

Intégration du principe de raffinement de maillage dans la méthode de Condensation Statique Adaptative (ASC)

A. Mezher^{1,2}, L. Jason¹, G. Folzan¹, L. Davenne²

¹ Université Paris-Saclay, CEA, Service d'Études Mécaniques et Thermiques, France, ali.mezher@cea.fr

² LEME, UPL, Université Paris Nanterre, France, luc.davenne@parisnanterre.fr

Résumé — Afin d'évaluer le phénomène de fissuration dans les grandes structures en béton armé et précontraint, un modèle prédictif de l'endommagement du béton avec un maillage raffiné et une loi de comportement non linéaire peut être requis. En raison du coût de calcul, une telle modélisation est difficilement applicable à l'échelle de la structure complète. Pour résoudre cette difficulté, une méthode basée sur la condensation statique [1] initialement proposée dans [2], qui concentre l'effort de calcul sur la zone endommagée a été proposée. Dans ce travail, la méthode a été développée en y intégrant le principe de raffinement automatique du domaine d'intérêt (DI).

Mots clefs — Condensation statique, endommagement, raffinement de maillage.

1. Introduction

Lors de la conception des ouvrages de génie civil, il est nécessaire de prendre en compte tous les facteurs pouvant conduire à la ruine de l'ouvrage. Les expérimentations à l'échelle des grandes structures étant très limitées, il est souvent nécessaire d'utiliser la modélisation numérique. Les modèles doivent alors pouvoir prédire le comportement de ces structures pour les différents cas de charges susceptibles de se produire au cours de la vie de la structure.

Le phénomène qui intéresse cette contribution est celui de la fissuration du béton pour les grandes structures qui est un phénomène localisé. Sa modélisation nécessite une loi de comportement non linéaire avec un maillage fin de l'ordre du centimètre afin d'atteindre une bonne représentativité. Ce type de modélisation peut être coûteux et parfois impossible à appliquer sur de grandes structures. Plusieurs solutions pour résoudre ce problème existent dans la littérature.

Une des solutions possibles est la méthode de raffinement adaptatif du maillage (AMR) qui consiste à augmenter localement la finesse du maillage dans les zones où il est essentiel de calculer la solution avec une plus grande précision que dans le reste de la structure. BerGer et Oligier [3] ont été les premiers à introduire le concept de raffinement de maillage pour la résolution d'équations aux dérivées partielles hyperboliques en 1984. Berger [4] a ensuite proposé une version adaptative du raffinement de maillage 2D pour les lois de conservation et a montré l'efficacité de l'AMR pour la dynamique des gaz en 1989. Plus récemment, la méthode AMR a été adaptée à plusieurs domaines de la physique tels que la dynamique des fluides compressibles et incompressibles, la mécanique des solides et la combustion ([5], [6]). L'avantage de la méthode réside principalement dans ses performances en termes de taille mémoire et de temps CPU. Cependant, avec cette approche, le comportement non linéaire, qui nécessite un processus itératif pour la résolution, est vérifié sur l'ensemble de la structure, même dans les zones à comportement linéaire. Dans le cas de zones endommagées localisées, cette étape peut devenir très pénalisante et la solution n'est pas complètement satisfaisante.

En mécanique numérique, la condensation statique est une méthode de réduction de modèle qui réduit le nombre de degrés de liberté en éliminant les variables du système linéaire dans la matrice de rigidité. Des sous-structures condensées sont ainsi créées. Les « super-éléments » sont généralement définis en éliminant les inconnues internes dans les zones condensées. Des problèmes complexes, dont la complexité est liée à leur taille, peuvent être calculés à un coût plus raisonnable. La méthode de

condensation a été introduite pour la première fois par Guyan en 1965 [1] et a été largement utilisée en mécanique. Les formulations initiales ont été progressivement améliorées pour les applications en calculs dynamiques ([6], [7]) et/ou associées à la sous-structuration [8] dans l'analyse de structures à non-linéarités localisées.

