

# Vibrations non-linéaires géométriques de plaque mince rectangulaire d'épaisseur variable

V. Denis<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LaMé, INSA Centre Val de Loire, Blois, vivien.denis@insa-cvl.fr

**Résumé** — Le trou noir acoustique désigne une décroissance d'épaisseur et un amortissement localisé dans une structure mince permettant de localiser et d'amortir l'énergie vibratoire. La faible épaisseur donne lieu à des mouvements de grandes amplitudes, ce qui suggère de considérer des non-linéarités géométriques. Cette étude propose donc de résoudre les équations de Von Kármán pour une plaque d'épaisseur variable via une projection modale et à l'aide des modes issus d'un modèle éléments finis. La convergence des coefficients non-linéaires est étudiée et des calculs temporels sont proposés.

**Mots clés** — Vibrations, plaque de Von Kármán, non-linéarités géométriques, trou noir acoustique.

## 1 Introduction

Dans le contexte du contrôle des vibrations de structures minces, des gradients de propriétés peuvent être utilisés pour favoriser la localisation et la dissipation de l'énergie. C'est le principe du trou noir acoustique [1, 2], où la diminution graduelle de l'épaisseur d'une plaque ou une poutre suivant une loi de puissance, combinée à une augmentation locale de l'amortissement (par l'ajout un film viscoélastique par exemple) permet de localiser les ondes de flexion et de les dissiper efficacement. La littérature est croissante sur ce sujet [3]. A cause des faibles épaisseurs dans le profil trou noir, des amplitudes de l'ordre de l'épaisseur de la structure peuvent être atteinte, ce qui peut justifier un modèle comportant des non-linéarités géométriques et générer un intérêt quant à l'utilisation de ces nonlinéarités [4]. Ces travaux [4] traitent de structures semblables à des poutres et dont l'épaisseur varie suivant une dimension de l'espace. Notons que d'autres travaux ont étudié le trou noir dans le cadre non-linéaire en introduisant un phénomène d'impact pour augmenter l'efficacité du dispositif [5, 6]. Dans des structures de type plaque, le trou noir prend généralement la forme d'un puit circulaire dont l'épaisseur décroît suivant le rayon [7]. On propose dans cette étude d'étudier les vibrations de grande amplitude dans une plaque d'épaisseur variable comprenant un profil trou noir circulaire. La géométrie complexe incite à se tourner vers un modèle éléments finis. Ce dernier permettra d'obtenir les modes linéaires qui seront utilisés dans une formulation modale des équations de Von Kármán. Le système d'équation non-linéaires obtenu pourra alors être résolu par intégration numérique.

## 2 Modèle de plaque mince non-linéaire d'épaisseur variable

### 2.1 Équations de Von Kármán

Dans le cas d'une plaque d'épaisseur variable avec non-linéarités géométriques, les équations du mouvement, dites de Von Kármán, pour le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  s'écrivent, d'après les développements proposés dans [8, 9, 4] :

$$\rho h(x, y) \ddot{w} + \Delta(D(x, y) \Delta w) - (1 - \nu) L(D(x, y), w) = p + L(w, F), \quad (1)$$

où  $\rho$  et  $\nu$  sont respectivement la masse volumique et le coefficient de Poisson de la plaque,  $h(x)$  est l'épaisseur de la plaque.  $D(x, y) = Eh(x, y)^3 / 12(1 - \nu^2)$  est la rigidité de flexion, avec  $E$  le module d'Young du matériau.  $p(x, y, t)$  représente la distribution d'effort. On introduit également la fonction d'Airy  $F(x, y, t)$  respectant l'équation suivante :

$$\Delta\left(\frac{1}{Eh(x, y)} \Delta F\right) - (1 + \nu) L\left(\frac{1}{Eh(x, y)}, F\right) = -\frac{1}{2} L(w, w). \quad (2)$$

Enfin,  $L(f, g)$  est l'opérateur bilinéaire de Monge-Ampère qui s'exprime, en coordonnées cartésiennes :

$$L(f, g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}, \quad (3)$$

où  $f_{xx}$  désigne la dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $x$ .

On utilisera pour la suite des conditions aux limites d'appui simple qui s'écrivent, pour un bord de normale  $n$  et de tangente  $\tau$  [9] :

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \text{et} \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

Par la suite, on considèrera une plaque rectangulaire en appui simple dont l'épaisseur est décrite par un loi de puissance dans une zone circulaire de rayon  $R$  au centre de la plaque :

$$h(x, y) = \begin{cases} h_0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq R, \\ h_{\min} + \frac{(h_0 - h_{\min})}{R^m} (x^2 + y^2)^{m/2} & \text{si } x^2 + y^2 < R, \end{cases} \quad (5)$$

où  $h_0$  est l'épaisseur constante,  $h_{\min}$  l'épaisseur minimum et  $m$  l'exposant de la loi.

