

Réduction de modèles pour la construction d'abaques numériques pour les problèmes non linéaires en dynamique vibratoire

A. Daby-Seesaram^{1,2}, A. Fau¹, P.-É. Charbonnel², D. Néron¹

¹ Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT Laboratoire de Mécanique et Technologie, {alexandre.daby-seesaram, amelie.fau, david.neron}@ens-paris-saclay.fr

² DES - Service d'Études Mécaniques et Thermiques (SEMT), CEA, Université Paris-Saclay, pierreetienne.charbonnel@cea.fr

Résumé — Ce travail présente une stratégie de construction de surfaces de réponse incluant une technique de réduction de modèle permettant de prédire la défaillance de structures en dynamique basse fréquence non linéaire. Les défis, la fiabilité et les potentialités de l'approche sont discutés.

Mots clés — surface de réponse, réduction de modèle, dynamique non linéaire.

1 Introduction

Afin d'étudier la réponse d'une structure soumise à une variété de chargements décrits dans un espace paramétrique bi-dimensionnel relativement étendu, une méthodologie d'obtention de surfaces de réponse exprimant l'endommagement maximal de la structure comme fonction des paramètres de chargement est proposée. Ces surfaces permettent ensuite de classer l'espace paramétrique en deux catégories de chargements, ceux menant à la ruine de la structure et ceux laissant la structure saine. Il s'agit alors d'identifier un front séparant ces deux domaines sur la surface de réponse. La construction de telles surfaces est coûteuse pour deux raisons principales. D'une part, l'estimation précise du risque demande de considérer des calculs de structure jusqu'à rupture, c'est-à-dire prenant en compte les non linéarités fortes de la structure avant défaillance. D'autre part, il est nécessaire de considérer un grand nombre de scénarios représentatifs de l'aléa de chargement. Divers travaux ont été développés pour réduire leur coût d'estimation, notamment par l'utilisation de surface de réponse [7], ou par l'utilisation d'intelligence artificielle [12].

La stratégie numérique proposée ici vise à optimiser les calculs vis-à-vis des deux difficultés précédemment mentionnées. Il est proposé de calculer chaque scénario en utilisant une méthode de réduction de modèles nommée *Proper Generalized Decomposition* (PGD), reposant sur une approximation par séparation de variables nécessitant une linéarisation du modèle en espace-temps. À cette fin, on utilise ici la méthode LATIN [8]. Cette méthode, déjà largement utilisée en plasticité et pour des études paramétriques est étendue pour considérer des scénarios de ruine de manière robuste. Ces calculs non linéaires sont couplés à une surface de réponse pour réduire le nombre d'appels au solveur non linéaire. Une stratégie proche avec métamodèle de type krigeage a été proposée dans la littérature pour des optimisations de structure [10]. Fort des surfaces de réponse judicieusement construites, il est ensuite aisé de déterminer une probabilité de défaillance de nos structures à faible coût. Cette probabilité est sensible au front d'endommagement présent sur l'abaque virtuel que l'on cherche à construire. Il s'agit donc d'arriver à décrire correctement ce front séparant les calculs menant à la ruine de ceux laissant la structure saine, le tout en proposant une méthode la moins coûteuse possible.

2 Calcul dynamique sur matériau elasto-plastique endommageant avec utilisation de modèles réduits

Soit une structure occupant un domaine Ω et dont on étudie le comportement sur un intervalle de temps I . Le comportement de la structure est supposé endommageable et décrit à l'aide d'une variable d'endommagement notée D . Le chargement appliqué à la structure pouvant être méconnu, il est judicieux de caractériser le risque de défaillance en calculant la probabilité de défaillance de la structure étudiée

selon la valeur d'un paramètre α . Cette probabilité notée P_f est définie comme

$$P_f(\alpha) = 1 - P(D(\underline{x}, t, \alpha) < D_c, \forall \underline{x} \in \Omega, \forall t \in I). \quad (1)$$

Pour fixer les idées, le paramètre scalaire α peut être associé au chargement appliqué à la structure (amplitude, fréquence, mais également accélération, énergie...). La rupture est considérée atteinte dès que l'endommagement noté D atteint une valeur critique notée D_c pour au moins un point du domaine Ω . L'estimation de la probabilité de rupture due au chargement aléatoirement paramétré requiert la considération d'un grand nombre de réalisations de chargements. Pour réduire drastiquement le coût de la prise en compte des aspects aléatoires, l'approche utilisée ici est basée sur la construction d'un abaque numérique (surface de réponse). Les nombreux tirages nécessaires au calcul de la probabilité seront ainsi réduits à une simple lecture de cet abaque. Cependant, la construction de cette surface peut tout de même nécessiter un très grand nombre de calculs non linéaires, conduisant à un coût de simulation très important. Ainsi, afin de significativement diminuer ce dernier, chaque résultat non linéaire est obtenu en utilisant une approche dite de *réduction de modèle*.