Concernant la fissuration non linéaire dans les structures en béton armé, une méthode dite de "condensation statique adaptative" a été développée [2]. Elle consiste à concentrer l'effort de calcul sur des « zones d'intérêt » préalablement définies (zones à comportement de fissuration attendu), en « éliminant » les zones à comportement élastique linéaire. Cette approche utilise la méthode de condensation statique de Guyan pour remplacer les zones élastiques par un ensemble de conditions aux limites appliquées aux frontières des zones d'intérêt. Au cours du calcul, des critères sont utilisés pour détecter si de l'endommagement est susceptible d'apparaître dans le domaine condensé afin d'évoluer les zones d'intérêt. Cette méthode permet de réduire la dimension du problème non linéaire sans altérer la qualité des résultats par rapport à un calcul de référence complet. La méthode a été appliquée sur plusieurs structures : une poutre entaillée en flexion, une poutre précontrainte et une enceinte de confinement simplifiée en béton armé soumis à une pression interne. Des résultats similaires à un calcul de référence complet (sans condensation) ont été obtenus avec un gain de temps très variable par rapport au calcul complet. Ce gain varie entre 3 et atteint 15 pour le cas de la précontrainte [9]. Cependant, même avec cette méthode, un maillage très fin de l'ordre de 1 cm semble toujours impossible à atteindre avec les machines actuelles car des opérations sont toujours nécessaires sur l'ensemble de la structure, notamment l'inversion de très grandes matrices. Pour dépasser cette difficulté, l'intégration du principe de raffinement de maillage dans la méthode ASC a été proposée. L'idée principale est de raffiner uniquement le domaine d'intérêt (DI) en gardant un maillage grossier pour le reste de la structure, qui présente un comportement élastique.

Après une brève description de la méthode ASC en section 2 (y compris le raffinement de maillage du DI), une application de la méthode sur une poutre entaillée en flexion sera présentée dans la section 3. La section 4 comprend une conclusion et les perspectives du travail.

2. Méthode de Condensation Statique Adaptative

La méthode ASC sera présentée en détail dans ce paragraphe avec son algorithme qui est donné dans la Figure 1. La première étape consiste à effectuer un pré calcul linéaire sur l'ensemble de la structure pour obtenir une distribution de la déformation élastique. Une quantité d'intérêt est alors calculée. Dans cette contribution, relative à la mécanique de l'endommagement, cette quantité est la déformation équivalente de Mazars, ϵ_{eq} , calculée à l'aide de l'équation suivante [15] :

$$\epsilon_{eq} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} \quad (1)$$

Où $\langle \epsilon_i \rangle_+$ représente la valeur principale positive de la déformation.

