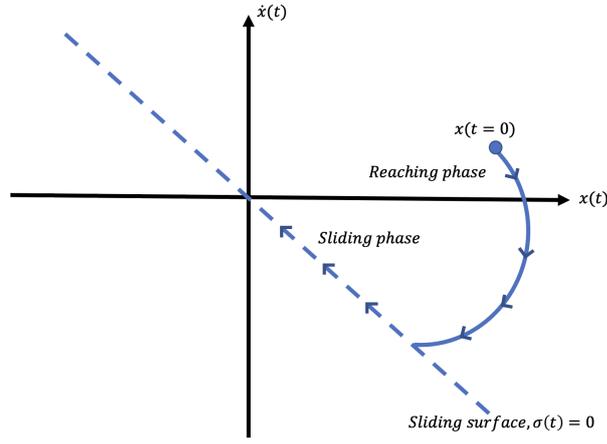


FIGURE 2 – Sliding surface : représentation dans le plan de phase.

c'est la "sliding phase" (voir figure 2).

La force extérieure étant bornée et harmonique, le cycle limite induit par le SMC peut être calculé par la méthode de la balance harmonique.

## 2.2 Méthode de la balance harmonique

La méthode la balance harmonique consiste à exprimer le déplacement et ses dérivées en série de Fourier tronquées à l'harmonique H tel que :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^H a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (6)$$

Où  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  sont les coefficients de Fourier. Plus généralement, on utilisera le formalisme tensoriel comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = \omega^2 [T_H(\omega t) \nabla^2 \otimes I_n] X \\ \dot{x}(t) = \omega [T_H(\omega t) \nabla \otimes I_n] X \\ x(t) = [T_H(\omega t) \otimes I_n] X \\ y(t) = [T_H(\omega t) \otimes I_n] Y \\ \mathbf{F}_{nl}(x(t)) = k_{nl} x(t)^3 = [T_H(\omega t) \otimes I_n] \hat{\mathbf{F}}_{nl} \\ \mathbf{F}_{ext}(\omega, t) = [T_H(\omega t) \otimes I_n] \hat{\mathbf{F}}_{ext} \\ \mathbf{F}_a(x, \dot{x}, \int x d\tau) = [T_H(\omega t) \otimes I_n] \hat{\mathbf{F}}_a \end{array} \right. \quad (7)$$

Avec : X les coefficients de Fourier,  $T_H(\omega t) = [1 \quad \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \cos(H\omega t) \quad \sin(H\omega t)]$  de taille  $(2H + 1)$  la base de Fourier;  $\nabla$  l'opérateur de dérivation;  $I_n$  la matrice identité  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\otimes$  le produit de Kronecker. Après une procédure de Galerkin sur la base  $T_H$  [11], l'équation (1) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \omega) = [\omega^2 (\nabla^2 \otimes \mathbf{m}) + \omega (\nabla \otimes \mathbf{c}) + (I_{2H+1} \otimes \mathbf{k})] \mathbf{X} + \hat{\mathbf{F}}_{nl}(\mathbf{X}) - \hat{\mathbf{F}}_{ext} - \hat{\mathbf{F}}_a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \\ \Gamma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \omega [\nabla \otimes I_{2H+1}] \mathbf{Y} - \mathbf{X} = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Les efforts non-linéaires sont calculés par la technique de bascule Temps-Fréquence (AFT) [3]. Cette technique permet de calculer les termes non-linéaires à l'aide d'une bascule entre le domaine fréquentiel et le domaine temporel où ils se calculent facilement.

Une fois le régime permanent atteint, la partie discontinue de la force active est périodique. Les changements d'état se produisent à chaque intersection avec la sliding surface, i.e. pour une valeur de  $\theta^* = \omega t^*$  qui vérifie l'équation :

$$\sigma(\theta^*) = 0 \quad (9)$$

L'équation non-linéaire (9) est résolue par un algorithme de Newton-Raphson et va caractériser le fait que la dynamique est sur la surface de glissement.

Le paramètre  $\theta^*$  est utilisé dans la méthode AFT énoncée plus haut pour calculer la force active dans le domaine temporel. Une étude de convergence est réalisée pour vérifier la validité de la partie non-linéaire de la force active.

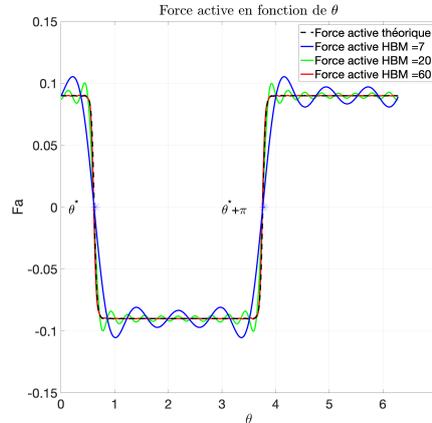


FIGURE 3 – Étude de convergence de la partie discontinue de la force active en fonction de  $\theta$  pour les paramètres adimensionnalisés suivants :  $\omega = 0.4$ ,  $m = k = 1$ ,  $c = 0.05$ ,  $k_{nl} = 0$ ,  $\rho = 0.09$ ,  $F_{ext} = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 1$ .