L'approche utilisée repose sur la méthode LATIN-PGD. Cette stratégie, initialement proposée dans [8] a été depuis mise en oeuvre avec succès pour des cas proches de l'application visée. Elle a en effet déjà été développée pour des calculs d'endommagement en conditions quasi-statiques [2] et pour des calculs de structures avec comportement visco-plastique en conditions de dynamique basse fréquence [11]. Les détails du modèle et de la méthode utilisés ici pour décrire une structure avec un comportement d'endommagement ductile en conditions de chargement dynamique sont donnés dans [4]. Les quelques lignes qui suivent procèdent à un bref rappel des grandes lignes de la méthode. Cette dernière est un puissant moyen d'assurer l'équilibre d'une structure tout en respectant des lois de comportement non linéaires décrivant dans le cas présent le modèle d'endommagement piloté par la plasticité. L'algorithme mis en place est un schéma itératif à deux directions alternées qui vient chercher une solution vérifiant les équations d'équilibre, linéaires, appartenant à la variété notée $\mathcal{A}_d$, puis une solution vérifiant le comportement local, non linéaire, appartenant à la variété notée Γ . Les directions de recherche introduites dans le schéma sont respectivement notées H^+ et H^- . Elles permettent de converger itérativement vers la solution du problème en cherchant à chaque itération la solution appartenant à l'une des deux variétés, minimisant la distance à la projection sur la seconde comme le décrit la figure 1.

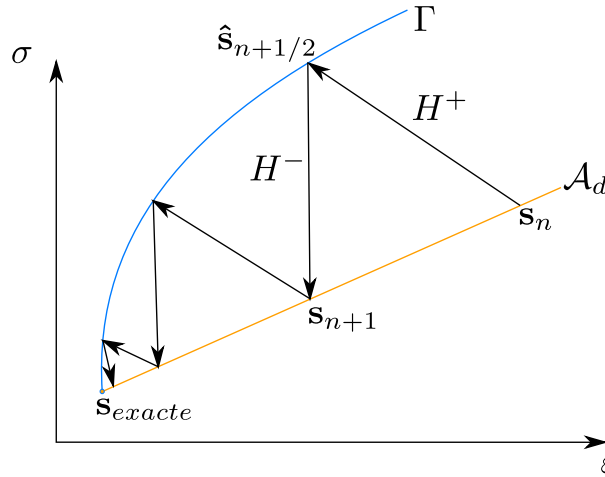


FIGURE 1 – Représentation schématisée de la méthode LATIN

L'algorithme commence ainsi par une étape d'initialisation :

- **Initialisation élastique :** L'algorithme est initialisé en calculant la solution élastique s_0 du problème telle que $s_0 \in \mathcal{A}_d$. Ainsi cette première solution peut ensuite être enrichie à l'aide de corrections admissibles à zéro.

Suite à cette initialisation, chaque itération se compose de deux étapes :

- **Étape locale :** Connaissant une solution s_n sur $\mathcal{A}_d$, cette étape consiste à trouver une solution $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$ obtenue en résolvant les équations non linéaires en chaque point de Gauss spatial et en chaque pas temps.

— **Étape globale :** Enfin, l'étape globale consiste à trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathcal{A}_d$ connaissant $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ et en utilisant H^- .

La solution à l'étape globale est recherchée en utilisant la *Proper Generalized Decomposition* (PGD). Ainsi, par exemple, le champ de déplacement $u(\underline{x}, t)$ est recherché comme la somme de modes où chaque mode est un produit de fonctions à variables séparées :

$$u(\underline{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j(t) \bar{u}_j(\underline{x}). \quad (2)$$

Les modes spatiaux notés $\bar{u}_j(\underline{x})$ constituent une base de fonctions notée $\Phi_u^\mu = \{\bar{u}_j(\underline{x})\}_{j=1}^\mu$. Les fonctions temporelles sont notées $\lambda_j(t)$. La génération de ces dernières représente une part significative du coût de calcul car elle nécessite la résolution de systèmes linéaires de grande taille. L'idée est donc d'essayer, autant que faire se peut, de limiter la génération de nouveaux modes, que ce soit d'une itération à l'autre de la méthode, mais aussi d'un calcul à l'autre lorsque l'on résout un problème pour différents jeux de paramètres comme c'est le cas ici. Aussi, une phase spécifique consistant à actualiser les modes temporels en conservant fixes les modes spatiaux préalablement générés est introduite. De nouveaux modes PGD sont ajoutés suite à cette étape uniquement en cas de nécessité.