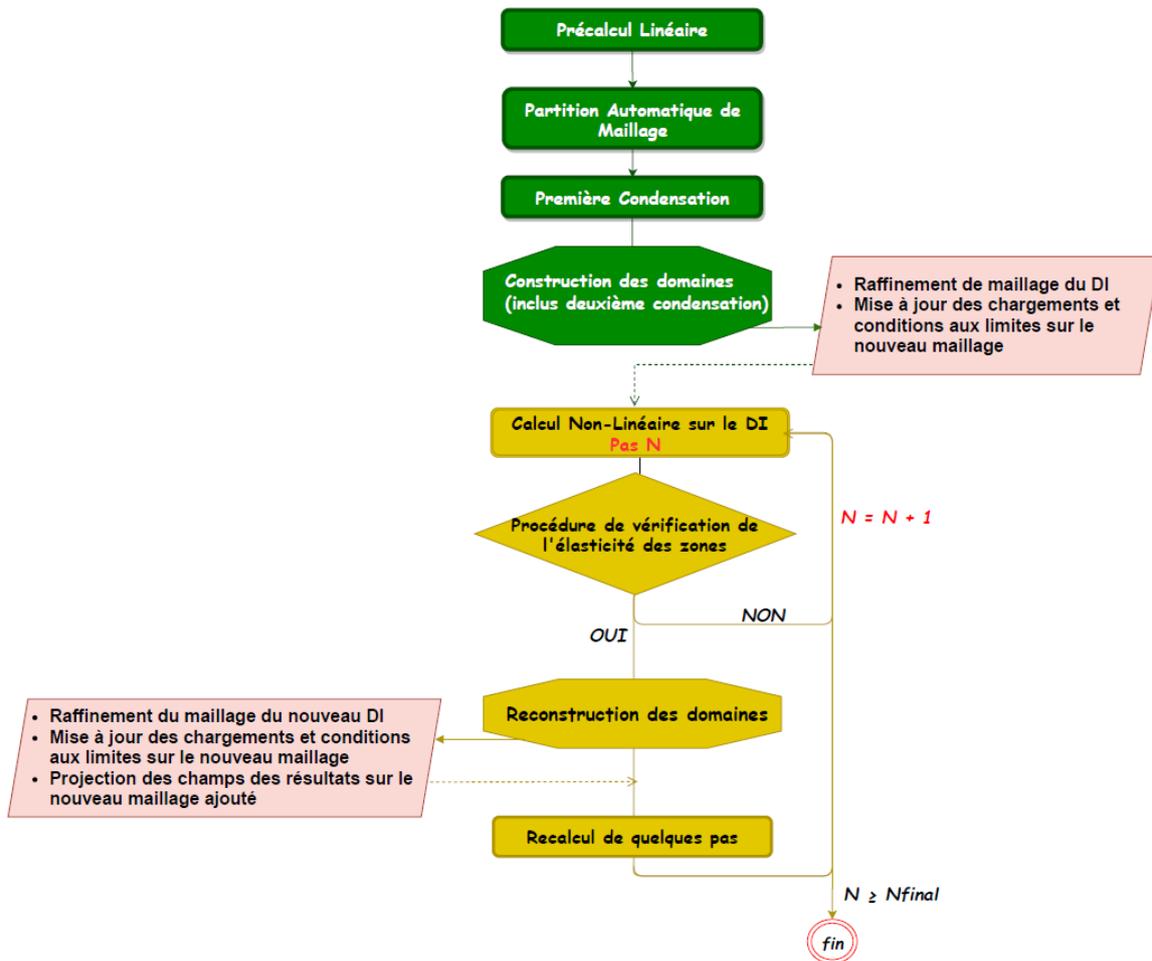


Figure 1 : Algorithme de la méthode ASC

L'étape suivante consiste à partitionner la structure en sous-zones. Ce partitionnement est réalisé à l'aide d'une procédure de partitionnement automatique adaptée à la méthode ASC [9]. Il est basé sur la distribution de la déformation élastique et prend en compte l'apparition et la propagation de l'endommagement. Ensuite, une « première condensation » est effectuée, durant laquelle chaque zone est condensée et remplacée par des conditions aux limites équivalentes sur ses frontières. Cette étape est effectuée une unique fois et les matrices condensées sont sauvegardées et utilisées autant que nécessaire pendant toute la simulation. Ensuite, deux domaines sont construits: le domaine d'intérêt (DI) qui sera explicitement simulé et le domaine élastique (DE) qui est remplacé par un ensemble de conditions aux limites sur les frontières du DI (seconde condensation). Le DI de départ est construit à partir de la zone la plus susceptible d'être endommagée en fonction de la distribution des déformations élastiques déjà calculée. Toute la phase de préparation (en vert sur l'algorithme) s'effectue sur le maillage initial (gros). Il est à noter que l'utilisation d'un maillage fin dans cette phase n'apporte pas de représentativité sur le calcul. Une fois le DI de départ détecté, le maillage de ce DI sera raffiné en subdivisant les éléments jusqu'à ce que la densité de maillage requise soit atteinte à l'aide d'une méthode hiérarchique nommée h-raffinement [10]. Cette méthode est choisie en raison de sa nature hiérarchique qui la rend facile à mettre en œuvre et peut faciliter la projection des champs du maillage initial sur le nouveau maillage. Pour ne pas affecter le principe de la double condensation, ce raffinement sera effectué en gardant le maillage initial sur les éléments frontières du DI. Concernant la finesse de maillage finale du DI, elle doit permettre d'appliquer une technique de régularisation afin de s'affranchir du problème de dépendance au maillage. L'ordre de grandeur visé est centimétrique pour s'adapter aux techniques de régularisation et en particulier la méthode intégrale [11]. La Figure 2

montre un exemple de l'application du raffinement de maillage du DI (en gardant ses éléments frontières) sur une enceinte simplifiée en béton armé. Une fois le raffinement terminé, les chargements comme la pression interne, la précontrainte et le poids propre ainsi que les relations cinématiques (liaisons acier-béton par exemple) et les conditions aux limites sont redéfinis sur le nouveau maillage du DI.

