

Une approche multi-échelle d'une méthode de décomposition de domaine mixte pour la simulation magnétostatique 3D

A. Ruda¹, F. Louf¹, P-A. Boucard¹, X. Mininger²

¹ Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT, France, {aurelia.ruda, francois.louf, pierre-alain.boucard}@ens-paris-saclay.fr

² Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS, Laboratoire de Génie Électrique et Électronique de Paris, France.

Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire de Génie Électrique et Électronique de Paris, France, xavier.mininger@geeps.centralesupelec.fr

Résumé — Pour répondre aux besoins numériques d'optimisation de machines tournantes, nous proposons d'adapter la méthode LATIN avec sous-structuration à la résolution des équations de la magnétostatique en conservant les aspects mixte et multi-échelle de la méthode. Une première implémentation 2D est illustrée par l'étude d'une machine à réluctance variable simplifiée avant d'aborder l'extension au 3D qui nécessite une formulation basée sur les éléments de Whitney.

Mots clés — Méthode LATIN, Décomposition de domaine, Magnétostatique.

1 Introduction

Le contexte sociétal et écologique actuel impose de réduire les émissions de CO₂, ce qui pousse les industriels à privilégier l'actionnement électrique. Cette évolution intervient dans le secteur automobile mais aussi aéronautique, impliquant la nécessité de concevoir des machines tournantes plus performantes et plus compactes comparativement aux machines jusqu'alors connues. Le besoin de réaliser des démarches d'optimisation de machines tournantes est ainsi aujourd'hui plus que jamais présent. Cependant, ces démarches sont très coûteuses en terme de temps de calcul. Une simulation d'une machine tournante doit s'effectuer en 3D pour prendre en compte les effets de bords ou pour estimer des flux axiaux, en considérant un comportement non-linéaire (les machines fonctionnent généralement en régime saturé) et doit être réalisée pour de nombreuses positions du rotor. La démarche d'optimisation se fait ensuite avec de nombreux paramètres (géométriques et choix d'une alimentation adaptée) et sur différents critères (couple moyen, oscillation de couple, masse, quantité d'aimants, pertes...). De plus, ces optimisations sont souvent faites avec des méthodes non déterministes ce qui implique de très nombreux calculs du comportement magnétostatique.

L'objectif de nos travaux est alors de proposer une méthode innovante réduisant le coût des simulations numériques du calcul magnétostatique, brique élémentaire de la démarche d'optimisation. Les méthodes de décomposition de domaine sont depuis quelques années utilisées en magnétostatique pour accélérer les résolutions. Ces méthodes se basent en particulier sur les approches primale et duale [1] [2]. Nous choisissons de mettre en place une stratégie de décomposition de domaine mixte basée sur la méthode LATIN [3]. Cette méthode a la particularité d'être non-incrémentale ce qui permettra à terme de mettre en place des techniques de séparation temps/espace adaptées aux méthodes de réduction de modèle, et d'augmenter considérablement les performances numériques [4]. Elle a également l'avantage de traiter séparément les sous-domaines et les interfaces ce qui favorise le traitement de comportement complexes aux interfaces notamment.

Nous présenterons la formulation de la méthode LATIN appliquée au cadre magnétostatique et son approche multi-échelle. Une illustration des performances sera montrée par l'étude d'une machine tournante. Finalement, la mise en place de la méthode sera étendue aux études 3D par l'implémentation des éléments de Whitney.

2 La méthode LATIN DDM pour la simulation magnéto-statique

2.1 Mise en équation d'un problème de magnéto-statique

Nous nous plaçons dans le cadre de l'étude de machines tournantes décrites par les équations de la magnéto-statique. Nous considérons un domaine Ω comportant des milieux de perméabilités magnétiques μ potentiellement différentes, voir Figure 1. Il est important de considérer l'air dans le domaine d'étude, les lignes de champ magnétique s'y propageant. Dans cette première approche, les perméabilités seront considérées isotropes et sans hystérésis par domaines. Les conducteurs des machines tournantes seront modélisés par des densités de courants sources \underline{j} . Les quantités recherchées dans l'étude d'un problème de magnéto-statique sont l'induction magnétique \underline{B} et le champ magnétique \underline{H} . Ces champs vérifient les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson. Dans un cas stationnaire elles sont découplées de

