

Application de la Proper Generalized Decomposition à un problème magnéto-mécano-électrique

T. Henneron¹, S. Clénet¹

¹ Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia, ULR 2697 - L2EP, F-59000 Lille, France
thomas.henneron@univ-lille.fr, stephane.clenet@ensam.eu

Résumé — La méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) est utilisée pour résoudre un problème multi-physique basé sur un dispositif magnéto-mécano-électrique. Pour étudier le dispositif dans son environnement, une approche offline/online est développée. Dans l'étape offline, un modèle réduit PGD est construit basé sur deux configurations spécifiques au dispositif. Dans l'étape online, le modèle réduit est couplé avec un circuit électrique de charge.

Mots clés — magnéto-électrique, proper generalized decomposition, approche offline/online.

1 Introduction

Pour réduire les temps de calcul des modèles numériques, des approches de réduction de modèle ont été développées et présentées dans la littérature. Parmi ces méthodes, on trouve l'approche PGD qui a été largement utilisée pour étudier des dispositifs mécaniques [1][2]. Le principe de la PGD consiste à exprimer la solution par une somme de produits de fonctions, appelés modes, dépendant de chaque paramètre du problème. Chaque mode est déterminé par une procédure itérative dépendant des modes précédents. Dans le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles dans le domaine fréquentiel, l'approche PGD approxime la solution par une somme de produits de fonctions dépendant de la fréquence et de l'espace. Dans cette communication, nous proposons d'appliquer la méthode PGD pour étudier un dispositif magnéto-mécano-électrique couplé avec un circuit électrique de charge. Pour cela, une approche offline/online est développée. Dans l'étape offline, on cherche un modèle réduit basé sur une approximation PGD de la solution magnétique, électrique et mécanique au problème étudié. Dans l'étape online, le modèle réduit est couplé avec une charge électrique de manière à étudier l'influence des paramètres de la charge sur les quantités d'intérêt.

2 Problème magnéto-électrique

Considérons un domaine D de frontière Γ contenant un capteur 2D composé de matériaux magnétostrictif (MM) et piézoélectrique (PZT) (Fig. 1). Un flux magnétique sinusoïdal Φ est imposé à travers D . Le capteur est fixé en 2 points où le déplacement est imposé à zéro dans les deux directions. Pour des questions de symétries, le potentiel électrique est égal à v_0 sur Γ_{v1} et à $-v_0$ sur Γ_{v2} .

En négligeant les forces extérieures, les courants induits et de déplacement, le système à résoudre est basé sur les équations d'équilibre de la mécanique, de la magnétostatique et de l'électrostatique,

$$\text{div} \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ (a)}, \text{div} \mathbf{D} = 0 \text{ (b)}, \quad (2)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0 \text{ (a)}, \text{div} \mathbf{B} = 0 \text{ (b)}, \quad (3)$$

avec $\mathbf{T}$ le champ de contrainte, $\mathbf{u}$ le déplacement, $\mathbf{D}$ l'induction électrique, $\mathbf{E}$ le champ électrique, $\mathbf{H}$ le champ magnétique, $\mathbf{B}$ l'induction magnétique, ρ la masse volumique et ω la pulsation. Les équations

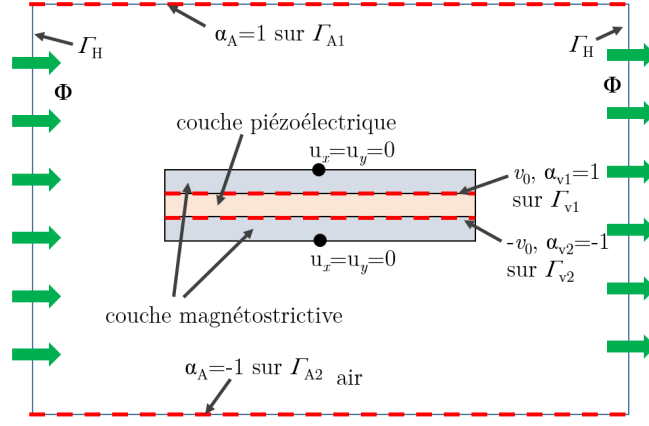


FIGURE 1 – Dispositif étudié

constitutives des matériaux MM et PZT sont

$$\mathbf{T} = c\mathbf{S} - \tau^t \mathbf{E} - h^t \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \tau \mathbf{S}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} - h \mathbf{S}, \quad (6)$$

avec $\mathbf{S}$ la déformation, c le tenseur de rigidité, τ les coefficients PZT, ε la permittivité électrique, ν la réductivité magnétique et h les coefficients MM. Pour résoudre le problème, une formulation en potentiels est introduite. Par (2-a) et (3-b) et en considérant de très petites déformations, on peut écrire