## 2.2 Formulation modale

Une approche modale est utilisée pour la partie spatiale du problème, comme décrit dans [10, 11] et déjà appliqué dans [4]. Les modes sont calculés pour le problème libre conservatif. Les deux problèmes associés s'écrivent :

$$-\rho h \omega^2 w + \Delta(D(x, y)\Delta w) - (1 - \nu)L(D(x, y), w) = 0, \quad (6)$$

et

$$\Delta\left(\frac{1}{Eh(x, y)}\Delta F\right) - (1 + \nu)L\left(\frac{1}{Eh(x, y)}, F\right) = \zeta^4 F, \quad (7)$$

auxquels on ajoute les conditions aux limites (4). Ces problèmes aux valeurs propres ont pour solutions  $(\omega_k, \Phi_k(x, y))$  et  $(\zeta_n, \Psi_n(x, y))$ , respectivement. Le déplacement et la fonction d'Airy sont alors exprimés par superposition modale :

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_\Phi} \Phi_k(x, y) q_k(t), \quad \text{et} \quad F(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_\Psi} \Psi_n(x, y) \beta_n(t), \quad (8)$$

où  $q_k(t)$  et  $\beta_n(t)$  sont les coordonnées modales pour le déplacement transversal et la fonction d'Airy, respectivement. Les entiers  $N_\Phi$  and  $N_\Psi$  représentent le nombre de modes gardés dans la troncature. Les modes sont orthonormés de telle sorte que  $\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle = 1$  et  $\langle \Phi_k, \Phi_p \rangle = 0$  si  $k \neq p$ .

La projection des équations sur les modes linéaires donne deux formulation équivalentes du problème. La formulation (9) est quadratique en  $(q, \beta)$  et s'écrit :

$$\beta_p(t) = -\frac{1}{2\zeta_p^4} \sum_{i=1}^{N_\Phi} \sum_{j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^p q_i(t) q_j(t), \quad (9a)$$

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = F_s(t) + \frac{1}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{n=1}^{N_\Psi} E_{k,n}^s q_k(t) \beta_n(t), \quad (9b)$$

avec  $M_s = \int_S \rho h \Phi_s \Phi_s dS$  la masse modale,  $F_s = \frac{1}{M_s} \int_S p \Phi_s dS$  l'effort modal, et les coefficients de couplage :

$$H_{i,j}^p = \int_S \Psi_p L(\Phi_i, \Phi_j) dS \quad \text{et} \quad E_{k,l}^s = \int_S L(\Phi_k, \Psi_l) \Phi_s dS. \quad (10)$$

La formulation (11), où la variable  $\beta$  a été éliminée pour garder seulement les amplitudes modales  $q$  associées au déplacement transversal  $w$ , montre une non-linéarité cubique en  $q$  :

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = F_s(t) - \frac{1}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{m=1}^{N_\Phi} \sum_{n=1}^{N_\Phi} \Gamma_{k,m,n}^s q_k(t) q_m(t) q_n(t). \quad (11)$$

Les coefficients  $\Gamma_{k,m,n}^s$  sont calculés ici à partir de  $H_{m,n}^l$  et  $E_{k,l}^s$  :

$$\Gamma_{k,m,n}^s = \sum_{l=1}^{N_\Psi} \frac{H_{m,n}^l E_{k,l}^s}{2\zeta_l^4}. \quad (12)$$

On utilisera dans les sections suivantes un schéma conservatif pour l'intégration temporelle qui est décrit à partir de la formulation quadratique (9b). Par contre la convergence de la troncature modale avec le nombre de modes longitudinaux  $N_\Psi$  sera plus facilement étudiée à l'aide des coefficients  $\Gamma_{k,m,n}^s$  présent dans la formulation cubique (9b).

On pourra noter que les propriétés décrites dans [11] pour les coefficients de couplage sont également valides dans ce cas : grâce à la bilinéarité de l'opérateur de Monge-Ampère et au fait qu'il soit triplement auto-adjoint [9], on peut vérifier que  $H_{i,j}^p = H_{j,i}^p$  et que  $H_{i,j}^p = E_{p,j}^i$ , ce qui permet de réduire grandement le coût de calcul des coefficients d'une part et leur coût de stockage d'autre part.