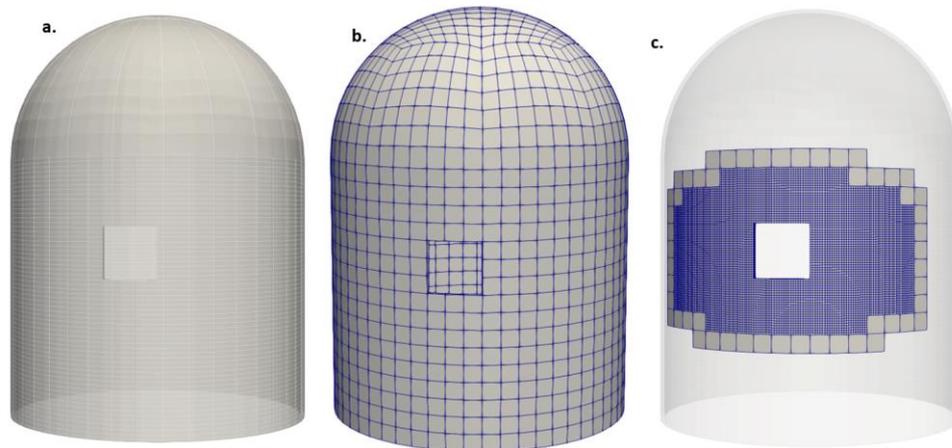


Figure 2: exemple du DI raffiné sur une enceinte simplifiée en béton armé ; a : la structure ; b : le maillage grossier initial ; c : le maillage du DI raffiné

Avec le processus de raffinement du maillage, une non-conformité dans le maillage apparaît. Cela se traduit par l'apparition de nœuds suspendus « hanging nodes », qui sont générés après chaque raffinement, si les éléments adjacents n'ont pas la même taille. La Figure 3 montre à droite un exemple de maillage conforme et à gauche un maillage non conforme qui contient un « hanging node ».

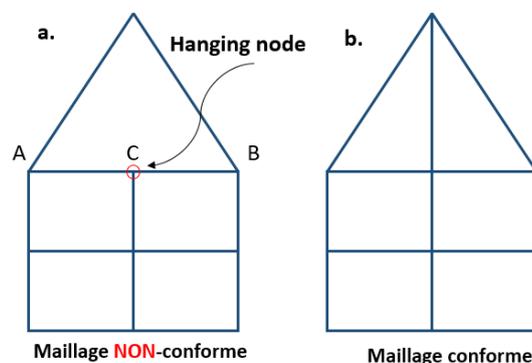


Figure 3 : a. exemple d'un maillage non conforme ; b. exemple d'un maillage conforme

Ces « hanging nodes » sont soit supprimés, en les connectant à un autre sommet et en créant ainsi deux nouveaux éléments [12], soit traités en imposant des relations sur le « hanging node », appelées relations de conformité en imposant une continuité de déplacement (par exemple dans le cas présenté dans la figure $U_c = 0.5 (U_A + U_B)$) [13]. La deuxième option est choisie dans la contribution. Ces relations sont imposées via des multiplicateurs de Lagrange [14] au même titre que les conditions aux limites de Dirichlet. Cette étape de raffinement est effectuée à chaque évolution du DI.

Comme déjà mentionné, la condensation n'est exacte que si la partie condensée a un comportement élastique. Pour garder la précision de la méthode, l'élasticité du domaine élastique est vérifiée lors du calcul. Cela se fait à l'aide d'une procédure de vérification à deux critères : un critère de propagation et un critère d'amorçage. Le premier évalue la propagation potentielle de l'endommagement du DI existant vers les zones condensées voisines. Il détecte si l'endommagement approche de la frontière du DI. Des bandes de propagation sont définies sur une largeur L autour du bord du DI. Si

l'endommagement atteint cette bande, la zone voisine est ajoutée au DI. Ce critère permet de s'assurer que l'interface entre le DI et le domaine élastique reste élastique au cours du calcul. Comme ce test est géométrique et que les champs des résultats existent dans ces bandes, le coût de calcul associé n'est pas élevé. Ce critère est donc vérifié à la fin de chaque pas de chargement. Le second est le critère d'amorçage qui évalue l'apparition potentielle d'un endommagement sur chacune des zones condensées. Elle suppose de vérifier l'élasticité des zones condensées. Pour ce faire, une double « décondensation » est effectuée pour obtenir les valeurs des déplacements sur la structure globale et ensuite tester si la limite élastique est dépassée dans un DE. Dans ce cas, cette zone doit être incluse dans le nouveau DI. En raison du coût de la double « décondensation », ce critère n'est vérifié qu'après chaque p pas de chargement (p paramètre, fixé ici à 8 suite à une analyse de sensibilité).

