

Optimisation simultanée de la topologie et l'anisotropie avec une méthode à gradient

L. Vertonghen¹, F.-X. Irisarri¹, B. Desmorat², D. Bettebghor¹

¹ DMAS, ONERA, Université Paris Saclay, Châtillon, France {landervertonghen, francois-xavier.irisarri, dimitri.bettebghor}@onera.fr

² Sorbonne Université, CNRS, UMR 7190, Institut d'Alembert, Paris, France, boris.desmorat@sorbonne-universite.fr

Résumé —

L'introduction de l'anisotropie lors d'optimisations topologiques aboutit à des solutions différentes comparé à des optimisation en densité usuelles. Ce travail propose une nouvelle démarche pour ces optimisations au moyen d'un algorithme à gradient, pour la future inclusion de contraintes de résistance et de flambement, en plus de la gestion de l'anisotropie. L'approche utilise de manière adéquate différentes approximations du problème selon le type de variable, avec une paramétrisation de l'anisotropie au moyen des paramètres polaires. La méthode est validée par rapport à l'algorithme des directions alternées.

Mots clés — optimisation, topologique, anisotropie, paramètres polaires

1 Introduction

L'optimisation topologique vise à définir la répartition optimale de la matière pour un cas de charge défini. C'est un problème bien documenté pour la minimisation de la compliance avec un matériau isotrope [1], cependant d'autres conditions influencent la solution finale, que ce soit en considérant un autre objectif d'optimisation, ou en incluant des contraintes supplémentaires (par exemple le flambement et/ou la résistance [4]) ou des variables, telles que l'anisotropie du matériau. L'influence de ces contraintes est démontrée et incorporée avec des algorithmes génétiques [5] ou basés sur du gradient [4]. L'anisotropie a également été étudiée et documentée, au moyen de paramètres polaires [10], définissant théoriquement toute anisotropie du matériau en deux dimensions, mais restreinte à un matériau orthotrope dans les optimisations topologiques de Ranaivomiarana *et al.* [7]. Un autre sous-ensemble d'anisotropie peut être mentionné, l'espace des stratifiés composites, le plus souvent exploré au moyen des paramètres de stratification, comme le propose par exemple par Peeters *et al.* [6], avec une étape ultérieure de récupération de chemin de fibre.

Ranaivomiarana *et al.* [7] ont démontré que la prise en compte simultanée de l'orthotropie et de la densité dans l'optimisation topologique aboutit à des topologies inédites potentiellement moins volumineuses et plus performantes qu'une optimisation séquentielle de la densité et de l'orthotropie. Cependant, la méthode d'optimisation utilisée par Ranaivomiarana *et al.* [7] est basée sur l'algorithme des directions alternées, qui ne peut être utilisé que pour la minimisation de la compliance.

Par conséquent, afin d'incorporer des contraintes supplémentaires dans l'optimisation, tout en tenant compte de l'anisotropie du matériau, il est nécessaire de remplacer l'algorithme des directions alternées par une méthode plus générique, un algorithme basé sur le gradient, qui est l'objet du travail présenté. L'anisotropie du matériau sera encore caractérisée au moyen des paramètres polaires, facilitant une comparaison des résultats de l'approche proposée à ceux présentés dans [7]. Cette approche basée sur le gradient permettra d'intégrer ultérieurement les contraintes de résistance et de flambement, plus pertinentes pour une application industrielle que la compliance seule. Le reste de cet abstract est organisé comme suit : la Section 2 présente l'approche d'optimisation proposée, les résultats sont présentés et discutés dans la Section 3 et enfin la conclusion est donnée dans la Section 4.

2 Méthodologie

Le travail actuel se concentre sur le problème de minimisation de la compliance (C), qui est égale à l'énergie de déformation de la structure, telle qu'elle est donnée dans (1). Les variables de conception sont les densités ρ , les directions d'orthotropie ϕ_1 et les modules anisotropes normalisés η_0 et η_1 , qui sont présentés plus en détail dans la Section 2.1 et 2.2. Le problème est soumis à une contrainte de volume et est résolu par une approche de gradient décrite dans la Section 2.3.