Notons finalement que le coefficient  $\Gamma_{k,m,n}^s$  doit être ici divisé par  $Eh$  pour pouvoir être comparé aux résultats de la littérature dans le cas d'une épaisseur constante, à cause du facteur  $1/Eh$  apparaissant dans l'opérateur spatial (voir Eq. (7)) et donc dans le problème aux valeurs propres.

### 3 Considération numériques

#### 3.1 Modèle Éléments Finis pour le calcul des modes

##### 3.1.1 Élément fini de plaque et maillage

La plaque mince d'épaisseur variable est discrétisée en éléments finis. On utilise pour cela l'élément de plaque triangle DKT décrit par exemple dans [12]. Cet élément possède 9 degrés de liberté ; pour chaque noeud on utilise le vecteur d'inconnues  $\mathbf{u}_i = [w_i \ \beta_{xi} \ \beta_{yi}]^T$  où les variables  $\beta_x = -w_{,x}$  et  $\beta_y = -w_{,y}$  représentent les rotations

Sans entrer dans les détails, on peut noter que les déplacements et les courbures dans un élément de plaque  $e$  sont décrits à l'aide de fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}(x,y)$  et  $\mathbf{B}(x,y)$ , à partir des inconnues  $\mathbf{u}_e$  aux trois noeuds de l'élément, comme :

$$w(x,y) = \mathbf{N}(x,y) \mathbf{u}_e, \quad (13)$$

et

$$- [w_{,xx} \ w_{,yy} \ 2w_{,xy}]^T \equiv [\beta_{x,x}(x,y) \ \beta_{y,y}(x,y) \ \beta_{x,y}(x,y) + \beta_{y,x}(x,y)]^T = \mathbf{B}(x,y) \mathbf{u}_e. \quad (14)$$

Le maillage est généré à l'aide du mailleur `distmesh` [13]. L'avantage des éléments finis est la possibilité de raffiner le maillage avec une loi pour s'adapter aux longueurs d'ondes locales ce que permet `distmesh`. Notons que le maillage doit être très fin dans la zone de faible épaisseur pour le problème transversal, mais doit également être suffisamment fin dans la partie épaisse pour le problème longitudinal. Un exemple de maillage est donné sur la figure 1. Le maillage utilisé en pratique dans la suite est plus fin, avec environ 22000 éléments et 33000 degrés de liberté.

##### 3.1.2 Calcul des modes transversaux $\Phi$

Le problème (6) se traduit par le problème aux valeurs propres discret suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur d'inconnues, où  $\omega$  est la pulsation propre et où les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  globales sont construites à partir des matrices de masse élémentaire  $\mathbf{m}_e$  :

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \rho h(x,y) \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS, \quad (16)$$

et de raideur élémentaire  $\mathbf{k}_e$  :

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T D(x,y) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \mathbf{B} dS, \quad (17)$$

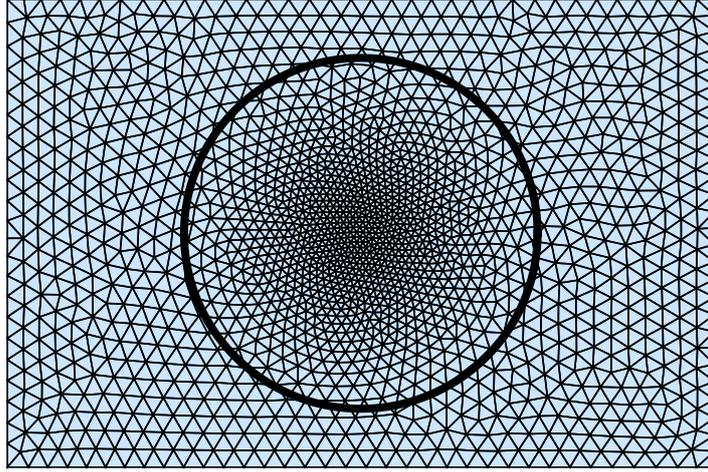


FIGURE 1 – Exemple de maillage pour la plaque d'épaisseur variable. Le cercle indique la zone d'épaisseur variable.

où  $\Omega_e$  désigne le domaine de l'élément  $e$ . L'intégration est exacte avec 3 points de Hammer pour une épaisseur constante mais on peut considérer plus de points d'intégration pour rendre le calcul plus précis pour une épaisseur qui serait variable sur l'élément.