Cette génération de modes à la volée présente l'avantage d'optimiser la réutilisation de la base, ce qui réduit fortement les coûts de calculs, tout en gardant une grande robustesse car elle ne fixe pas une base constante et permet d'élargir la base Φ si nécessaire.

L'algorithme itératif recherche donc alternativement les solutions des sous-étapes non linéaires $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ et linéaires $\mathbf{s}_{n+1}$, les solutions $\mathbf{s}$ étant composées des couples déplacements-contraintes effectives $\mathbf{s} = \{u, \sigma\}$ [4]. Les itérations sont stoppées lorsque le critère de proximité entre ces deux solutions noté η et défini sous la forme

$$\eta^2 = \frac{\|\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|^2}{1/2\|\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|^2 + 1/2\|\mathbf{s}_{n+1}\|^2} \quad (3)$$

est inférieur au critère d'arrêt noté η^c . La norme $\|\mathbf{s}\|$ utilisée est définie comme suit :

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \int_{\Omega \times I} \varepsilon : K : \varepsilon \, d\Omega dt + \int_{\Omega \times I} \sigma : K^{-1} : \sigma \, d\Omega dt \quad (4)$$

où ε et σ sont respectivement les tenseurs de déformation et de contraintes effectives et K est la matrice de rigidité.

3 Résultats numériques

À titre d'illustration simple, la géométrie étudiée est une poutre encastree à l'extrémité $x = 0$ représentée sur la figure 2a avec les dimensions $L = 5\text{ m}$ et $H = 80\text{ cm}$. L'épaisseur de la structure étant de $H = 80\text{ cm}$, des conditions de contraintes planes sont considérées avec un maillage composé d'éléments triangulaires définissant 1 302 degrés de liberté. Le risque est évalué en considérant un chargement vertical U_d appliqué à l'extrémité de la poutre en $x = L$. Cette condition aux limites est imposée comme un déplacement oscillant de valeur moyenne nulle, de fréquence fixe et ayant une amplitude d'enveloppe gaussienne comme schématisé sur la figure 2b. Le chargement est entièrement défini par la fréquence f et par l'amplitude U_d^{max} . Ces deux paramètres, considérés comme incertains, sont décrits par des distributions uniformes telles que $U_d^{max} \in [2.5\text{ mm}; 200\text{ mm}]$ et $f \in [15\text{ Hz}; 180\text{ Hz}]$.

Le matériau constitutif de la poutre est de l'aluminium de module d'Young $E = 70\text{ GPa}$. Son endommagement est piloté par un comportement plastique avec écrouissage cinématique linéaire. La propagation de l'endommagement est décrite dans le cadre de la mécanique des milieux continus [9] avec les propriétés mécaniques détaillées dans [4]. La structure est considérée défaillante si l'endommagement critique $D_c = 0.1$ a été atteint pour un point d'intégration.

3.1 Performances du solveur LATIN-PGD pour l'obtention d'une surface de réponse

Comme évoqué plus haut, les courbes de fragilité sont estimées à partir d'un abaque virtuel construit en utilisant la méthode LATIN-PGD. L'influence du chargement sur la fiabilité de la structure est visible