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho, \phi_1, \eta_1} U^T K U \\
& \text{s.t. } V \leq V_0 \\
& \quad K U = F \\
& \quad \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \\
& \quad -\pi/2 \leq \phi_1 \leq \pi/2 \\
& \quad -\sqrt{\frac{1 + \eta_0 - \varepsilon}{2}} \leq \eta_1 \leq \sqrt{\frac{1 + \eta_0 - \varepsilon}{2}}
\end{aligned} \tag{1}$$

U est le vecteur déplacement global, K la matrice de rigidité globale et F le vecteur d'efforts imposés. Le volume de la structure V doit être inférieur au volume prescrit V_0 .

2.1 Variables de densité et filtrage

Les variables topologiques sont les densités élémentaires ρ_i , utilisées pour représenter la présence ($\rho = 1$) ou l'absence de matière ($\rho = 0$). Afin d'éviter les problèmes de singularité avec la résolution d'une analyse éléments finis (EF) mais aussi garder la continuité du problème pour les sensibilités, ρ_i varie continûment dans l'intervalle $[\rho_{min}, 1]$, avec ρ_{min} égal à 0.001. De plus, afin d'obtenir des solutions distinctes en noir et blanc, la méthode d'interpolation Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) est utilisée pour pénaliser les densités [1], selon (2), avec C_0 le tenseur élastique pristine d'un élément, et C le tenseur élastique utilisé pour le calcul de la matrice de rigidité EF.

$$C = \rho_i^p C_0 \tag{2}$$

Les densités ρ_i sont les variables d'optimisation utilisées dans l'algorithme. Afin de contrôler les dimensions minimales et d'éviter les artefacts numériques tels que du damier (checkerboard), un filtre en densité est utilisé [1], défini en (3), avec les poids w_{ej} définis dans (4), en tant que fonction de la distance entre le centre de gravité x des différents éléments.

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} w_{ej} V_j \rho_j}{\sum_{j \in \Omega_e} w_{ej} V_j} \tag{3}$$

$$\Omega_e = \{i \mid \|x_i - x_e\| \leq R\} \text{ where } w_{ei} = R - \|x_e - x_i\| \tag{4}$$

Les densités filtrées $\tilde{\rho}_e$ peuvent être interprétées comme les variables physiques qui sont utilisées pour configurer l'analyse EF avec (2) et calculer le volume de la structure.

2.2 Variables d'anisotropie et domaine réalisable

L'anisotropie est représentée au moyen du formalisme polaire [10], et restreinte à un matériau orthotrope. Le formalisme polaire exprime un tenseur d'élasticité du quatrième ordre à l'aide d'invariants scalaires. Les composantes du tenseur élastique orthotrope sont données par (5), où T_0 et T_1 sont les modules isotropes, K le paramètre de forme d'orthotropie, ϕ_1 la direction d'orthotropie et R_0 et R_1 les modules anisotropes.

$$\begin{aligned}
L_{1111} &= T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 \cos 4\phi_1 + 4R_1 \cos 2\phi_1 \\
L_{1122} &= -T_0 + 2T_1 - (-1)^K R_0 \cos 4\phi_1 \\
L_{1112} &= (-1)^K R_0 \sin 4\phi_1 + 2R_1 \sin 2\phi_1 \\
L_{2222} &= T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 \cos 4\phi_1 - 4R_1 \cos 2\phi_1 \\
L_{2212} &= -(-1)^K R_0 \cos 4\phi_1 + 4R_1 \sin 2\phi_1 \\
L_{1212} &= T_0 - (-1)^K R_0 \cos 4\phi_1
\end{aligned} \tag{5}$$

Alors que T_0 et T_1 dictent le comportement isotrope du tenseur de rigidité, et doivent tous deux être strictement positifs, les modules anisotropes R_0 et R_1 définissent la partie anisotrope du tenseur élastique et doivent rester dans les limites thermodynamiques, pour assurer que le tenseur reste défini positif. Cette condition est décrite dans (6), et implique tout matériel orthotrope possible, qu'il soit fabricable ou non.

$$\begin{aligned}
R_0 &< T_0 \\
R_1^2 &< T_0 T_1 \\
T_1(T_0 + (-1)^K R_0) - 2R_1^2 &> 0
\end{aligned} \tag{6}$$