### 3.1.3 Calcul des modes longitudinaux $\Psi$

On remarque que l'équation (7) est très proche de l'équation (6) à ceci près que  $D$  est remplacé par  $1/Eh$  et que  $\nu$  est remplacé par  $-\nu$ . On introduit un vecteur d'inconnue aux noeuds  $\mathbf{u}_i^F = [F_i \quad -F_{,xi} \quad -F_{,yi}]^T$  où apparaissent les dérivées spatiales de la fonction d'Airy  $F$ . On peut alors montrer que substituer  $D$  et  $\nu$  par  $1/Eh$  et  $-\nu$  dans la loi de comportement permet de retrouver l'équation (7). La matrice de raideur élémentaire associée au problème longitudinal  $\mathbf{k}_e^F$  s'écrit alors :

$$\mathbf{k}_e^F = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{1}{Eh(x,y)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu)/2 \end{bmatrix} \mathbf{B} \, dS, \quad (18)$$

tandis que la matrice de masse  $\mathbf{m}_e^F$  s'écrit :

$$\mathbf{m}_e^F = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dS. \quad (19)$$

Le problème aux valeurs propres discret pour les modes longitudinaux s'écrit alors :

$$(\mathbf{K}^F - \zeta^4 \mathbf{M}^F) \mathbf{u}^F = \mathbf{0}, \quad (20)$$

avec  $\mathbf{u}^F$  le vecteur d'inconnues,  $\zeta^4$  les valeurs propres, et  $\mathbf{M}^F$  et  $\mathbf{K}^F$  les matrices de masse et de raideur globales.

Notons que les calculs de  $\Phi$  et de  $\Psi$  peuvent se faire sur le même maillage et qu'en utilisant cette formulation éléments finis, une fois les deux problèmes aux valeurs propres résolus, les coefficients non-linéaires peuvent alors être calculés très simplement en calculant les dérivées secondes des déformées propres aux points d'intégration en utilisant les fonctions  $\mathbf{B}(x,y)$ .

## 3.2 Schéma temporel conservatif

Le système d'équations (9a-9b) est résolu en utilisant un schéma d'intégration conservatif décrit dans [14, 11], qui est stable sous condition. On discrétise tout d'abord les amplitudes modales  $q_s(t)$  avec des

variables discrètes  $q_s^n$  où  $t = n\Delta t$  avec  $\Delta t$  le pas temporel, ainsi que les opérateurs de dérivation avec des différences finies. Le schéma conservatif s'écrit :

$$\delta_{tt}q_s^n + 2\xi_s\omega_s\delta_t q_s^n + \omega_s^2 q_s^n = \frac{1}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k^n [\mu_t \beta_l^n] + F_s^n, \quad (21)$$

$$\mu_t \beta_p^n = \frac{-1}{2\xi_p^4} \sum_{i=1}^{N_\Phi} \sum_{j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^p q_i^n [e_{t-} q_j^n], \quad (22)$$

avec  $\delta_{tt}$ ,  $\delta_t$ ,  $\mu_{t-}$ ,  $\mu_t$  et  $e_{t-}$  des opérateurs discrets de dérivation et de moyennage définis dans [14, 11, 4].

La condition de stabilité de ce schéma est  $f_e > \pi f_{N_\Phi}$  où  $f_e = 1/\Delta t$  est le taux d'échantillonnage et  $f_{N_\Phi}$  est la fréquence maximum retenue dans la troncature modale pour  $w$ . On peut remarquer que des termes d'amortissements modaux ont été introduit dans l'équation (22). Bien que très important dans le cas du trou noir acoustique, l'amortissement n'est pas l'objet de l'étude ; un amortissement proportionnel faible est donc choisi pour la suite.

## 4 Application à une plaque rectangulaire munie d'un trou noir acoustique

Quelques résultats numériques sont présentés dans cette section. La plaque est de dimensions  $0.6 \times 0.4$  m, l'épaisseur constante est fixée à  $h_0 = 0.001$  m, l'épaisseur minimum à  $h_{\min} = 2 \times 10^{-4}$  m et  $m = 2$ . On note que dans l'épaisseur minimum reste assez importante dans ce cas, dans le contexte du trou noir acoustique. Ces paramètres peuvent toutefois servir à montrer quelques tendances. Les valeurs utilisées pour le matériau sont  $E = 200$  GPa,  $\rho = 7860$  kg/m<sup>3</sup> et  $\nu = 0.3$ .