Dans le cas de l'évolution du DI, une procédure de reconstruction du domaine est utilisée dans laquelle seule la deuxième condensation est réalisée. Cela montre l'avantage de la double condensation car une recondensation de l'ensemble de la structure n'est pas nécessaire. Il est à noter que dans les deux cas (propagation ou amorçage), si le DI est modifié, des pas de chargement doivent être recalculés pour assurer la représentativité de la simulation. Dans ce cas, des champs doivent être projetés sur le maillage raffiné des zones nouvellement ajoutées au DI. Cette étape est considérée « exacte » car le comportement de ces zones nouvellement raffinées sont élastiques au pas recalculé. Ne sont donc projetées que des quantités élastiques (endommagement nul notamment).

3. Application : poutre entaillée en flexion

Pour tester l'applicabilité de la méthode, la méthode ASC a été appliquée avec le raffinement du maillage sur l'exemple d'une poutre entaillée en flexion. On note que dans [2], la méthode ASC a été validée sur l'exemple d'une poutre entaillée et sur une enceinte de confinement simplifiée et des résultats similaires à un calcul complet (sans condensation) ont été obtenus.

La poutre mesure 160 cm de long, 40 cm de haut et 20 cm d'épaisseur. Elle est entaillée à mi-portée. L'entaille mesure 80 mm de haut et 8 mm de large. La poutre est modélisée en deux dimensions (contraintes planes). Le maillage initial (grossier) est composé de 610 éléments quadrilatéraux de 4 cm de longueur (Figure 4.a). Le béton est modélisé à l'aide du modèle d'endommagement de Mazars avec les mêmes paramètres que dans [15]. Les paramètres utilisés donnent une résistance à la compression de 41,4 MPa et une résistance à la traction de 3,03 MPa. La charge est appliquée sur une zone de 8 cm en haut de la poutre, par un déplacement vertical imposé vers le bas augmentant de 0 jusqu'à 20 mm. Le déplacement vertical est bloqué aux points d'appui et le déplacement horizontal est bloqué au point milieu supérieur. Pour l'application de la condensation, la structure est partitionnée en 35 zones en utilisant la procédure de partitionnement automatique développée (Figure 4.b). Pour le raffinement, le DI sera raffiné jusqu'à atteindre une densité finale de 1cm. Cette finesse permet d'appliquer une méthode intégrale non locale [17] pour traiter la dépendance au maillage de l'endommagement dans le béton avec une longueur caractéristique $L_c = 3$ cm.

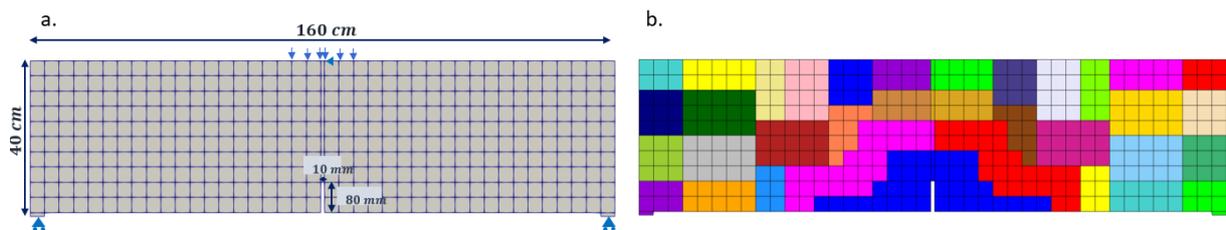


Figure 4: a. maillage de la poutre, b. partitionnement du maillage en 35 zones

Les résultats de calcul utilisant la méthode ASC avec l'approche de raffinement du DI sont présentés sur la Figure 5. Cette figure montre l'évolution du DI (en bleu sur la figure) et de l'endommagement au cours du temps. L'endommagement apparaît autour de l'entaille, puis se propage et s'amorce au niveau des zones d'appui. Ces profils montrent bien que seule la partie endommagée (non linéaire) est raffinée.