En introduisant les variables normalisées $\eta_0 = \frac{(-1)^K R_0}{T_0}$ et $\eta_1 = \frac{R_1}{\sqrt{T_0 T_1}}$, les bornes thermodynamiques peuvent être réécrites comme dans (7), où l'introduction d'un paramètre ε permet de gérer l'inégalité stricte au cours de l'optimisation.

$$\begin{aligned}
-(1 - \varepsilon) &\leq \eta_0 \leq 1 - \varepsilon \\
\eta_1^2 &\leq 1 - \varepsilon \\
\eta_0 - 2\eta_1^2 + 1 &\geq \varepsilon
\end{aligned} \tag{7}$$

Enfin, reconnaissant d'après Ranaivomiarana *et al.* [7] que la solution optimale est obtenue pour un η_0 constant, quelle que soit la distribution des contraintes dans la topologie, la valeur de η_0 est fixée à la limite inférieure de T_0 , afin de satisfaire la condition thermodynamique (6). Par conséquent, un cas d'optimisation spécial peut être construit avec seulement η_1 comme variable d'anisotropie, ce qui permet de réécrire la contrainte thermodynamique comme une simple contrainte de bornes sur la variable (8).

$$-\sqrt{\frac{1 + \eta_0 - \varepsilon}{2}} \leq \eta_1 \leq \sqrt{\frac{1 + \eta_0 - \varepsilon}{2}} \tag{8}$$

2.3 Algorithme d'optimisation

Comme l'algorithme des directions alternées [7] est limité à la minimisation de la compliance, une méthode utilisant un schéma basé sur le gradient est recherchée, permettant l'inclusion des contraintes de résistance et de flambement dans l'optimisation topologique. Suivant la tendance à utiliser la Method of Moving Asymptotes (MMA) [8] en optimisation topologique, il a été décidé de l'utiliser dans ces travaux, avec la nouveauté ajoutée des variables d'anisotropie supplémentaires dans l'optimisation.

L'algorithme de classe MMA est basé sur des approximations successives de l'objectif et des contraintes dans un processus d'amélioration itérative, tout en variant le pas et l'approximation en fonction de l'état de convergence. La MMA standard utilise une approximation monotone, qui est bien adaptée à la surface de réponse de la compliance par rapport aux variables de densité. Cependant, comme cela a été noté par Bruyneel *et al.* [2] et également éprouvé lors des expérimentations numériques de l'algorithme, les orientations ont une périodicité qui se traduit par des évolutions non linéaires et multimodales des objectifs et contraintes du problème d'optimisation par rapport à ces variables. Par conséquent, l'approximation convexe de MMA, la Global Convergent MMA (GCMMA) s'avère mieux adaptée pour l'optimisation de l'orientation d'un matériau anisotrope. Enfin, il a été testé et conclu que la MMA de base fut toujours bien adapté pour l'optimisation par rapport aux modules d'anisotropie.

Ainsi, l'approche proposée combine de manière successive les différentes variables avec leurs approximations adéquates en fonction de leur nature, comme le montre la Figure 1. La compliance est optimisée par rapport à chaque variable séparément, chaque étape correspondant à une analyse EF. Dans les travaux futurs, d'autres contraintes telles que la résistance ou le flambement seront introduites. Actuellement, la boucle globale est exécutée pour un nombre prescrit d'itérations pour obtenir une solution stable et convergée.