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} v - v_0(\mathbf{grad} \alpha_{v1} + \mathbf{grad} \alpha_{v2}), \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{grad}_r A - \Phi \mathbf{grad}_r \alpha_A, \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{gradu} + \mathbf{grad}^t \mathbf{u}) \quad (9)$$

avec v le potentiel électrique défini sur $D - \Gamma - \Gamma_{v1} - \Gamma_{v2}$, v_0 (resp. $-v_0$) le potentiel électrique sur Γ_{v1} (resp. Γ_{v2}), α_{v1} et α_{v2} des fonctions scalaires égales à 1 et à -1 sur Γ_{v1} et sur Γ_{v2} respectivement et 0 ailleurs, A le potentiel magnétique à valeur nulle sur $D - \Gamma_{A1}$ et Γ_{A2} et α_A une fonction scalaire égale à 1 sur Γ_{A1} , -1 sur Γ_{A2} et 0 ailleurs. On note de plus $\mathbf{grad}_r X$ l'opérateur conduisant au vecteur $(\partial_y X_z, -\partial_x X_z)^t$. Ainsi, nous cherchons v , A and $\mathbf{u}$ dans le domaine spatial D et sur un intervalle de pulsations $[\omega_{min} : \omega_{max}]$.

3 Proper Generalized Decomposition

La méthode PGD consiste à approcher les solutions par une somme de fonctions séparables en pulsation et en espace. Ainsi, v , A and $\mathbf{u}$ sont approchés par,

$$v_M = \sum_{j=1}^M R_j^v(\mathbf{x}) S_j^v(\omega), A_M = \sum_{j=1}^M R_j^A(\mathbf{x}) S_j^A(\omega) \text{ et } \mathbf{u}_M = \sum_{j=1}^M \mathbf{R}_j^u(\mathbf{x}) S_j^u(\omega) \quad (10)$$

avec $\mathbf{x} \in D$, $\omega \in [\omega_{min} : \omega_{max}]$ et M le nombre de modes. Pour appliquer l'approche PGD, nous considérons une formulation faible sur $D \times [\omega_{min} : \omega_{max}]$ de (1), (2-b) et (3-a). En supposant que la charge

électrique Q est imposée sur Γ_{v1} et sur Γ_{v2} , nous obtenons

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_D \mathbf{u}' \cdot (\text{div} \mathbf{T}_M + \rho \omega^2 \mathbf{u}_M) dD d\omega = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_D v' \cdot \text{div} \mathbf{D}_M dD d\omega = 0, \quad (12)$$

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_D \mathbf{A}' \cdot \text{rot} \mathbf{H}_M dD d\omega = 0, \quad (13)$$

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_D \alpha_{v1} \cdot \text{div} \mathbf{D}_M dD d\omega = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} Q dD, \quad (14)$$

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_D \alpha_{v2} \cdot \text{div} \mathbf{D}_M dD d\omega = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} Q dD \quad (15)$$

avec $\mathbf{u}'$, v' et $\mathbf{A}'$ des fonctions tests définies dans les mêmes espaces que $\mathbf{u}_M$, v_M et $\mathbf{A}_M$ respectivement. Pour définir les fonctions R_j^l et S_j^l pour $j \in [1 : M]$ et $l = v, A, u$ et v_0 , une approche par enrichissement est utilisée. A l'itération n , v_n , A_n et $\mathbf{u}_n$ sont exprimés en fonction de R_n^l et S_n^l et des précédentes approximations v_{n-1} , A_{n-1} et $\mathbf{u}_{n-1}$ tel que $v_n = R_n^v(\mathbf{x})S_n^v(\omega) + v_{n-1}$, $A_n = R_n^A(\mathbf{x})S_n^A(\omega) + A_{n-1}$ et $\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_n^u(\mathbf{x})S_n^u(\omega) + \mathbf{u}_{n-1}$. Ainsi, pour calculer les fonctions inconnues R_n^l , S_n^l et la tension v_0 qui est une inconnue du problème lorsque on impose la charge Q , deux systèmes d'équations déduits de (11-15) sont résolus de manière itérative. Dans une première étape, nous supposons que les fonctions S_n^l avec $l = v, A, u$ et v_0 sont connues de manière à définir les fonctions R_n^l . Dans une deuxième étape, les fonctions S_n^l et v_0 sont recalculées en supposant que les fonctions R_n^l sont connues. Les deux étapes sont répétées jusqu'à convergence de toutes les fonctions R_n^l , S_n^l et v_0 avec $l = v, A, u$. Le nombre de modes M utilisé pour approcher les solutions n'est pas connu a-priori par l'utilisateur. Ainsi, un critère est défini pour stopper le processus d'enrichissement. Par exemple, ce critère peut être basé sur la norme du mode n par rapport à la norme du premier mode ou sur une quantité d'intérêt. La convergence du processus d'enrichissement peut être améliorée en introduisant une étape de mise à jour de l'ensemble des fonctions dépendant de la pulsation S_j^l pour $j \in [1 : n]$ avec $l = v, A, u$ et v_0 après chaque calcul d'un mode.