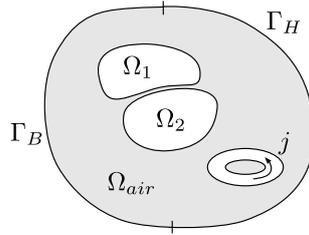


FIGURE 1 – Définition d'un problème générique de magnéto-statique

tous phénomènes électriques. De plus, les champs \underline{B} et \underline{H} sont reliés par une relation de comportement qui peut être non linéaire. Elle permet de décrire la saturation de l'induction magnétique \underline{B} lorsque la sollicitation \underline{H} devient forte. Le problème à résoudre s'écrit en tous points du domaine :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\underline{H}) = \underline{j} \\ \underline{B} = \mu(\underline{H}) \underline{H} \end{cases} \quad (1)$$

La formulation du problème de magnéto-statique en termes de \underline{B} et \underline{H} convient et peut être résolue, mais elle n'est pas idéale. Imposer que la divergence du champ \underline{B} soit nulle peut engendrer des difficultés de résolution. Cette condition suppose une certaine régularité du champ que nous retrouvons pas aux interfaces (composante tangentielle de \underline{B} discontinue). Une des solutions est d'effectuer un changement de variable pour travailler avec un potentiel vecteur \underline{A} . Selon [5], comme le champ \underline{B} est à divergence nulle (Eq. (1)), il est possible d'introduire un potentiel vecteur magnétique \underline{A} tel que :

$$\underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{A}) \quad (2)$$

Le potentiel \underline{A} n'est pas unique, il peut être défini à un gradient \underline{A}_0 près telle que $\underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{A} + \underline{A}_0)$, sans que le calcul de \underline{B} ne soit impacté. Dans l'optique d'une résolution numérique du problème, une solution définie à une constante près ne peut pas convenir. Il est courant d'imposer une jauge (par exemple la jauge de Coulomb telle que $\operatorname{div}(\underline{A}) = 0$) pour garantir l'unicité de la solution.

Dans le cas d'une résolution 2D cette condition est toujours vérifiée, aucun traitement particulier n'est alors nécessaire. De plus, dans un plan (x, y) , le champ du potentiel vecteur se réduit à sa seule composante normale au plan d'étude A_z et donc à la recherche d'un scalaire solution de l'équation :

$$\Delta A_z = -\mu j_z \quad (3)$$

A partir de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie magnétique (exprimée Eq. (4) avec un comportement linéaire) une discrétisation par éléments finis 2D donne le problème à résoudre sous la forme classique $[K] \{A\} = \{J\}$.

$$\Pi^A(\underline{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{rot}(\underline{A}) \cdot \operatorname{rot}(\underline{A}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{A} \cdot \underline{j} \, d\Omega \quad (4)$$

2.2 Principes de la méthode LATIN

Nous nous intéressons à l'implémentation de la méthode de décomposition de domaine mixte LATIN [3], une méthode de résolution itérative développée et exploitée dans le domaine de la mécanique. Le domaine d'étude Ω est décomposé en n sous-domaines Ω_E . Entre deux sous-domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$ on introduit une interface $\Gamma_{EE'}$.

Contrairement aux approches primales et duales qui n'imposent au cours des itérations que la continuité respectivement du champ primal ou dual, la méthode proposée a la particularité d'être mixte aux interfaces. A chaque itération, la continuité à la fois du champ primal et dual est respectée. Sur les interfaces, nous notons $\{W\}$ la restriction de la composante tangentielle du potentiel vecteur $\{A\}$ et $\{T\}$ la composante tangentielle du champ magnétique $\{H\}$. Ces champs sont construits à l'aide d'un opérateur trace $[t]$.

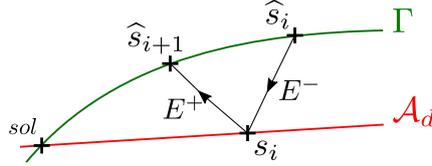


FIGURE 2 – Schéma itératif de l'algorithme LATIN

Le premier principe de la méthode LATIN repose sur la séparation des équations en deux groupes. Il y a le groupe \mathcal{A}_d des équations linéaires et éventuellement globales :

$$\mathcal{A}_d : s = (\{W\}, \{T\}) \text{ solution de } \begin{cases} [K]\{A\} = \{J\} + [t]^T \{T\} \\ \{W\} = [t]\{A\} \end{cases} \quad (5)$$

Nous pouvons remarquer l'apparition d'un nouveau terme $[t]^T \{T\}$ dans le problème à résoudre. Ce terme représente les conditions limites provenant des sous-domaines adjacents au sous-domaine considéré.