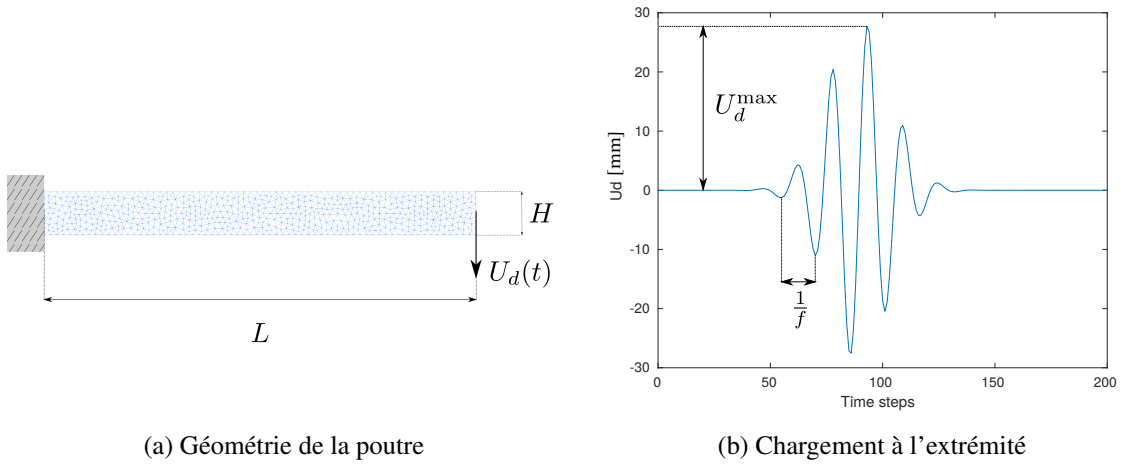


FIGURE 2 – Structure et chargement considérés

sur la figure 3a qui représente l'endommagement maximal D^{max} atteint sur la structure pour 3000 jeux de paramètres (U_d^{max}, f) . L'effet de l'amplitude maximale U_d^{max} est monotone, plus U_d^{max} est grand, plus la structure est endommagée, alors que le comportement est non monotone par rapport à la fréquence de chargement. En effet, les trois premières fréquences propres de la poutre étudiée sont $f_1^r = 38\text{Hz}$, $f_2^r = 97\text{Hz}$, $f_3^r = 176\text{Hz}$. On retrouve bien sur cette surface de réponse la sensibilité forte de la structure à des sollicitations proches de ces fréquences. On remarque que l'évolution entre les cas défailnants et non-défailnants se fait avec un fort gradient par rapport aux variations de valeurs des paramètres.

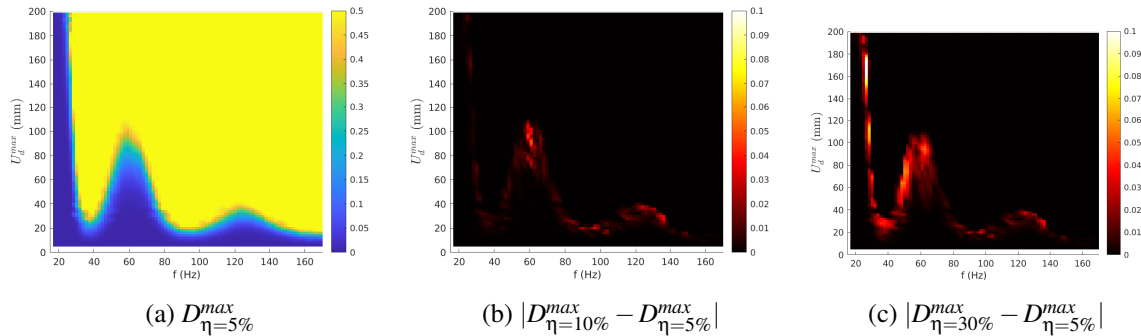


FIGURE 3 – Estimation de l'endommagement maximal de la structure en fonction des paramètres de chargement pour différents critères de convergence.

Chaque résultat de calcul non linéaire, figurant sous forme de point sur la figure 3, est obtenu à l'aide de la méthode LATIN-PGD présentée en section 2. Les résultats obtenus avec un critère d'arrêt des itérations égal à $\eta^c = 5\%$ (figure 3a) sont comparés avec ceux obtenus avec des critères d'arrêt moins contraignants : $\eta^c = 10\%$ (figure 3b) et $\eta^c = 30\%$ (figure 3c). Sur cet exemple, on remarque que les erreurs absolues sont très faibles. Pour la majorité des cas, on obtient une très bonne concordance des résultats malgré les grandes valeurs du critères d'arrêt. Considérant la carte d'endommagement de la figure 3a comme référence, on remarque que les points associés aux plus fortes erreurs pour des critères d'arrêt élevés sont situés dans la zone de fort gradient de l'endommagement maximal en fonction des paramètres de chargement. La position de ce front, primordiale pour une classification efficace, est quant à elle très peu impactée par la valeur du critère d'arrêt choisie. Des valeurs d'erreur quantifiées sont données dans la table 1. Seuls 16 points présentent une erreur absolue supérieure à 0.05 dans le cas le moins restrictif ($\eta^c = 30\%$). En parallèle le coût de construction est fortement diminué par le choix d'un critère grossier. Il est donc très intéressant de voir qu'environ 85% ($\eta^c = 30\%$) à 90% ($\eta^c = 10\%$) des calculs mènent à une erreur absolue extrêmement faible inférieure à 0.001 sur l'endommagement maximal estimé sur la structure..

Pour évaluer la diminution du coût de calcul associée à la levée de fortes contraintes de convergence, on étudie l'évolution du nombre d'itérations LATIN-PGD nécessaires pour atteindre la convergence dans

chaque scénario (figure 4) et le nombre de modes PGD nécessaires pour décrire la solution (figure 5). On peut voir que le nombre d'itérations, qui peut atteindre des valeurs supérieures à 30 pour $\eta^c = 5\%$, est réduit à des valeurs voisines de 15 pour $\eta^c = 10\%$ et de 10 pour $\eta^c = 30\%$.