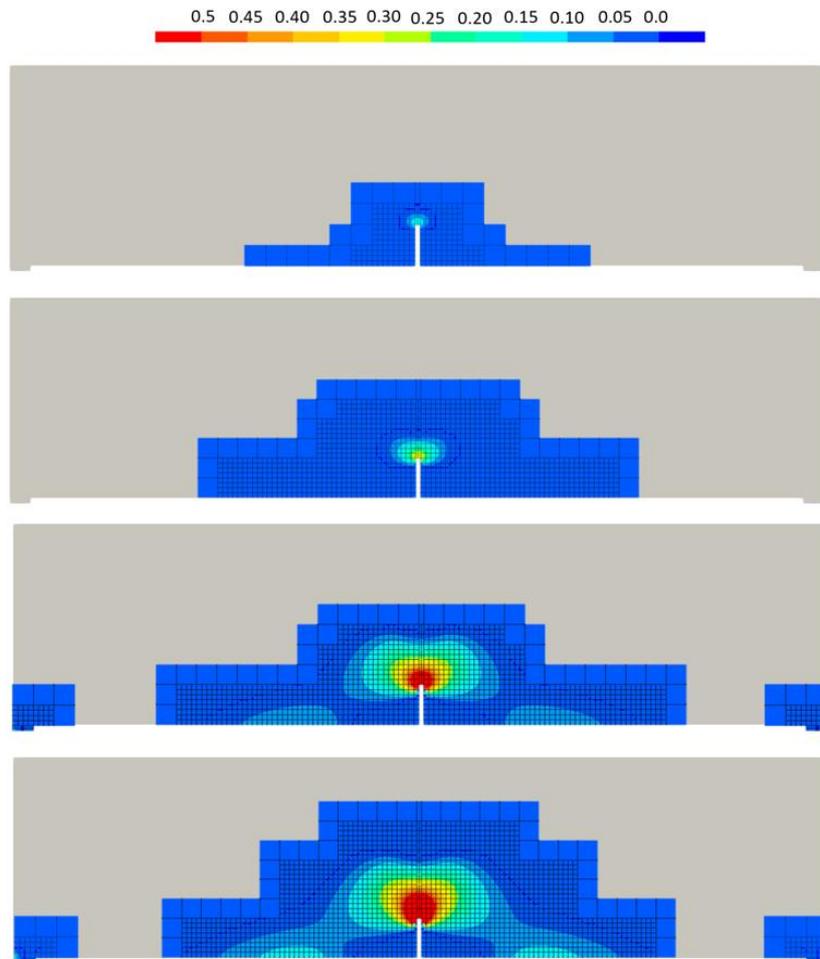


Figure 5 : évolution de l'endommagement et du DI au cours du calcul

Pour comparer les résultats avec un calcul de référence afin de voir l'effet du raffinement du maillage sur la représentativité du calcul, un calcul complet (sans condensation) sur la même poutre, à partir d'un maillage initial fin sur l'ensemble de la structure (1cm de taille d'élément), a été effectué. Des résultats similaires au calcul condensé sont obtenus, quel que soit le pas de chargement. La Figure 6 présente la répartition de l'endommagement à la fin du calcul en utilisant la méthode ASC et ce même profil résultant du calcul complet. Ces deux profils sont similaires dans le DI.

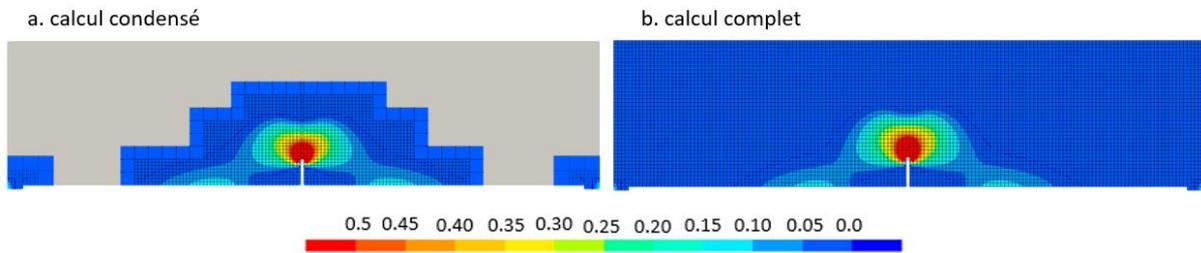


Figure 6: a. profil d'endommagement à la fin du calcul en utilisant la méthode ASC ; b. profil d'endommagement à la fin du calcul résultant du calcul complet

Enfin, pour tester l'efficacité en termes de performances de calcul, un troisième calcul est effectué avec la méthode ASC mais en considérant un maillage fin (1cm) sur l'ensemble de la structure. On note que les trois calculs ont été effectués sur le même nœud de calcul (32 cœurs). Les résultats en termes de temps de calcul sont présentés dans la Table 1.