### 4.1 Validation de la méthode pour une plaque rectangulaire homogène

Le calcul éléments finis est validé pour une plaque rectangulaire uniforme avec différentes conditions limites (bords libres, en appui simple ou encastree) en comparant les fréquences propres obtenues à un code éléments finis commercial. De plus, la méthode est également validée dans le cadre non-linéaire en comparant les coefficients cubiques  $\Gamma_{p,p,p}^p$  calculés pour la plaque uniforme en appui simple aux résultats obtenus par Ducceschi & Touzé [10]. La comparaison est présentée pour quelques modes dans le tableau 1 : les valeurs sont très proches et les différences peuvent être expliquées soit par la précision de l'intégration numérique, soit par la précision sur le calcul des valeurs propres  $\zeta^4$  du problème en  $F$ . On pourra remarquer sur la figure 3a que les coefficients cubiques ont bien convergé et que le nombre de mode longitudinaux  $N_\Psi$  est suffisant. Finalement, remarquons que la fréquence du 100<sup>e</sup> et dernier mode transversal calculé est de 1403 Hz pour la plaque uniforme.

TABLE 1 – Comparaison des coefficients non-linéaires  $\Gamma_{p,p,p}^p (L_x L_y)^3$  obtenus par le modèle éléments finis (divisés par  $Eh$ ) avec ceux mentionnés dans [10].

Mode $p$	1	20	50	100
Ref. [10]	20.034	$9.4977 \times 10^3$	$1.3937 \times 10^4$	$2.2108 \times 10^5$
FE	20.033	$9.4799 \times 10^3$	$1.3452 \times 10^4$	$2.2006 \times 10^5$

### 4.2 Modes de la plaque d'épaisseur variable

Les modes de la plaque d'épaisseur variable sont également calculés pour  $N_\Phi = 100$ . La fréquence du dernier mode est dans ce cas 1084 Hz ; cette fréquence plus basse que pour la plaque uniforme s'explique par l'augmentation de la densité modale déjà remarquée pour un profil trou noir [15]. Quelques exemples de déformées modales  $\Phi$  et  $\Psi$  et leurs dérivées secondes sont présentés sur la figure 2. On note que pour les modes  $\Phi$ , les amplitudes des déformées sont plus grandes dans la zone centrale de faible épaisseur, tandis que les déformées des modes  $\Psi$  ont au contraire une amplitude plus faible dans la zone centrale.