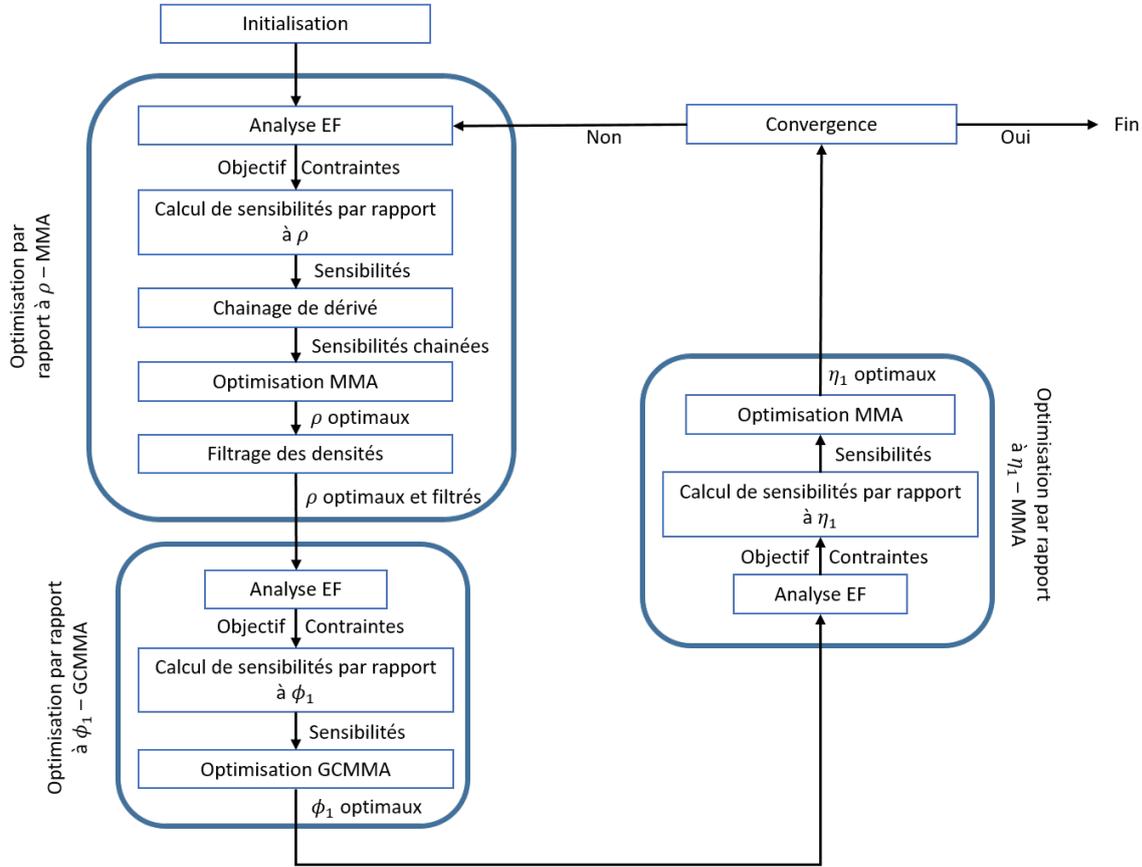


FIGURE 1 – Diagramme de la méthode d'optimisation proposée.

2.4 Sensibilités

Afin de construire l'approximation pour les algorithmes de classe MMA, les sensibilités de l'objectif et des contraintes doivent être calculées par rapport aux variables. Le gradient de la compliance par rapport à la densité est facilement accessible [1], comme le montre (9). Il se compose uniquement de la contribution de l'énergie de déformation de chaque élément, u_i étant le déplacement nodal, et k_i la matrice de rigidité élémentaire de la formulation EF.

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\frac{\partial}{\partial \rho_i}(u_i^T k_i u_i) = -p \rho_i^{p-1} u_i^T k_i u_i \quad (9)$$

Cependant, comme indiqué précédemment, les variables d'optimisation sont les densités non filtrées ρ , mais les variables d'analyse EF sont basées sur les densités physiques filtrées $\tilde{\rho}$, donc les sensibilités doivent être adaptées au moyen du chaînage de dérivés présenté dans (10), où f est soit l'objectif, soit la contrainte.

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_e} \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \rho_i}, \text{ avec } \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \rho_i} = \frac{w_{ei} V_i}{\sum_{j \in \Omega_e} w_{ej} V_j} \quad (10)$$

Enfin, les sensibilités par rapport aux autres variables (ϕ_1, η_0, η_1) peuvent être obtenues d'une manière similaire à celles de la densité, comme montré en (11) pour les orientations. Cependant, dans le cas des variables d'orientation ou d'anisotropie, la dérivée partielle doit être effectuée avant l'intégration

numérique de la matrice de rigidité locale, comme présenté dans (12), où la matrice d'élasticité D est obtenue à partir des composants polaires et B contient les relations des fonctions de forme.

$$\frac{\partial C}{\partial \phi_{1_i}} = -\frac{\partial}{\partial \phi_{1_i}}(u_i^T k_i u_i) = -u_i^T \frac{\partial k_i}{\partial \phi_{1_i}} u_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial \phi_{1_i}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{1_i}} \iint_S B^T D B dS = \iint_S B^T \frac{\partial D}{\partial \phi_{1_i}} B dS \quad (12)$$