4 Application

En terme d'application, on considère le dispositif présenté en Fig. 1 et détaillé dans [3]. Le maillage 2D est composé de 3283 nœuds et de 6525 triangles. L'intervalle de fréquence est fixé à $[10^4; 10^5] Hz$ avec 401 valeurs équiréparties. Le but est d'étudier le capteur couplé avec un charge électrique quand un flux magnétique Φ est imposé. Les quantités d'intérêt sont la tension U entre les deux électrodes (Γ_{v1} et Γ_{v2}) telle que $U = 2v_0$ et la déformation maximale selon x et y . Ainsi, une approche offline/online est développée. Dans l'étape offline, un modèle réduit du dispositif sans charge est construit. Dans l'étape online, le modèle réduit est combiné avec un circuit électrique de charge de manière à étudier l'influence des paramètres de la charge sur les quantités d'intérêt.

4.1 Etape offline : détermination du modèle PGD

Le dispositif étudié est composé de deux termes sources : le flux magnétique Φ et la charge électrique Q . En se basant sur le principe de superposition, deux configurations du problème sont considérées. Pour chaque cas, des approximations PGD des solutions sous la forme (10) sont calculées. Pour la première configuration, le flux magnétique Φ est imposé et la charge Q est fixée à zéro. Ainsi, on calcule en utilisant la méthode présentée précédemment les approximations $v_{0\Phi}$, $v_\Phi = \sum_{j=1}^M R_{j\Phi}^v(\mathbf{x})S_{j\Phi}^v(\omega)$, $A_\Phi = \sum_{j=1}^M R_{j\Phi}^A(\mathbf{x})S_{j\Phi}^A(\omega)$ et $\mathbf{u}_\Phi = \sum_{j=1}^M \mathbf{R}_{j\Phi}^u(\mathbf{x})S_{j\Phi}^u(\omega)$. La figure 2 présente les évolutions de l'erreur relative sur le potentiel électrique $v_{0\Phi}$ et sur les déformations maximales selon x et y en fonction du nombre de modes. L'erreur relative est donnée par

$$\epsilon_{RX} = \frac{\|X_{ref} - X_{PGD}\|_2}{\|X_{ref}\|_2} \quad (16)$$

avec X le vecteur des valeurs discrètes d'intérêt de $v_{0\Phi}$, $def_{x\Phi}$ ou $def_{y\Phi}$.

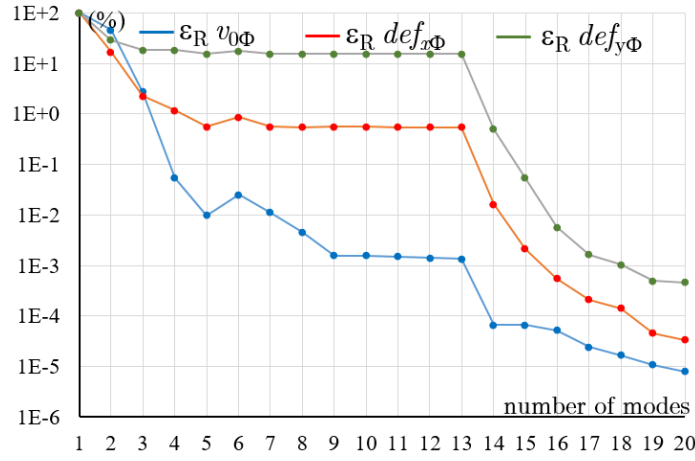


FIGURE 2 – Erreur en fonction du nombre de modes

Avec un faible nombre de modes, l'amplitude de $v_{0\Phi}$ en fonction de la fréquence est proche de la référence. Pour $M = 5$, l'erreur relative est de l'ordre de 0,01% avec un speed up par rapport au modèle complet Éléments Finis de 8. Pour obtenir une bonne approximation des déformations maximales, le nombre de modes doit être augmenté. Avec $M = 16$, les erreurs relatives sur les déformations maximales sont de l'ordre de 0,01% avec un speed up de 2,5. La figure 3 présente les évolutions de l'amplitude de la tension et des déformations maximales selon x et y en fonction de la fréquence obtenues par l'approximation PGD avec $M = 16$. Nous pouvons observer un phénomène de résonance sur les différentes courbes.