Le second groupe Γ rassemble les équations locales et éventuellement non linéaires. Nous notons \hat{s} la solution recherchée pour la différentiel de la précédente. Dans notre cas d'étude, ces équations consistent à imposer la continuité des champs à l'interface. Les opérateurs $[O_s]$ et $[O_d]$ sont introduits pour réaliser les opérations de somme et différence entre les champs de part et d'autre des interfaces, donnant les équations :

$$\Gamma : \hat{s} = (\{\hat{W}\}, \{\hat{T}\}) \text{ solution de } \begin{cases} [O_d]\{\hat{W}\} = \{0\} \\ [O_s]\{\hat{T}\} = \{0\} \end{cases} \quad (6)$$

A ce découpage est associée une résolution itérative en deux étapes, représentée en Figure 2. Des solutions partielles $s_i \in \mathcal{A}_d$ et $\hat{s}_i \in \Gamma$ sont déterminées successivement lors de l'étape linéaire et de l'étape locale respectivement, en respectant les directions de recherche E^+ et E^- définies telles que :

$$\begin{aligned} E^+ & : \{\hat{T}\} - \{T\} - [k^+] \left(\{\hat{W}\} - \{W\} \right) = \{0\} \\ E^- & : \{T\} - \{\hat{T}\} + [k^-] \left(\{W\} - \{\hat{W}\} \right) = \{0\} \end{aligned} \quad (7)$$

Ces équations ajoutent une relation linéaire entre deux solutions partielles successives. Elles sont caractérisées par des opérateurs de direction de recherche $[k^+]$ et $[k^-]$. Une condition de convergence consiste à choisir $[k^+] = [k^-] = k \mathbb{I}$ [3]. De plus, la convergence est garantie par l'introduction d'une étape de relaxation telle que la solution de l'étape linéaire $n + 1$ devienne :

$$s_{n+1} = \alpha s_{n+1} + (1 - \alpha) s_n \quad (8)$$

en prenant $\alpha = 0.5$. En pratique, il est possible de choisir $\alpha = 0.8$ pour améliorer la vitesse de convergence.

La solution du problème complet correspond à l'intersection des deux espaces, toutes les équations y étant vérifiées. Nous introduisons un indicateur de convergence représentant la distance entre deux solutions successives qui servira à définir le critère d'arrêt de l'algorithme.

Finalement, le dernier principe de la méthode LATIN conseille l'utilisation de méthodes de réduction de modèle lors de la résolution de l'étape linéaire. Cet aspect est intéressant en particulier pour des problèmes d'évolution ou non linéaires, il n'a pas encore été développé durant ces premiers travaux.

2.3 Approche multi-échelle

Les méthodes de décomposition de domaine dites mono-échelle possèdent une limitation classique : leur vitesse de convergence dépend du nombre de sous-domaines définis, elles ne sont pas extensibles. Nous considérons alors une approche multi-échelle de résolution [6]. Cette approche consiste à ajouter lors de l'étape linéaire une condition d'équilibre macroscopique des quantités duales sur toutes les interfaces $[O_s]\{T\}$. Cet équilibre se traduit par une condition de nullité du travail. Nous notons \mathbb{W} la base primale macroscopique définie sur les interfaces par rapport à laquelle le champ dual est équilibré :

$$\mathbb{W}^T [O_s]\{T\} = \{0\} \quad (9)$$

Cette nouvelle relation est prise en compte dans l'algorithme de résolution en modifiant la direction de recherche E^- . Une correction macroscopique répartie sur chaque interface est introduite, avec $\{\alpha\}$ les coordonnées de la correction dans la base macroscopique :

$$\{T\} - \{\hat{T}\} + [k^-] \left(\{W\} - \{\hat{W}\} + [O_s]^T \mathbb{W} \{\alpha\} \right) = \{0\} \quad (10)$$

L'implémentation de cette approche est réalisée en se basant sur le formalisme par blocs proposé dans [7]. Il n'est alors pas nécessaire de définir a priori de base macroscopique duale. Concernant le champ primal \underline{A} , des modes macroscopiques constant et linéaire seront pris pour la suite. Ce choix est suffisant pour une première approche, il n'est pas nécessaire de choisir des modes de plus haut degrés en général [8].