On peut voir sur la figure 3 que pour obtenir la convergence et limiter les oscillations de la partie non-linéaire, il est nécessaire d'introduire un nombre suffisant d'harmoniques (on prendra HBM=60) pour le paramètre de régularisation  $\eta = 10^{-5}$ . En effet, des oscillations trop importantes empêchent la convergence en amplitude de la force active. Toutefois, un nombre d'harmoniques trop élevé augmente considérablement le temps de calcul.

### 3 Résultats et discussion

Dans cette section, on applique la méthodologie développée à la section 2 au système non-linéaire contrôlé de la figure 1. Les paramètres adimensionnalisés du système sont :  $m=k=1$ ,  $c=0.1$ ,  $F_{ext}=0.5$ ,  $k_{nl}=0.25$ ,  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.3$ ,  $\rho=0.5$ .

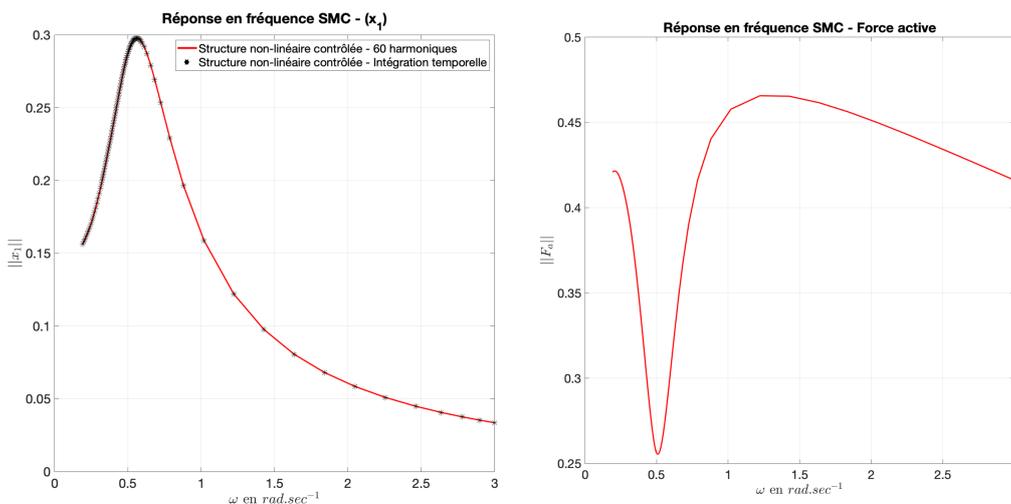


FIGURE 4 – Comparaison intégration temporelle et méthode de la balance harmonique avec H=60 harmoniques du système non-linéaire contrôlé. Courbe de gauche : amplitude de la masse du système. Courbe de droite : force d'actionnement  $F_a$ .

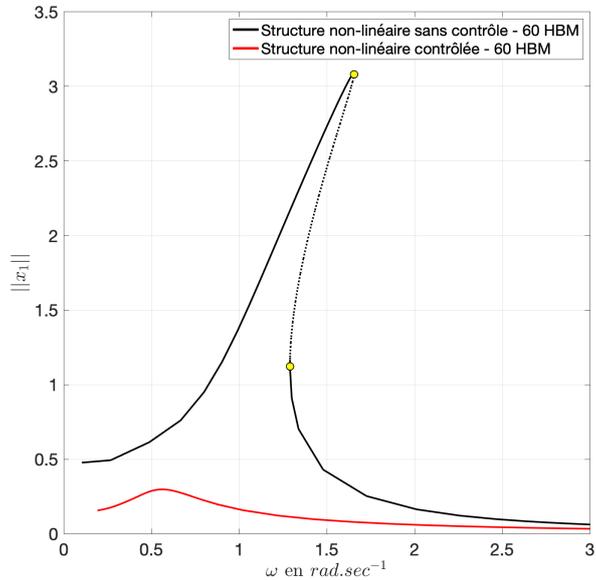


FIGURE 5 – Comparaison des courbes de réponse du système non-linéaire sans contrôle (en noir) et du système contrôlé (en rouge). Les points jaunes sont les points limites et les traits pointillés indiquent une zone instable.

Dans un premier temps, on compare les résultats obtenus par la méthode HBM avec l'intégration temporelle (voir figure 4) afin de valider la méthode mise en œuvre. Sur la figure 5, on peut voir que le système contrôlé (courbe rouge) ne présente aucun point de bifurcations et que la fréquence de résonance linéaire du système s'est décalée vers la gauche. Ce résultat montre que le système se comporte désormais comme un système linéaire. Le décalage fréquentiel du pic de résonance s'explique par les paramètres de la sliding surface. En effet, le paramètre  $\alpha_1$  permet d'amortir l'amplitude du pic alors que  $\alpha_2$  joue sur la position du pic. Enfin, l'amplitude de vibration du système contrôlé est considérablement atténuée par rapport à celui sans contrôle.