3 Résultats et discussion

La méthodologie proposée est testée et comparée pour validation par rapport aux résultats obtenus par Ranaivomiarana *et al.* [7]. Toutes les optimisations sont exécutées avec le même rayon de filtre pour un nombre défini d'itérations, après quoi quelques autres itérations sont effectuées avec un rayon de filtre minimal, afin d'obtenir des topologies aux frontières plus distinctes et de supprimer les densités intermédiaires. Cela permet à toutes les solutions optimisées d'avoir un pourcentage de mesure de gris similaires ($\pm 1\%$) et facilite les comparaisons. L'optimisation utilise un schéma de continuation de l'exposant SIMP $p=1, 3, 5$, chacun utilisé pour un nombre fixe d'itérations. Les résultats sont tous affichés pour $p=5$. Le problème d'optimisation traité consiste en une poutre console de proportion 2 : 1, encastée sur le côté gauche, et chargée au milieu du côté droit.

Deux topologies et distributions différentes des variables d'anisotropie sont obtenues avec la méthodologie proposée, en modifiant l'initialisation et les paramètres de l'algorithme (GC)MMA. La solution résultant d'une initialisation uniforme est affichée dans la Figure 2-4 (a), avec une compliance finale de 14.2 mJ. La deuxième solution, illustrée à la Figure 2-4 (b), a été obtenue avec pour point de départ pour la deuxième étape de la stratégie de continuation ($p=3$) la distribution des variables obtenue à la fin de la première étape ($p=1$) avec l'algorithme des directions alternées [7], avec une compliance finale de 14.3 mJ. L'initialisation de cet exemple est montrée en Figure 5. Les orientations et η_1 affichés sont pour les éléments dont la densité est supérieure à 0.8. La Figure 6 montre la convergence des deux solutions avec l'approche à gradient, par rapport à celle obtenue avec l'algorithme des directions alternées.

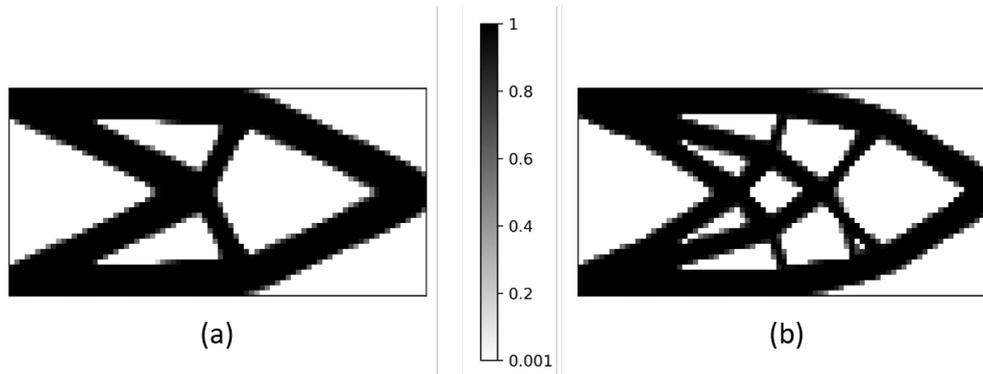


FIGURE 2 – Topologies finales obtenues par optimisation à gradient : (a) initialisation par des champs uniformes, $C = 14.2$ mJ, (b) initialisation à partir de la solution $p=1$ obtenue par l'algorithme des directions alternées, $C = 14.3$ mJ.

Les deux solutions obtenues sont cohérentes avec les deux optimums locaux présentés en [7], avec des phénomènes de damier sur la distribution η_1 , validant les implémentations et les bases de l'approche proposée. Une analyse plus approfondie des résultats montre que la solution de la Figure 2 (a) ressemble à la topologie isotrope optimale, qui est utilisée dans la méthode d'optimisation séquentielle décrite dans [7]. De plus, la deuxième topologie montrée dans la Figure 2 (b) est la même que celle obtenue avec l'algorithme des directions alternées dans le cas d'une optimisation simultanée de la densité et de