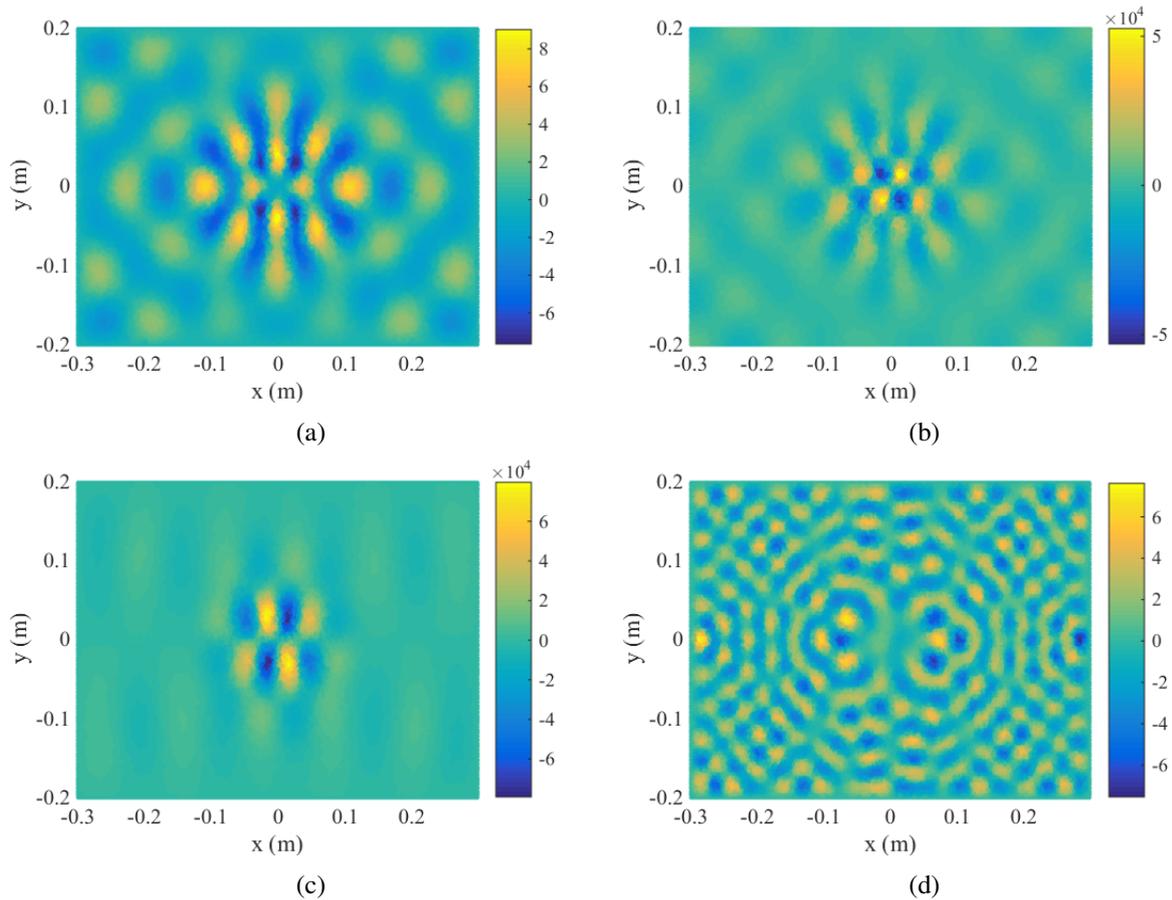


FIGURE 2 – Exemples de déformées modales (a) mode transversal  $\Phi_{100}$ , (b) sa dérivée seconde  $\Phi_{100,xy}$ , (c) dérivée seconde  $\Phi_{60,xx}$  et (d) mode in-plane  $\Psi_{500}$ .

### 4.3 Convergence des coefficients non-linéaires

L'évolution des coefficients cubiques  $\Gamma_{p,p,p}^p$  avec le nombre de modes  $N_\Psi$  pris en compte est tracé sur la figure 3 pour la plaque uniforme et pour la plaque d'épaisseur variable, pour une vingtaine de modes de 1 à  $N_\Phi$ . On constate que la convergence est assurée pour la plaque uniforme à partir de 400 modes longitudinaux. Pour la plaque d'épaisseur variable, la figure 3b met en évidence que d'une part la convergence n'est pas encore atteinte pour certains modes même avec 1000 modes longitudinaux, et que d'autre part les coefficients ont des valeurs d'un ordre de grandeur plus élevé que pour l'épaisseur uniforme. On peut donc s'attendre à un comportement non-linéaire plus marqué pour la plaque trou noir. Pour finir, il semble que de nombreux modes longitudinaux contribuent à la convergence.

### 4.4 Calculs temporels

Bien que le nombre de modes transversaux soit assez peu élevé et que les coefficients non-linéaires n'aient pas tous convergés dans le cas d'épaisseur variable, des calculs de réponses temporelles sont réalisés pour observer quelques tendances. La plaque est excitée par un signal sinusoïdal d'amplitude croissante (de 0 à 60 N en 2 s) au point (0.2 m, 0.15 m), soit proche d'un coin de la plaque ; l'observation se fait au même point. La figure 4 montre les réponses de la plaque uniforme et de la plaque d'épaisseur variable sous forme de spectre temps-fréquence pour des excitation à 150 et 230 Hz. Ces fréquences sont choisies arbitrairement mais les résultats sont assez généraux : un régime chaotique arrive pour des amplitudes plus faibles pour la plaque d'épaisseur variable que pour la plaque uniforme. La transition d'un régime périodique vers un régime chaotique semble directe, sans passage par un régime quasi-périodique pour les fréquences testées. Ces résultats sont à étudier plus en détails en prenant plus de modes en compte dans le calcul.