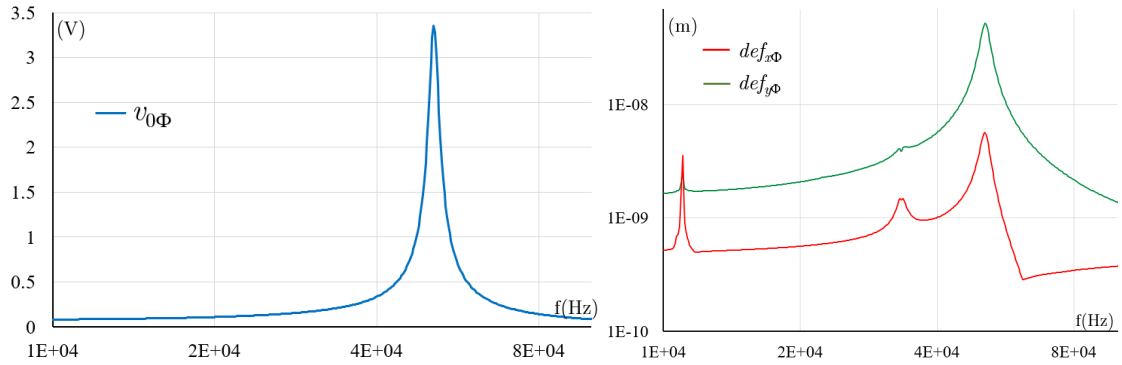


FIGURE 3 – Evolution de $v_{0\Phi}$ et des déformations maximales $def_{x\Phi}$ et $def_{y\Phi}$ en fonction de la fréquence

Pour la deuxième configuration, on cherche des approximations PGD des solutions avec le flux magnétique Φ fixé à zéro et avec une charge électrique Q imposée à 1. La convergence de la PGD est similaire au cas de la première configuration. Comme le modèle est linéaire, les approximations des solutions sont proportionnelles à Q tel que $v_{0Q}Q$, $v_Q = (\sum_{j=1}^M R_{jQ}^v(\mathbf{x})S_{jQ}^v(\omega))Q$, $A_Q = (\sum_{j=1}^M R_{jQ}^A(\mathbf{x})S_{jQ}^A(\omega))Q$ et $\mathbf{u}_Q = (\sum_{j=1}^M \mathbf{R}_{jQ}^u(\mathbf{x})S_{jQ}^u(\omega))Q$.

En se basant sur les deux configurations spécifiques précédentes, un modèle réduit du dispositif dépendant de la charge électrique est construit. En appliquant le théorème de superposition, la tension U entre les deux électrodes, v , A et $\mathbf{u}$ s'expriment par

$$U = 2v_0 = 2v_{0\Phi} + 2v_{0Q}Q, \quad (17)$$

$$v = v_{\Phi} + v_Q, \quad (18)$$

$$A = A_{\Phi} + A_Q \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Phi} + \mathbf{u}_Q. \quad (20)$$

4.2 Etape online : modèle réduit PGD couplé avec un circuit électrique de charge

On considère le dispositif couplé avec un circuit électrique composé d'une résistance R et d'une inductance L (Fig. 4).