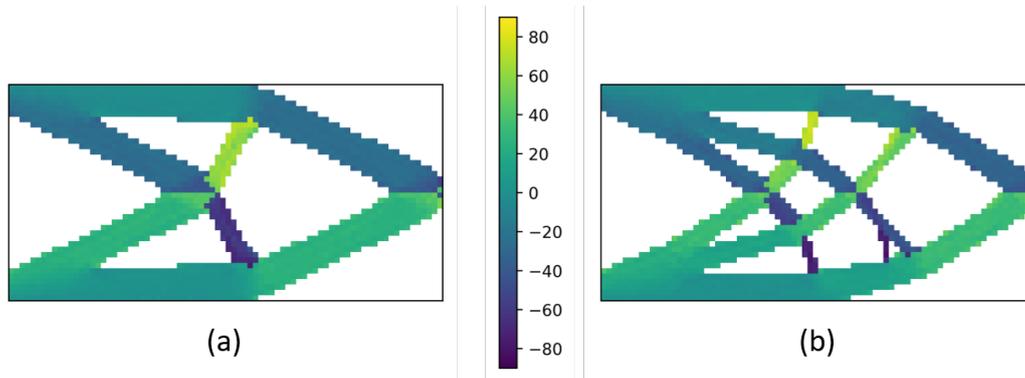


FIGURE 3 – Orientations finales ϕ_1 obtenues par optimisation à gradient : (a) initialisation par des champs uniformes, $C = 14.2$ mJ, (b) initialisation à partir de la solution $p=1$ obtenue par l’algorithme des directions alternées, $C = 14.3$ mJ.

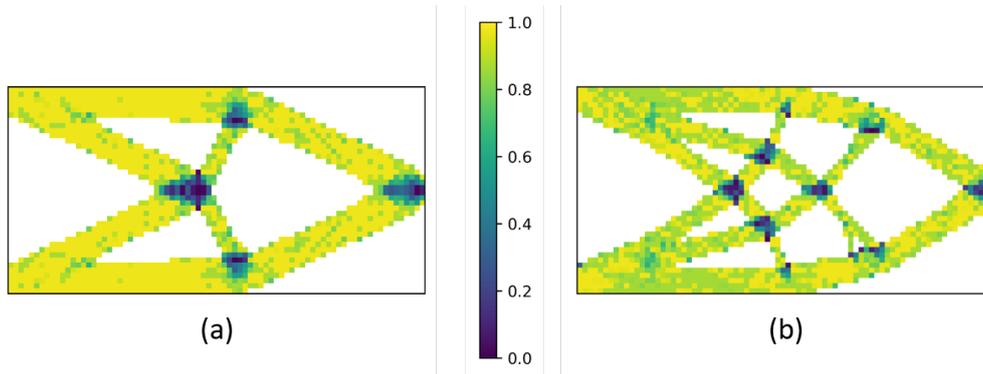


FIGURE 4 – Modules anisotropes normalisés finals obtenus par optimisation à gradient : (a) initialisation par des champs uniformes, $C = 14.2$ mJ, (b) initialisation à partir de la solution $p=1$ obtenue par l’algorithme des directions alternées, $C = 14.3$ mJ.

l’anisotropie, sauf pour la dissymétrie, qui est associée aux instabilités numériques cumulées des gradients et de l’approximation au cours des itérations. La différence entre ces deux optimums locaux est déjà établie à la fin de la première étape de la stratégie de continuation. Relancer l’optimisation à gradient à partir de la solution issue des direction alternées à l’étape 1 permet d’aboutir au second optimum local présenté en [7], ce qui valide encore davantage la méthode proposée et son implémentation. De plus, la comparaison de la compliance des deux solutions basées sur le gradient montre qu’elles sont similaires à 14.2-14.3 mJ, avec une légère différence par rapport à celle obtenue avec la solution des directions alternées, à 13.7 mJ. Cette différence peut être attribuée aux phénomènes de damier de η_1 , et à un certain défaut de convergence dû à l’usage d’un nombre d’itération fixé arbitrairement.