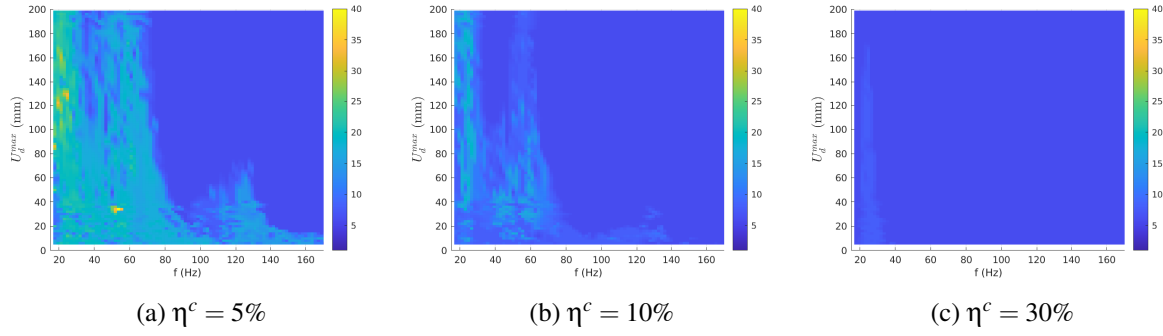


FIGURE 4 – Nombre d'itérations du solveur LATIN nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt imposé

De manière assez similaire, par rapport à leur répartition sur le domaine paramétrique, le nombre de modes PGD décroît fortement quand le critère d'arrêt augmente. Il passe de valeurs avoisinant les 8-10 pour $\eta^c = 5\%$ à 6 modes pour $\eta^c = 10\%$ et ne dépasse pas 3 pour $\eta^c = 30\%$ respectivement. Utiliser un critère d'arrêt variable sur le domaine paramétrique pour capter le front d'endommagement à faible coût semble donc prometteur pour optimiser le coût de calcul des surfaces de réponse et donc des courbes de fragilité.

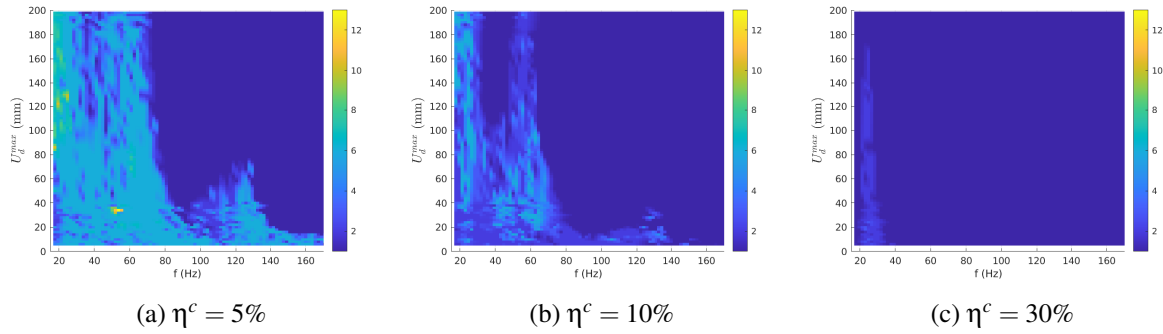


FIGURE 5 – Nombre de modes PGD nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt imposé

En effet, passer du critère le plus restrictif au critère le moins restrictif, amène à une division par deux du temps de calcul moyen d'un point de la surface de réponse pour une erreur en termes de classification, qui est la quantité d'intérêt primordiale, d'à peine 0.3% (Table 1). Ce résultat, intéressant dans l'optique de réduire les temps de calcul, observé sur le cas 2D étudié ici, s'explique par la grande stabilité du front de défaillance recherché malgré une convergence partielle du solveur.