3 Résultats numériques

3.1 Illustration sur l'étude d'un barreau ferromagnétique

La méthode de résolution est dans un premier temps mise en place pour l'étude d'un cas simple. La Figure 3a décrit le problème étudié. Nous considérons un barreau de fer 2D de perméabilité magnétique $\mu_{fer} = 10000\mu_0$ et des conditions aux limites de Dirichlet telles que $A_1 = 1Wb/m$ et $A_2 = 2Wb/m$. La Figure 3b donne le champs A obtenu à convergence de l'algorithme pour un critère d'arrêt à 1.10^{-4} .

Les Figures 3c et 3d montrent le champ obtenu à la quatrième itération de l'algorithme pour une approche mono-échelle et multi-échelle respectivement, pour un barreau décomposé en 10 sous-domaines. Nous vérifions alors que l'approche multi-échelle permet de transmettre l'information entre les sous-domaines plus rapidement. A cette itération avec l'approche mono-échelle, un sous-domaine au milieu est toujours nul. Avec l'approche multi-échelle nous nous rapprochons déjà de la solution finale.

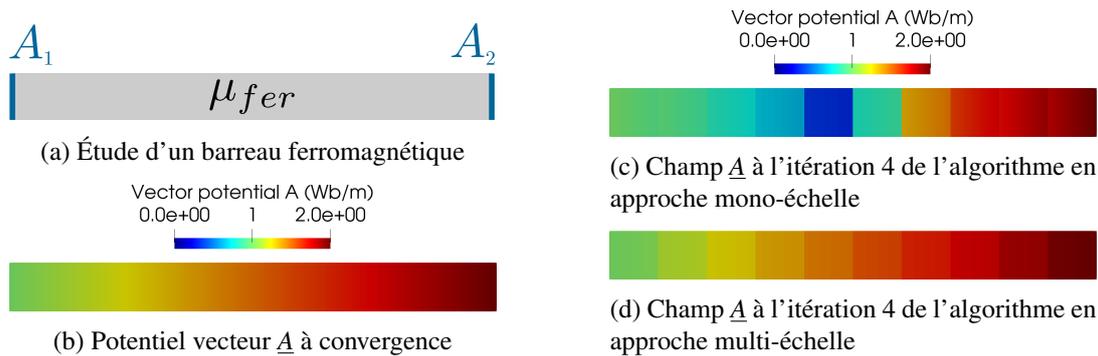


FIGURE 3 – Définition du problème étudié et impact de l'approche de résolution choisie

Finalement, la Figure 4 montre l'impact de l'approche multi-échelle sur la dépendance de la convergence au nombre de sous-domaines en étudiant le barreau ferromagnétique décomposé en 10, 15 ou 20 sous-domaines. La dépendance au nombre de sous-domaines n'est plus présente avec l'ajout de l'approche multi-échelle.

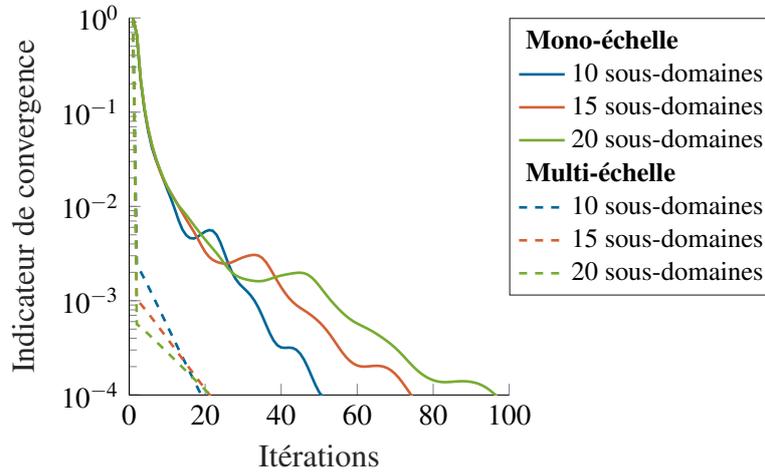


FIGURE 4 – Évolution de la convergence de l’algorithme LATIN selon le nombre de sous-domaines et l’approche choisie