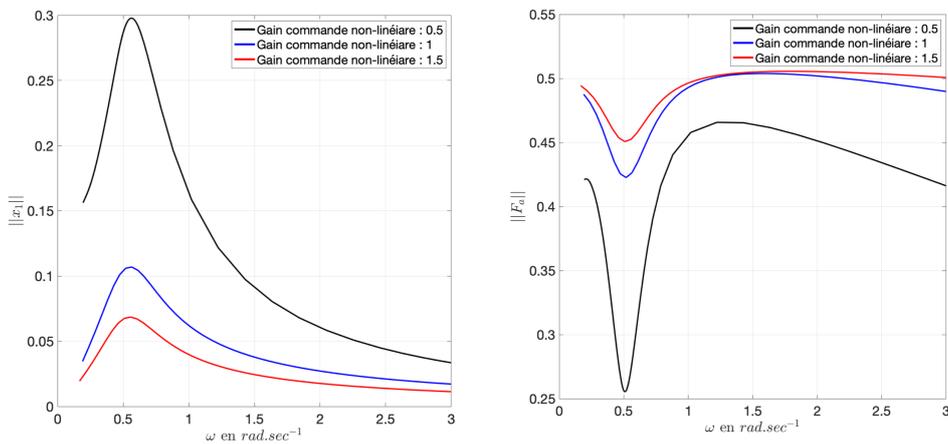


FIGURE 6 – Système non-linéaire contrôlé pour différents gains  $\rho$  de la partie discontinue. Courbe de gauche : amplitude de la masse du système. Courbe de droite : force d'actionnement  $F_a$ .

On s'intéresse maintenant à la partie non-linéaire de la force active (commande discontinue). On peut voir que l'augmentation de cette dernière diminue l'amplitude de la réponse (voir figure 6) mais augmente en contrepartie l'amplitude de la force active. Cependant, le gain de la commande non-linéaire reste à manier avec précaution pour respecter la stabilité au sens de Lyapunov. En effet, la commande continue n'étant pas stable à elle seule, un gain trop faible ou nul peut rendre le contrôleur instable.

La loi de commande par mode glissant supprime les points de bifurcations du duffing et apporte de

bons résultats en terme de contrôle de structure. Cependant, des études paramétriques complémentaires seront nécessaires pour étudier l'influence des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\eta$  et  $\rho$  et les optimiser.

## 4 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une méthode permettant d'obtenir la réponse en fréquences d'un système dynamique contrôlé par une commande par modes glissants ainsi qu'une façon originale de calculer un terme intégral par méthode de la balance harmonique. Cette nouvelle approche permet d'étudier plus largement cette loi de contrôle qui est de plus en plus utilisée pour sa robustesse face aux perturbations extérieures.

Les perspectives de cette étude sont multiples : études paramétriques, suivi numérique des bifurcations, adaptation à d'autres formes de SMC, ainsi que des applications plus concrètes sur les absorbeurs hybrides [4].

## Références

- [1] G. Agnes. Absorbers, Active. In S. Braun, editor, *Encyclopedia of Vibration*, pages 1–9. Elsevier, Oxford, 2001.
- [2] A. Allani. *Conception et optimisation d'amortisseurs à masse accordée pour les structures du génie civil*. PhD thesis, Université Paris-Est; Università degli studi di Roma, 2015.
- [3] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154, 1989.
- [4] S. Chesné, G Inquieté, P. Cranga, F. Legrand, and B. Petitjean. Innovative Hybrid Mass Damper for Dual-Loop Controller. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 115 :514–523, 2019.
- [5] C. Grenat, S. Baguet, C. H. Lamarque, and R. Dufour. A multi-parametric recursive continuation method for nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 127 :276–289, 2019.
- [6] Md. A. Hossain, M. S. Miah, Md J. Miah, and Md. M. Hossain. Performance Evaluation of a Newly Developed Translational Tuned Mass Damper. *International Journal of Structural and Civil Engineering Research*, 8(2) :94–100, 2019.
- [7] Hoon Lee and Vadim I. Utkin. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, 31(2) :179–188, 2007.
- [8] JJ. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control : United States Edition*. Pearson, Englewood Cliffs, N.J, 1990.
- [9] B. Sumantri, N. Uchiyama, and S Sano. Least square based sliding mode control for a quad-rotor helicopter and energy saving by chattering reduction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66–67 :769–784, 2016.
- [10] A.Y. Tuan and G.Q. Shang. Vibration control in a 101-storey building using a tuned mass damper. *Journal of Applied Science and Engineering*, 17 :141–156, 2014.
- [11] M. Urabe. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2) :120–152, 1965.
- [12] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2) :212–222, 1977.
- [13] G. Von groll and D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [14] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88 :445–461, 2017.