	$ D_{\eta^c=\eta_x^c}^{max} - D_{\eta^c=5\%}^{max} >$				Nombre de points mal classés entre <i>structure saine</i> et critiquement <i>endommagée</i>
	0.05	0.01	0.005	0.001	
$\eta_x^c = 10\%$	3	63	134	333	7
$\eta_x^c = 30\%$	16	155	237	451	8

TABLE 1 – Nombre de points parmi 3000 réalisations dépassant certains seuils d'erreur

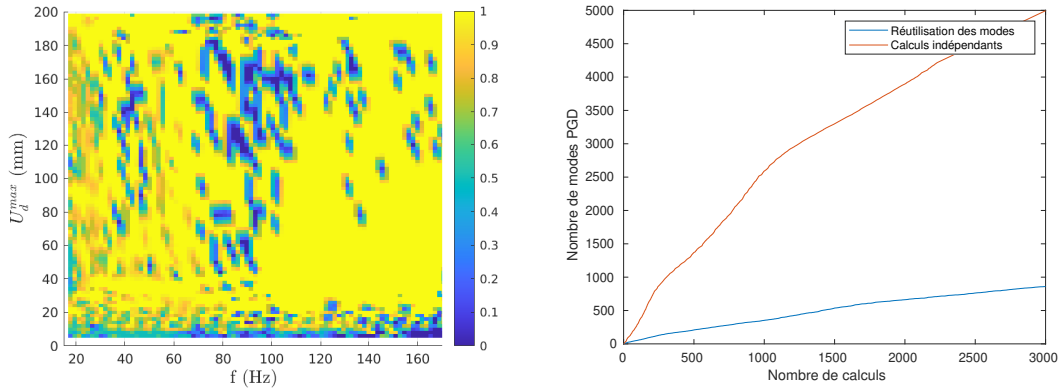
3.2 Redondance de la base réduite lors du calcul de la surface de réponse

Dans les calculs de la surface de réponse composée de 3000 points présentés dans la précédente section, chaque calcul non linéaire a été réalisé de manière indépendante, c'est-à-dire sans tenir compte

de la connaissance des modes générés durant les calculs précédents. Considérons la surface de réponse avec comme critère de convergence $\eta^c = 10\%$; environ 5000 modes sont estimés pour les 3000 calculs (figure 6b).

Une *Singular Value Decomposition* (SVD) de l'ensemble de ces modes montre une forte décroissance des valeurs propres passé une cinquantaine de modes ce qui atteste d'une forte redondance entre les différentes bases modales calculées. Pour étudier cette redondance, nous évaluons la part du nombre de modes redondants sur le nombre de modes nécessaires pour arriver à convergence pour chaque calcul non linéaire. Chaque calcul non linéaire étant associé à la construction d'une base réduite dédiée notée Φ_u^j , on considère redondant un mode dont l'erreur de projection $\|\tilde{u}^k\|$ sur la base des modes déjà calculés $\cup_{i=1}^{j-1} \Phi_u^i$ est nulle, avec le projecteur

$$\tilde{u}_k = \bar{u}_k - \sum_{\bar{u}_i \in \cup_{j=1}^{n-1} \Omega_u^j} (\bar{u}_k, \bar{u}_i) \bar{u}_i. \quad (5)$$



(a) Redondance des bases réduites sur la surface de réponse

(b) Évolution de la taille de la base réduite avec les observations

FIGURE 6 – Réutilisation successive des modes PGD

Une carte de redondance obtenue est montrée en figure 6a. Les valeurs exactes de redondances dépendent de l'ordre dans lequel les calculs sont réalisés et de nombreuses méthodes permettent d'optimiser le chemin formé de cette succession de calculs [13]. Ici, en première approche, seul un chemin trivial a été considéré : pour une fréquence donnée les calculs se font par amplitude de chargement croissante puis une fois tous les calculs à cette fréquence traités, la fréquence suivante est examinée de manière similaire, et ce jusqu'à avoir balayé l'ensemble de l'espace comme illustré sur la figure 7. Toutefois, on peut déjà y voir que, pour une grande partie des cas, les calculs non linéaires pourraient être réalisées très efficacement en utilisant des méthodes de réduction de modèle dites *a posteriori* puisque la base est totalement redondante avec celles obtenues précédemment, mais pour une partie significative des calculs il est nécessaire d'adapter la base avec l'ajout de modes nouveaux inexistants dans la base des modes précédemment calculés. Ainsi, le caractère adaptatif de la stratégie LATIN-PGD, qui procède par enrichissement de la base réduite si nécessaire, est un atout pour le calcul de telles surfaces de réponse.

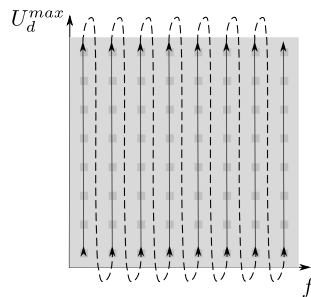


FIGURE 7 – Représentation schématisée du chaînage des calculs

Par ailleurs, il semble pertinent de transmettre les bases calculées pour un calcul aux calculs suivants

pour bénéficier au mieux de cette redondance. Avec cette nouvelle stratégie, le nombre de modes calculés pour estimer la surface est plus modéré, un total d'environ 900 modes est nécessaire pour calculer la surface de réponse (figure 6b). On constate toutefois que ce nombre de modes est toujours significatif, une méthode de compression de bases pourrait être appliquée pour réduire les coûts de mémoire [1]. Il est également envisagé de ne plus réutiliser systématiquement tous les modes connus mais de choisir judicieusement les plus utiles à l'aide de méthodes *sparse* permettant de mieux cibler les informations précédemment calculées à réutiliser [14].