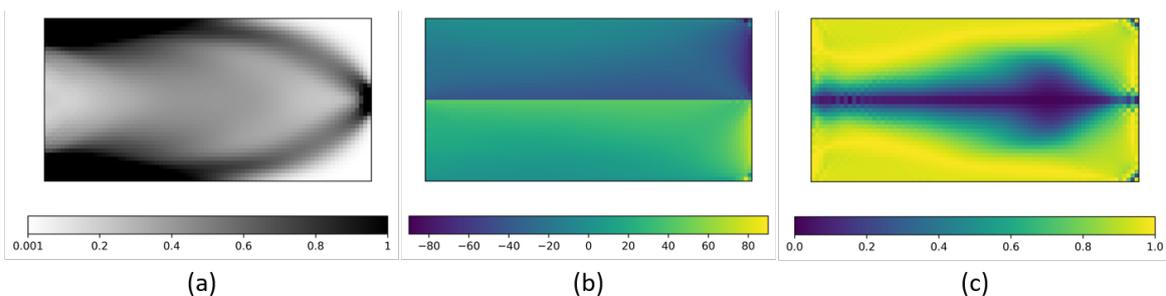


FIGURE 5 – Initialisation des variables, (a) densité ρ , (b) orientation ϕ_1 et (c) anisotropie η_1 pour la solution présentée en Figures 2-4 (b).

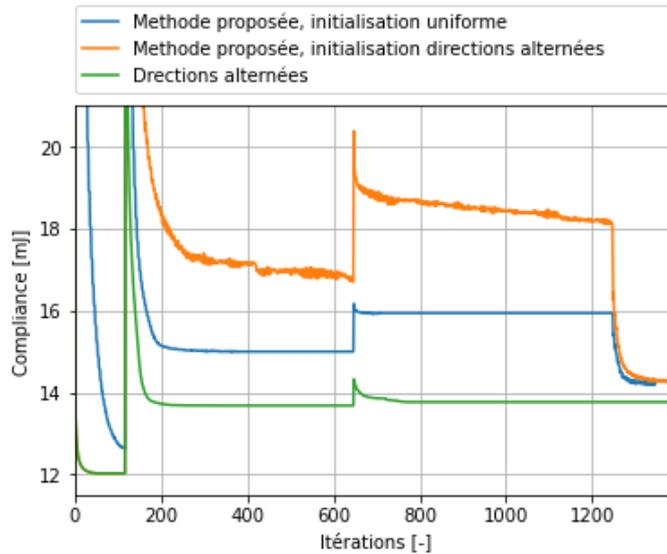


FIGURE 6 – Convergence des optimisations à gradient et des directions alternées, $p=1$ jusqu’à 120 itérations, puis $p=3$ jusqu’à 650 itérations, puis $p=5$ et arrêt du filtre à 1250 itérations.

Il est particulièrement intéressant de remarquer que l’optimisation à gradient parvient à retrouver un résultat théorique exploité directement dans le cas de l’algorithme des directions alternées, à savoir que les orientations ϕ_1 optimales sont alignées avec le maximum de la valeur absolue des contraintes principales. Par ailleurs, les résultats obtenus soulignent l’importance de l’initialisation des variables et de la première étape de l’optimisation, à $p=1$. En effet, lorsque l’exposant SIMP vaut $p=1$, un nombre suffisant d’itérations est nécessaire pour permettre l’interaction de l’anisotropie et de la topologie avant de converger vers une solution. La bascule vers une valeur supérieure de l’exposant p fait basculer l’optimisation vers un optimum local entièrement déterminé par la solution de l’étape initiale $p=1$. De plus, il a été noté que le changement de variable autorisé au cours d’une itération devait être limité à un petit pas dans le cas des variables d’anisotropie, avec la limite la plus stricte appliquée aux orientations, pour converger vers des optimisations stables et réussies. Sinon, des oscillations importantes apparaissent, conduisant potentiellement à des solutions finales sous-optimales. La solution optimisée à l’issue du processus est donc très largement dépendante des réglages employés à l’étape $p=1$ pour l’optimiseur à gradient.