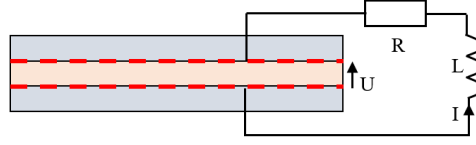


FIGURE 4 – dispositif couplé avec un circuit électrique

Le dispositif est modélisé par le modèle réduit dépendant de la charge Q . L'équation représentant le circuit électrique s'écrit

$$U + (R + jL\omega)I = 0 \text{ avec } I = j\omega Q. \quad (21)$$

Ainsi, en combinant (17) and (21), pour chaque pulsation $\omega_k \in [\omega_{min} : \omega_{max}]$, $Q(\omega_k)$ est donnée par

$$Q(\omega_k) = \frac{-2v_0\Phi}{2v_0Q + (R + jL\omega_k)j\omega_k}. \quad (22)$$

En utilisant (18-20), nous pouvons en déduire v , A et $\mathbf{u}$ pour chaque valeur de $Q(\omega_k)$. La figure 5 présente la partie réelle de la déformation obtenue par le modèle réduit à la fréquence de résonance mécanique ($f = 73,9kHz$). Trois cas sont considérés tels qu'un circuit ouvert (sans charge), $R = 4k\Omega$ et $R = 50\Omega$ avec $L = 10mH$. La figure 6 présente les évolutions de l'amplitude de la tension et des déformations maximales en fonction de la fréquence. Ainsi, l'amplitude maximale de la tension diminue quand le module du circuit de charge augmente. Pour le dernier cas, une résonance électrique peut être observée pour une fréquence de $17,8kHz$. Cette résonance influence les déformations maximales. Pour tous les cas, les erreurs relative sur v_0 , def_x et def_y par rapport au modèle Éléments Finis sont de l'ordre de 0,01% et le speed up est de 53.

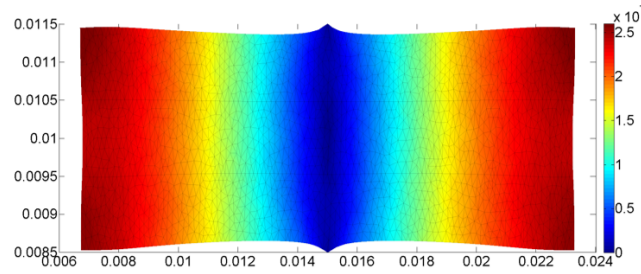


FIGURE 5 – Déformation réelle à $f = 73,9kHz$

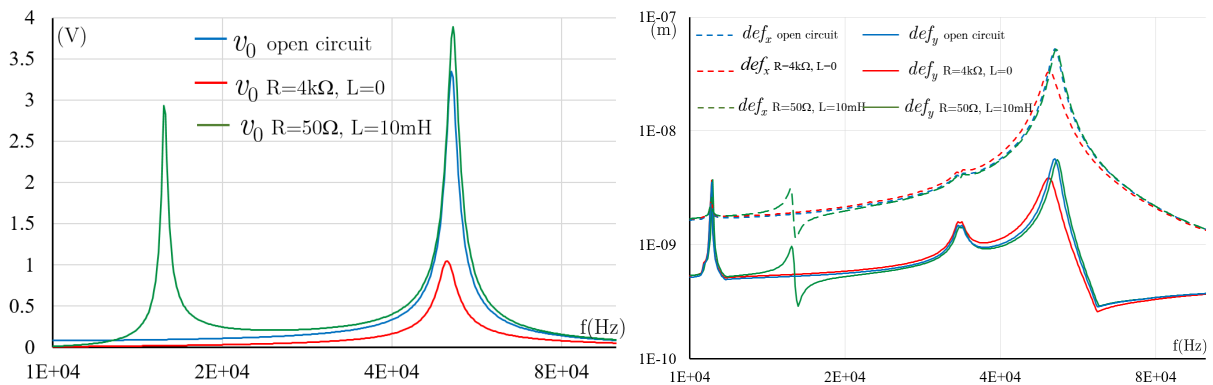


FIGURE 6 – Evolution de v_0 et des déformations maximales def_x et def_y en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de charge

5 Conclusion

L'approche PGD a été appliquée à un dispositif magnéto-mécano-électrique en vue de définir un modèle réduit. Ce modèle réduit a été combiné avec l'équation d'un circuit électrique de charge pour étudier le dispositif dans son environnement. L'approche par PGD et l'utilisation du modèle réduit a permis de réduire les temps de calcul comparé au modèle Éléments Finis tout en conservant une bonne précision sur les grandeurs d'intérêt.

Références

- [1] F. Chinesta, R. Keunings, A. Leyguel. *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations*, A. Primer, Springer International Publishing, 2014.
- [2] E. Pruliere, F. Chinesta, A. Ammar *On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition*, Numerical Methods in Engineering, Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, vol. 81 (4), pp.791-810, 2010.
- [3] X. Mininger, H. Talleb, T. Henneron *Review on Numerical Modeling of Magnetoelectric devices*, International Compumag Society Newsletter, vol. 23(3), 2016.