3.3 Courbes de fragilité estimées à partir d'un abaque numérique

Une utilisation de ces surfaces de réponse judicieusement calculées est la détermination de la probabilité de défaillance de la structure. On peut ainsi construire des courbes de fragilité illustrant cette probabilité. Dans ce travail préliminaire, le paramètre α précédemment évoqué est simplement associé au niveau de chargement. La courbe de fragilité représentée sur la figure 8a a été obtenue avec un échantillonnage de 5 millions de réalisations aléatoires des fréquences f par valeur de U_d^{max} et la surface de réponse de référence, constituée de 3000 points. En considérant 93 valeurs de U_d^{max} , la courbe a ainsi demandé 460 millions d'appels à la surface de réponse, ce qui est quasiment instantané l'abaque numérique étant préalablement construit. La probabilité de rupture évolue de manière croissante de 0% à 95%, mais n'atteint pas les 100% dans le domaine paramétrique considéré.

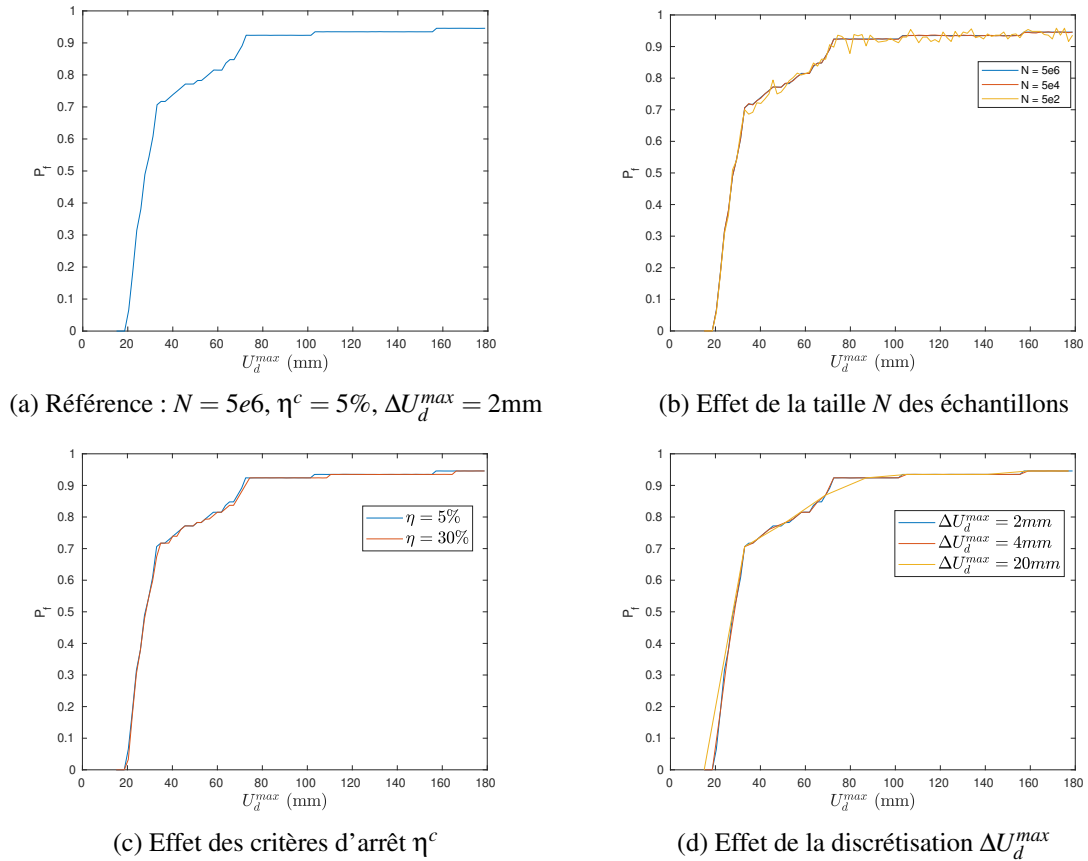


FIGURE 8 – Influence des paramètres numériques sur l'estimation de la courbe de fragilité