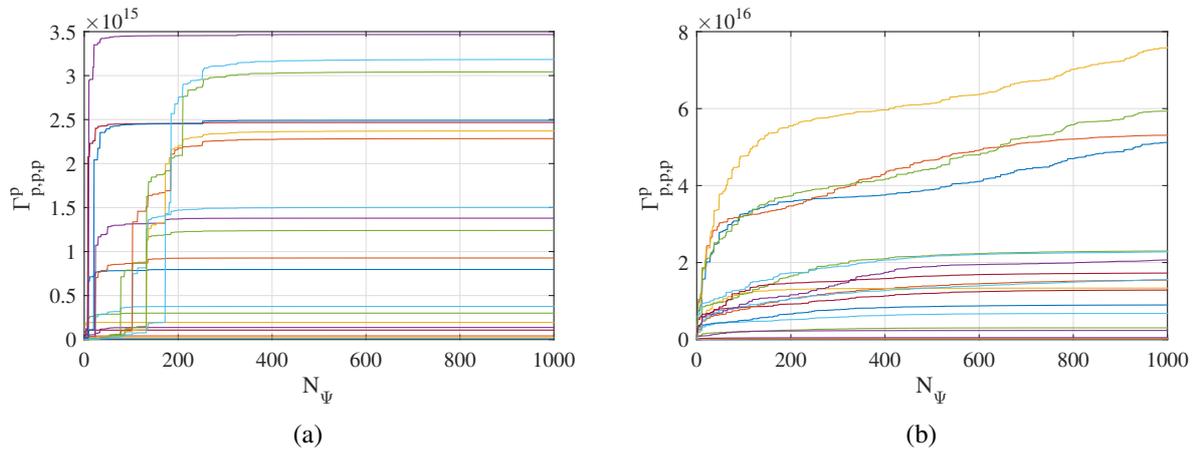


FIGURE 3 – Convergence des coefficients non-linéaires  $\Gamma_{p,p,p}^p$  pour (a) la plaque homogène et (b) la plaque d'épaisseur variable.

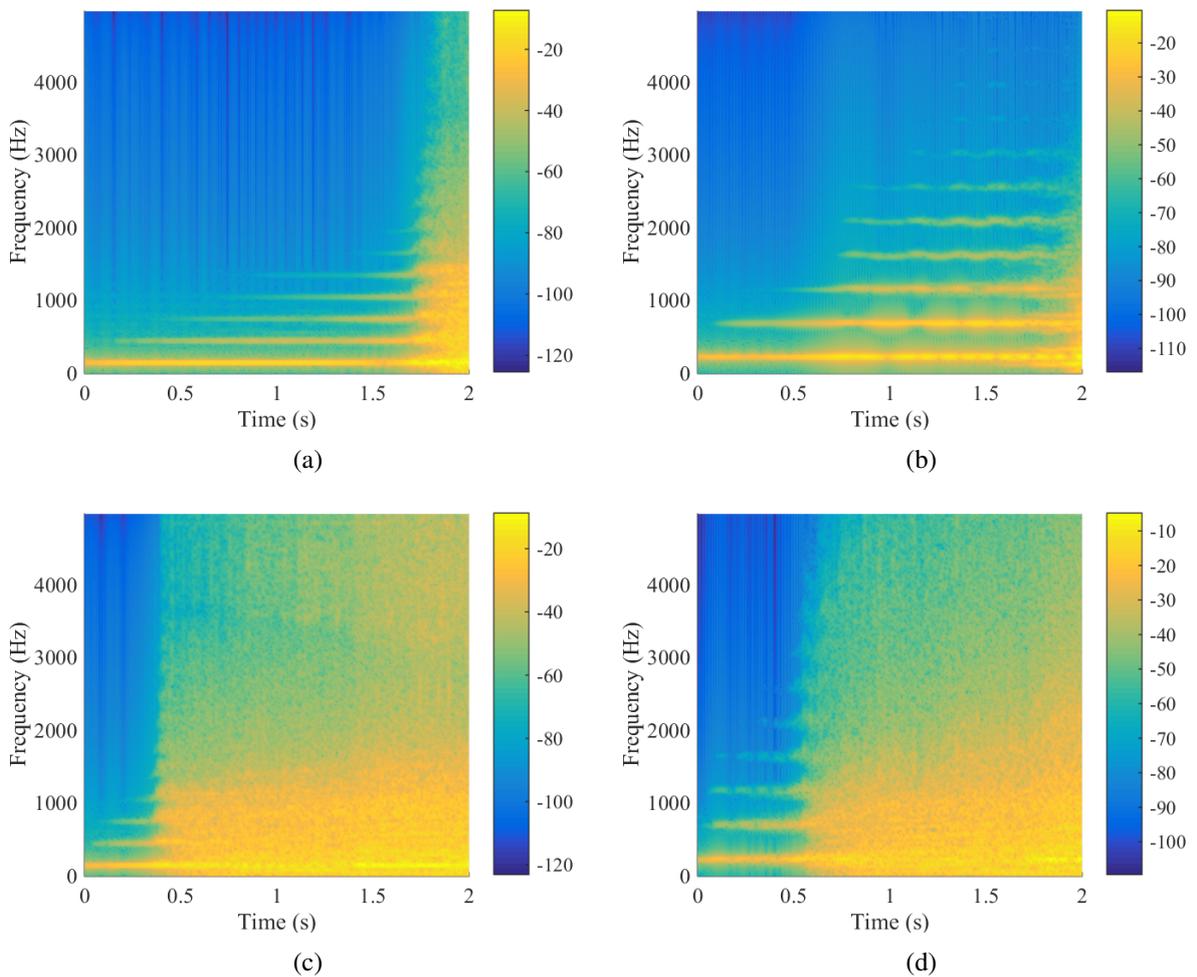


FIGURE 4 – Temps-fréquence de la réponse temporelle (dB, ref. 1 m) de la plaque uniforme excitée à (a) 150 Hz et (b) 230 Hz, et de la plaque d'épaisseur variable excitée à (c) 150 Hz et (d) 230 Hz avec une amplitude croissante de 0 à 60 N.