3.2 Étude d’une machine à réluctance variable simplifiée

Pour illustrer la mise en application de la méthode proposée, nous étudions une machine à réluctance variable à double saillance (MRVDS) décomposée en 15 sous-domaines (Figure 5a). Cette machine comprend un circuit ferromagnétique autour duquel s’enroule une bobine de $n = 100$ spires parcourues par un courant $I = 7A$. Nous prenons pour l’air et la bobine une perméabilité égale à la perméabilité du vide ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$). L’alliage Fe-Si étant couramment utilisé pour les machines tournantes, nous choisissons un comportement similaire pour les parties ferromagnétiques. Cette étude étant pour le moment réalisée dans le cadre linéaire, nous ne considérons que la partie linéaire du comportement soit $\mu = 10000\mu_0$. Enfin, sur le bord extérieur du domaine de l’air, le potentiel vecteur \underline{A} est imposé nul (condition de Dirichlet).

Les Figures 5b et 5c donnent les isovaleurs du potentiel vecteur \underline{A} obtenues pour deux positions θ du rotor ($\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$). Les solutions pour différentes positions du rotor sont recherchées à l’aide de la méthode de l’interface glissante [9] : une interface entourant le rotor est définie et des conditions de connexion y sont imposées. De cette manière, la rotation est traitée comme un comportement d’interface à l’étape locale de l’algorithme. Aucun remaillage n’est nécessaire.

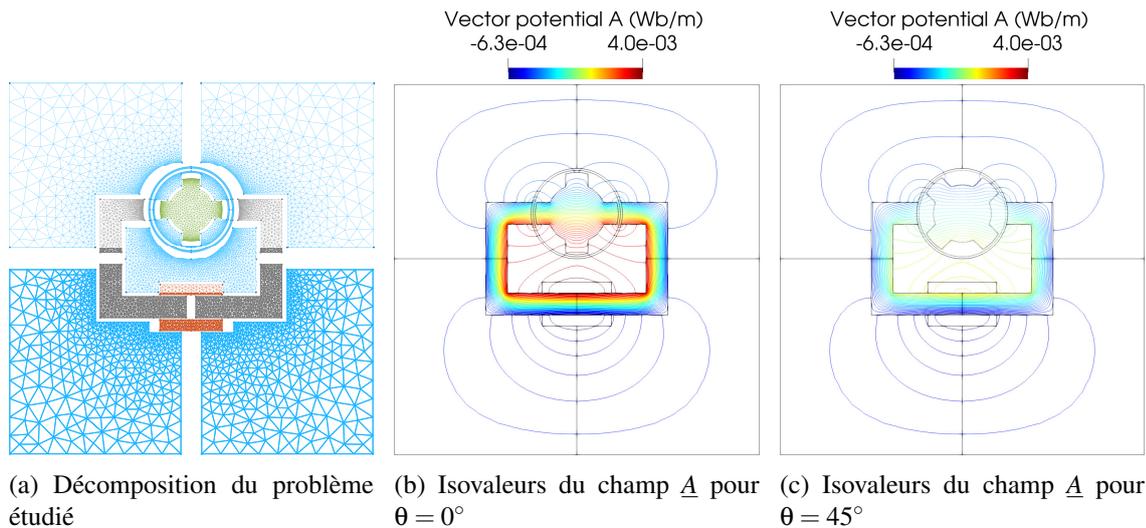
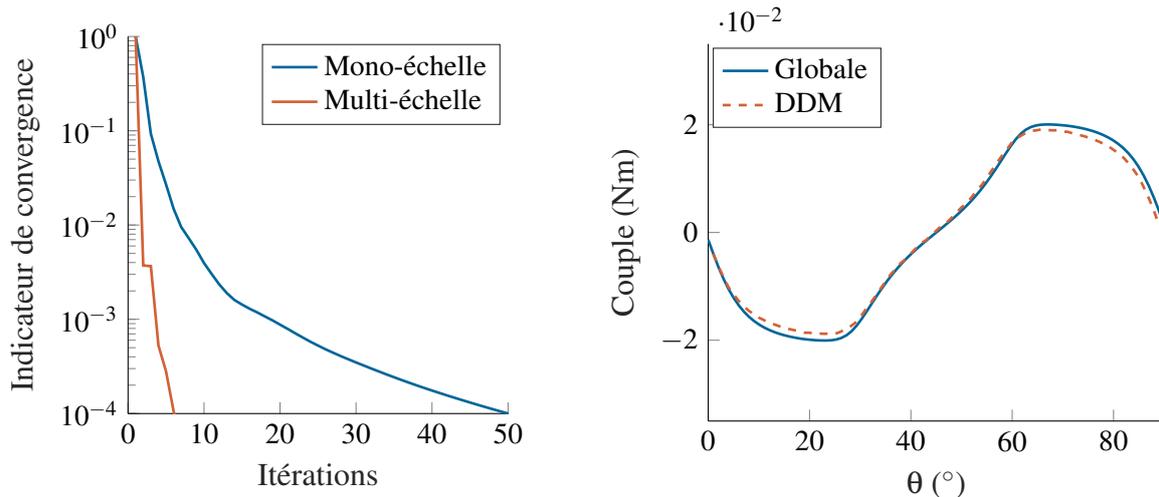