Table 1 : résultats d'efficacité numérique

	Calcul Complet	Calcul avec ASC (1cm)	Calcul avec ASC (4 cm – 1cm)
Temps	549,57	87,52	57,70
Facteur de gain	1	6,2	9,6

Ce tableau montre qu'un gain de temps de 9,6 par rapport au calcul complet est obtenu en intégrant l'approche de raffinement de maillage contre 6,2 sans raffinement automatique.

4. Conclusion et perspectives

La méthode de condensation statique adaptative (ASC) consiste à réduire la taille du système sur les seules parties endommagées de la structure en condensant la partie élastique. Elle consiste également à tester l'élasticité des zones condensées lors du calcul pour permettre la promotion des zones condensées en zones d'intérêt si nécessaire. Cette méthode initialement proposée dans [2] a été développée et est devenue totalement automatique. Son champ d'application a également été étendu (en particulier sur la précontrainte).

Afin d'améliorer la représentativité du calcul avec la méthode ASC, le principe de raffinement automatique du maillage de la DI a été intégré. Cette approche a été appliquée à un exemple d'une poutre entaillée en 2D. Des résultats similaires à un calcul fin sur la totalité de la structure ont été obtenus et ce principe de raffinement a apporté un gain de temps d'un facteur 9 au lieu de 6 par rapport au calcul complet, pour la méthode ASC.

Dans un futur proche, des applications à des structures plus complexes et représentatives devraient permettre d'évaluer pleinement l'efficacité des développements proposés.

Remerciements

Les auteurs remercient le soutien financier partiel d'EDF R&D pour le développement et l'analyse des résultats de simulation.

Références

- [1] R. J. Guyan, "Reduction of stiffness and mass matrices", AIAA J.3, 1965..
- [2] A. Llau, L. Jason, F. Dufour, and J. Baroth, "Adaptive zooming method for the analysis of large structures with localized nonlinearities," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 106, pp. 73–84, 2015.
- [3] M. J. Berger and J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations," *J. Computational Physics*, vol. 53, no. 3, pp. 484–512, 1984.
- [4] M. J. BERGER, "Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics," *J. Computational Physics*, vol. 82, p. 184, 1989.
- [5] I. Babuska , A . Craig , J . Mandel and J . Pitkaranta. "Efficient Preconditioning for the p-Version Finite Element Method in Two Dimensions", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, no. 3, pp. 624–661, 1991.
- [6] R. Craig *et al.*, "Coupling of Substructures for Dynamic Analyses To cite this version : HAL Id : hal-01537654 Coupling of Substructures for Dynamic Analyses," vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319, 2017.
- [7] G. Gibert, "Propagation de fissures en fatigue par une approche X-FEM avec raffinement automatique de maillage", Thesis. Université de Lyon, 2019.
- [8] A. K. Noor, "Parallel processing in finite element structural analysis," *Eng. Comput.*, vol. 3, no. 4, pp. 225–241, 1988.
- [9] A. Mezher, L. Jason, G. Folzan, and L. Davenne, "New adaptative static condensation method for the simulation of large dimensions prestressed reinforced concrete structures", XVI International Conference on Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Sep 2021, Barcelona, Spain.
- [10] K. Carlberg, "Adaptive h-refinement for reduced-order models", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 102, pp. 1102–1119, 2015.
- [11] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bazant, "Nonlocal damage theory", *J. Engineering Mechanics*, vol. 113 (10), pp. 1512-1533, 1987.
- [12] G. Nicolas, T. Fouqueut, "EDF-Logiciel HOMARD", 2014.
- [13] R. Bank, A. H. Sherman, and A. Weiser, "Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement", *Scientific Computing*, vol. 1, no. 48, pp. 3–17, 1983.
- [14] P. Verpeaux and T. Charras, "Multiplicateur de Lagrange, Condensation Statique et Conditions Unilatérales", CSMA conference, 2011.
- [15] A. Llau, "Méthodes de simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint Condensation adaptative en contexte aléatoire et représentation des hétérogénéités", Thesis, Université Grenoble Alpes, 2016.