Les influences de la taille de l'échantillonnage, du critère d'arrêt du schéma non linéaire et de la discrétisation en amplitude de chargement sont également représentées sur la figure 8. En considérant une surface de réponse obtenue avec $\eta = 5\%$, réduire la taille des échantillons fait perdre sa propriété de croissance monotone à la courbe de fragilité (Figure 8b). Avec une taille d'échantillonnage de 50 000 réalisations par valeur de U_d^{max} , on observe des décroissances locales. Avec des échantillons de 500 réalisations, la courbe a une tendance croissante générale mais oscille beaucoup. La modification du critère d'arrêt impacte notamment les faibles valeurs de probabilité de rupture (Figure 8c) mais la tendance générale à la croissance monotone est conservée. On remarque de surcroît que l'impact du

critère d'arrêt semble finalement moins important que celui des paramètres numériques (N et ΔU_d^{max}) de constructions de la courbe de fragilité (figures 8b et 8d).

4 Conclusions

Ce premier exemple montre les possibilités offertes par la méthode de réduction de modèle LATIN-PGD pour l'estimation non linéaire de chaque solution paramétrique dans le cadre de la construction de courbes de fragilité. On peut voir que la précision obtenue sur les résultats ainsi que les coûts de calcul dépendent de divers paramètres, aussi bien au niveau du modèle réduit utilisé pour les calculs de structure, que pour le tirage de nombres aléatoires. Il est envisagé d'étendre ces travaux à l'utilisation de métamodèles adaptatifs dans un espace paramétrique [5] et multi-fidélité [10] pour optimiser les coûts de calcul et la précision des estimations selon leur importance dans la détermination de la probabilité de défaillance de la structure.

Remerciements

Les travaux de thèse d'A. Daby-Seesaram sont financés par le CEA et s'inscrivent dans les thématiques de recherche de l'institut SEISM (<https://www.institut-seism.fr>). Ces travaux ont également bénéficié des moyens de calcul du Mésocentre de CentraleSupélec et de l'École Normale Supérieure Paris-Saclay avec le soutien du CNRS et de la région Île-de-France (<http://mesocentre.centralesupelec.fr/>).

Références

- [1] S. Alameddine, A. Fau, D. Néron, P. Ladevèze. *Toward Optimality of Proper Generalised Decomposition Bases*. Mathematical and Computational Applications, 24, 2019.
- [2] M. Bhattacharyya, A. Fau, R. Desmorat, S. Alameddine, D. Néron, P. Ladevèze, U. Nackenhorst. *A kinetic two-scale damage model for high-cycle fatigue simulation using multi-temporal latin framework*. European Journal of Mechanics/A Solids, 77, 2019.
- [3] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto. *A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, 18, 2011.
- [4] A. Daby-Seesaram, A. Fau, P.-É. Charbonnel, D. Néron. *Model-order reduction for nonlinear dynamics including nonlinearities induced by damage*, VI ECCOMAS YIC Proceedings, 2021.
- [5] J. N. Fuhg, A. Fau, *A classification-pursuing adaptive approach for Gaussian process regression on unlabeled data*, Mechanical Systems and Signal Processing 162, 2022.
- [6] A. Giacomini, D. Dureisseix, A. Gravouil, M. Rochette. *Toward an optimal a priori reduced basis strategy for frictional contact problems with LATIN solver*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 283, 2015.
- [7] J. Gosh, J. Ellen Padgett, L. Duenas-Osorio. *Surrogate modeling and failure surface visualization for efficient seismic vulnerability assessment of highway bridges*, Probabilistic Engineering Mechanics 34, 2013.
- [8] P. Ladevèze. *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre, 300(2), 1985.
- [9] J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*, Springer Berlin/Heidelberg, 2005.
- [10] S. Nachar P.-A. Boucard, D. Néron, U. Nackenhorst, A. Fau. *Multi-fidelity metamodels nourished by reduced order models*, Virtual Design and Validation, 61-79, 2020.
- [11] S. Rodriguez, D. Néron, P.-É. Charbonnel, P. Ladevèze, G. Nahas. *Non incremental LATIN-PGD solver for nonlinear vibratory dynamics problems*, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, 2019.
- [12] R. Sainct, C. Feau, J.-M. Martinez, J. Garnier. *Efficient methodology for seismic fragility curves estimation by active learning on Support Vector Machines*. Structural Safety 86, 2020.
- [13] D. Néron, P.-A. Boucard, C. Heyberger. *Stratégie rationnelle pour la résolution des problèmes paramétrés dans le cadre de la Proper Generalized Decomposition*. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013
- [14] M. Elad. *Sparse and Redundant Representations*, Springer, 2010.