FIGURE 5 – Étude d’une machine à réluctance variable

Comme précédemment, nous pouvons noter sur la Figure 6a l’impact bénéfique de l’approche multi-échelle sur la vitesse de convergence de l’algorithme. L’étude d’une machine tournante repose sur l’étude d’une de ses performances telle que son couple. Nous obtenons l’évolution du couple de la machine

tracé Figure 6b. Nous pouvons la comparer à une évolution déterminée par une résolution globale, ce qui permet de valider l'application de la méthode.



(a) Évolution de la convergence de l'algorithme LATIN selon l'approche choisie (b) Évolution du couple sur un quart de tour pour une résolution globale et DDM

FIGURE 6 – Résultats numériques obtenus

4 Extension 3D : introduction des éléments de Whitney

La discrétisation d'un problème de magnétostatique avec des éléments finis de Lagrange peut être satisfaisante pour une résolution 2D (qui se trouve être une résolution scalaire) mais il a été mis en évidence que cette façon de discrétiser l'espace ne permet pas de respecter la physique en jeu pour des problèmes 3D. En effet, cela impose la continuité des composantes normale et tangentielle de A lorsque seulement la dernière est voulue. Pour résoudre ces difficultés, les éléments de Whitney seront

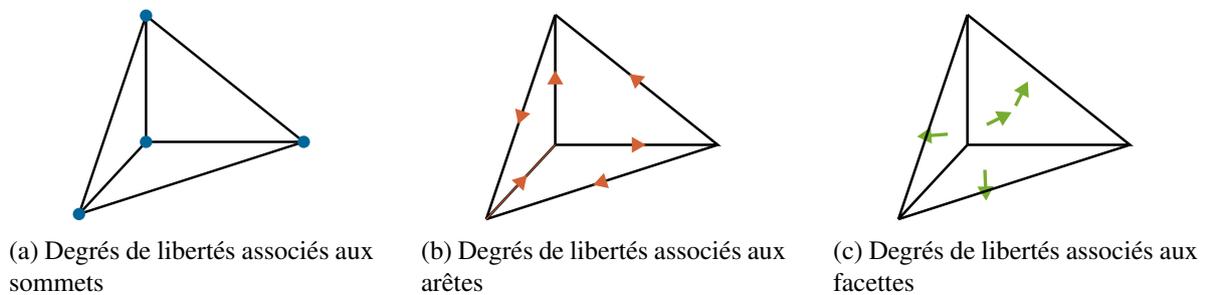


FIGURE 7 – Discrétisation d'un élément de Whitney

introduits. La construction de ces éléments repose sur l'utilisation des formes différentielles (p -formes, $p = 0, 1, 2, 3$) qui donnent un sens physique aux circulations le long d'arêtes et aux flux à travers des surfaces de ces objets [10]. Nous montrons sur la Figure 7 les différents degrés de liberté introduits sur un élément de Whitney tétraédrique permettant de représenter chaque p -forme. La Table 1 donne la correspondance entre les p -formes, leurs champs associés et leurs degrés de liberté associés sur un élément de Whitney. Les fonctions d'interpolations des p -formes sont vectorielles, de cette manière

| | | | | | | |
|---------|-------------------|---------|-------------------|----------|-------------------|---------|
| | ∇ | | $\nabla \times$ | | $\nabla \cdot$ | |
| 0-forme | \longrightarrow | 1-forme | \longrightarrow | 2-forme | \longrightarrow | 3-forme |
| | | A, H | | B | | |
| Sommets | | Arêtes | | Facettes | | Volume |