Supprimer le filtre dans les dernières itérations de l’optimisation permet de comparer les différents résultats au même niveau de gris. En effet, un filtre en densité introduira toujours un flou aux contours de la topologie. Ainsi, comme dans le cas de la Figure 2 (b), lorsque plus de barres sont présentes, la longueur de contour augmente et ainsi que la quantité de densités intermédiaires. Et puisque précisément ces densités intermédiaires sont pénalisées dans l’approche SIMP, elles ont un effet important sur la compliance et faussent la comparaison entre des solutions dont les niveaux de gris seraient différents. Ceci est bien montré dans la convergence de la Figure 6, et la différence de compliance à la fin de SIMP $p=5$ avec filtre et sans filtre, à l’itération 1250. Une solution à cela pourrait soit être d’utiliser une projection des densités à 0 ou 1 au cours des itérations, comme fait par exemple par Gao *et al.* [4], soit d’utiliser un filtre énergétique [3]. Cette dernière option a été utilisée dans les résultats de Ranaivomiarana *et al.* [7], et également éprouvé par les auteurs. Elle permet d’atteindre une quantité de densités intermédiaires similaire à celle obtenue ici par la suppression du filtre dans les dernières itérations. D’autres considérations pour un filtre énergétique pourraient être d’imposer une continuité de la rigidité. En effet, l’approche actuelle ne filtre pas l’anisotropie ou les orientations, chose qui empêcherait très probablement le comportement en damier constaté ici pour la distribution d’anisotropie. Un filtre similaire à celui utilisé pour la densité pourrait être employé, mais en raison de son effet de moyenne et de nature périodique des variables d’anisotropie, il conduit à des solutions sous-optimales. Par exemple, une orientation de 90° et de -90° ont la même signification physique en considérant le tenseur d’élasticité, pourtant leur moyenne est de 0° , ce qui change radicalement la solution pour un matériau anisotrope. Par conséquent, un filtre d’énergie pourrait être une solution pertinente pour s’affranchir de ce problème. Enfin, les travaux en

cours étudient la restriction aux limites géométriques des paramètres polaires, définissant l'espace des stratifiés composites [9].

4 Conclusion

Cette recherche a porté sur la mise en place d'une méthode d'optimisation basée sur un algorithme de gradient pour l'optimisation simultanée de la topologie et de l'anisotropie. Celle-ci a été paramétrée au moyen des paramètres polaires et restreinte à un comportement orthotrope. En contraignant une variable d'anisotropie à une valeur constante optimale, les bornes thermodynamiques ont pu être réécrites sous la forme d'un simple encadrement sur le module anisotrope restant. Compte-tenu de la différente régularité des réponses mécanique par rapport aux variables employées, une méthode d'optimisation a été mise en place, combinant une approximation de type MMA ou GCMMA selon la nature des variables considérées. La méthode ainsi développée a été implémentée et mise en œuvre sur le cas d'une poutre console pour en valider avec succès les résultats. En fonction de l'initialisation du problème, différentes topologies finales sont obtenues, correspondant à des solutions obtenues par l'algorithme des directions alternées [7], avec des compliances similaires. Cela implique que le problème a plusieurs optimums locaux similaires, vers lesquels l'approche proposée a su converger. Cela offre une perspective future d'utilisation de la méthode avec des contraintes d'optimisation supplémentaires telles que la résistance ou le flambement.

Remerciements

Les auteurs remercient STELIA Aerospace pour le financement de ces travaux.

Références

- [1] M. Bendsøe, O. Sigmund. *Topology Optimization*, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [2] M. Bruyneel, P. Duysinx, C. Fleury. *A family of MMA approximations for structural optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 263-276, 2002.
- [3] B. Desmorat. *Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 1132-1144, 2007.
- [4] X. Gao, Y. Li, H. Ma, G. Chen. *Improving the overall performance of continuum structures : A topology optimization model considering stiffness, strength and stability*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 112660, 2020.
- [5] M. Montemurro, A. Pagani, G. A. Fiordilino, J. Pailhès, E. Carrera. *A general multi-scale two-level optimisation strategy for designing composite stiffened panels*, Composite Structures, Elsevier, 968-979, 2018.
- [6] D. Peeters, D. van Baalen, M. Abdallah. *Combining topology and lamination parameter optimisation*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 105-120, 2015.
- [7] N. Ranaivomiarana, F.-X. Irisarri, D. Bettebghor, B. Desmorat. *Concurrent optimization of material spatial distribution and material anisotropy repartition for two-dimensional structures*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, Springer, 133-146, 2019.
- [8] K. Svanberg. *The method of moving asymptotes — a new method for structural optimization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 359-373, 1987.
- [9] P. Vannucci. *A note on the elastic and geometric bounds for composite laminates*, Journal of Elasticity, Springer, 199-215, 2013.
- [10] G. Verchery. *Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité*, Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportement Mécanique des Solides Anisotropes, Springer, 93-104, 1982.