## 5 Conclusions et perspectives

Cette étude préliminaire propose une méthode pour calculer les vibrations de grande amplitude dans une plaque d'épaisseur variable en utilisant une formulation modale des équations de Von Kármán et des modes issus d'un modèle éléments finis de plaque. Le calcul des coefficients non-linéaires montre que

ceux-ci convergent plus lentement que pour une plaque uniforme, et dans le cas d'une épaisseur décroissante, qu'ils sont plus élevés. Cela traduit une non-linéarité plus importante, visible dans les quelques calculs temporels présentés. Il serait intéressant de comparer ces résultats à d'autres méthodes permettant le calcul des coefficients pour un modèle de structure mince comme par exemple la méthode des déplacements modaux imposés [16, 17, 18]. Dans le cadre trou noir, il sera intéressant de diminuer l'épaisseur dans le modèle, de prendre en compte l'amortissement. On peut également penser à complexifier la géométrie en incluant des trous, mais aussi à établir un modèle plus représentatif de la réalité, où l'épaisseur ne décroîtrait plus de façon symétrique des deux côtés de la plaque.

## Références

- [1] M. Mironov. *Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval*, Soviet Physics : Acoustics, 34 (3), 318–319, 1988.
- [2] V. Krylov, F. Tilman. *Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers*, Journal of Sound and Vibration, 274, 605–619, 2004.
- [3] A. Pelat, F. Gautier, S. Conlon, F. Sempelotti. *The acoustic black hole : A review of theory and applications*, Journal of Sound and Vibration, 476, 115316, 2020.
- [4] V. Denis, A. Pelat, C. Touzé, F. Gautier. *Improvement of the acoustic black hole effect by using energy transfer due to geometric nonlinearity*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 94, 134–145, 2017.
- [5] H. Li, C. Touzé, A. Pelat, F. Gautier. *Linear and nonlinear dynamics of a plate with acoustic black hole, geometric and contact nonlinearity for vibration mitigation*, Journal of Sound and Vibration, 508, 116206, 2021.
- [6] H. Li, C. Touzé, A. Pelat, F. Gautier. *Combining nonlinear vibration absorbers and the Acoustic Black Hole for passive broadband flexural vibration mitigation*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 129, 103558, 2021.
- [7] E. Bowyer, D. O'Boy, V. Krylov, F. Gautier. *Experimental investigation of damping flexural vibrations in plates containing tapered indentations of power-law profile*, Applied Acoustics, 74 (4), 553–560, 2013.
- [8] G. Efstathiades. *A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure*, Journal of Sound and Vibration, 16 (2), 231–253, 1971.
- [9] O. Thomas, S. Bilbao. *Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties*, Journal of Sound and Vibration, 315 (3), 569-590, 2008.
- [10] M. Ducceschi, C. Touzé. *Nonlinear dynamics of rectangular plates : Investigation of modal interaction in free and forced vibrations*, Acta Mechanica, 225, 213–232, 2014.
- [11] M. Ducceschi, C. Touzé. *Modal approach for nonlinear vibrations of damped impacted plates : Application to sound synthesis of gongs and cymbals*, Journal of Sound and Vibration, 344, 313-331, 2015.
- [12] J.-L. Batoz, G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermes, 1990.
- [13] P.-O. Persson, G. Strang. *A Simple Mesh Generator in MATLAB*, SIAM Review, 46 (2), 329-345, 2004.
- [14] S. Bilbao. *A Family of conservative Finite Difference Schemes for the Dynamical von Karman Plate Equations*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 23, 904-922, 2007.
- [15] V. Denis, A. Pelat, F. Gautier. *Modal Overlap Factor of a beam with an acoustic black hole termination*, Journal of Sound and Vibration, 333 (12), 2475–2488, 2014.
- [16] A. Muravyov, S. Rizzi. *Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures*, Computers and Structures, 81 (15), 1513–1523, 2003.
- [17] A. Givois, A. Grolet, O. Thomas, J.-F. Deü. *On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models*, Nonlinear Dynamics, 97 (2), 1747-1781, 2019.
- [18] A. Vizzaccaro, A. Givois, P. Longobardi, Y. Cheng, J.-F. Deü, L. Salles, C. Touzé, O. Thomas. *Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements*, Computational Mechanics, 66 (6), 1293-1319, 2020.