TABLE 1 – Correspondance entre les p -formes et les degrés de liberté des éléments de Whitney

les degrés de libertés correspondant sont des scalaires. Par exemple, les fonctions d'interpolation 1-forme sont notées $\underline{N}_{i \rightarrow j}^1$ avec i et j les sommets de départ et d'arrivée de l'arête définissant son sens de parcours :

$$\underline{N}_{i \rightarrow j}^1 = (N_i^0 \nabla N_j^0 - N_j^0 \nabla N_i^0) \quad (11)$$

avec N_i^0 la fonction d'interpolation 0-forme au sommet i valant 1 en i et 0 ailleurs. Par cette définition, la circulation de $\underline{N}_{i \rightarrow j}^1$ vaut 1 le long de l'arête $i \rightarrow j$ et 0 le long des autres arêtes. De plus, la fonction d'interpolation obtenue a par construction une composante tangentielle continue.

Pour des résolutions 3D, nous avons vu que le problème posé en terme de potentiel vecteur n'a pas de solution unique. Il est possible alors d'imposer la jauge de Coulomb telle que $\text{div}(\underline{A}) = 0$ à l'aide d'une méthode de pénalité. Une autre méthode permet d'imposer numériquement l'unicité de la solution : la méthode de l'arbre [10]. Un chemin minimum est construit sur le maillage, c'est-à-dire un chemin qui connecte tous les nœuds du maillage sans former de boucle. Le chemin sera l'arbre (voir Figure 8). Ensuite toutes les fonctions d'interpolation associées aux arêtes de l'arbre sont éliminées et les inconnues sont les circulations sur le co-arbre (soient les arêtes restantes). De cette manière, la dimension du problème est réduite ce qui rend celui-ci inversible.



FIGURE 8 – Construction d'un arbre (en bleu) sur un maillage

5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de décomposition de domaine mixte, la méthode LATIN, adaptée à la résolution de problèmes de magnétostatique. Cette méthode a été implémentée et des premières performances montrées. Une approche multi-échelle permet d'accélérer la convergence en s'affranchissant de la dépendance au nombre de sous-domaines définis. Enfin, les éléments de Whitney sont présentés pour étendre les études à des cas 3D dans les travaux à venir.

Références

- [1] M. Dranca, M. Chirca, S. Breban and M. Fartan. *Design and Optimization of an Axial-Flux Permanent Magnet Synchronous Machine for Railway Traction Application*, 8th International Conference on Modern Power Systems (MPS), 1-5, 2019.
- [2] W. Yao, J. Jin and P. T. Krein. *A Highly Efficient Domain Decomposition Method Applied to 3-D Finite-Element Analysis of Electromechanical and Electric Machine Problems*, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 27, no. 4, 1078-1086, 2012.
- [3] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer, New York, 1999.
- [4] J.-Y. Cognard, P. Ladevèze. *A large time increment approach for cyclic viscoplasticity*, International Journal of Plasticity, 141-157, 1993.
- [5] N. Bianchi. *Electrical machine analysis using FE*, Taylor and Francis, 2005.
- [6] P. Ladevèze, A. Nouy. *On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(28-30), 3061-3087, 2003.
- [7] P. Oumaziz, P. Gosselet, P. A. Boucard, M. Abbas, *A parallel non-invasive multi-scale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, no. 8, 893-912, 2018.
- [8] K. Saavedra, O. Allix, P. Gosselet, J. Hinojosa, A. Viard, *An enhanced nonlinear multi-scale strategy for the simulation of buckling and delamination on 3D composite plates*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 317, 952-969, 2017.
- [9] D. Rodger, H. C. Lai and P. J. Leonard, *Coupled elements for problems involving movement (switched reluctance motor)*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 2, 548-550, 1990.

- [10] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism : Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*, Academic Press, 1998.