

# Modélisation du comportement statique d'un roulement à billes en présence de défauts de forme sur les bagues

C. Jeannot<sup>1,2</sup>, G. Chevallier<sup>1</sup>, E. Sadoulet-Reboul<sup>1</sup>,  
S. Dufrenoy<sup>2</sup>, C. Lebreton<sup>2</sup>

<sup>1</sup> FEMTO-ST, Département de Mécanique Appliquée, Université de Bourgogne Franche-Comté

<sup>2</sup> ADR, groupe ALCEN contact : cjeannot@adr-alcen.com

**Résumé** — L'étude des roulements à billes de haute précision nécessite le développement de modèles de plus en plus raffinés. La prise en compte de défauts de forme est ainsi un enjeu majeur. En effet, ces derniers ont un impact sur les performances du roulement car ils peuvent affecter la rigidité, la stabilité de l'axe de rotation du roulement ou encore le couple de frottement. Pour répondre à cette problématique, une méthode énergétique hautement modulaire a été développée. Elle permet de quantifier l'impact des défauts sur les paramètres géométriques et mécaniques, à l'échelle macroscopique et mésoscopique.

**Mots clés** — roulement à billes, défauts de forme, méthode énergétique.

## 1 Introduction

Les roulements à billes sont des composants mécaniques largement utilisés dans les applications de hautes technologies. Principalement présents dans les systèmes de positionnement de précision, ils possèdent une faible vitesse de rotation. Une étude statique est alors suffisante pour étudier leur comportement. La précision de ces roulements impactant les performances du mécanisme sur lequel ils sont montés, un dimensionnement précis de la géométrie interne est nécessaire. Bien que les procédés de fabrication des bagues connaissent de constantes améliorations, la tenue des tolérances géométriques des gorges reste complexe. Des ondulations peuvent alors être observées dans les gorges du roulement. Il est donc primordial de pouvoir évaluer l'impact de ces défauts de forme périodiques sur les performances du roulement.

Différentes approches ont été développées pour étudier l'impact des défauts d'ondulation présents dans les gorges des roulements. Jang et Jeong [4] proposent un modèle à cinq degrés de liberté où ils définissent des ondulations sur les billes et les bagues pour une étude vibratoire du roulement. L'ondulation de la surface est modélisée par une variation locale du rayon. Changqing et Qingyu [1] utilisent une méthode similaire à laquelle ils ajoutent l'impact des jeux internes. Xu et Li [10] étudient quant à eux l'impact des défauts sur l'ensemble du système sur lequel les roulements sont montés. Ils ont constaté, en prenant l'exemple d'un système bielle-manivelle, que le nombre de billes joue un rôle important sur la façon dont les défauts peuvent accentuer les vibrations. Tous ces modèles s'accordent pour considérer le rayon de la bague comme une fonction sinusoïdale ou une décomposition en série de Fourier. Cette variation du rayon en fonction de la position angulaire entraîne des modifications sur les paramètres géométriques et mécaniques du roulement. Liu a fait une étude bibliographique en reprenant les modèles existants les plus pertinents qui prennent en compte les défauts de forme des bagues. [7]. Cette synthèse lui a permis de les regrouper en deux catégories : ceux qui ne considèrent que des variations géométriques selon la position et ceux qui considèrent, en plus, une modification de la rigidité. Wang [9] explique que de nombreux modèles dynamiques font l'hypothèse d'un angle de contact constant pendant la résolution. Il montre alors que les angles de contact doivent être calculés lors de la résolution des équations d'équilibre non linéaires pour obtenir des résultats précis, lorsque l'on introduit des défauts d'ondulation. Enfin, Liu étudie comment ces défauts peuvent modifier le couple de frottement, en prenant en compte une variation du rayon des bagues et des billes [6].

L'objectif de cet article est de présenter une nouvelle formulation pour résoudre l'équilibre statique d'un roulement avec défauts, intégrant des modifications géométriques mais aussi des forces tangentielles au contact, habituellement négligées. En effet, la présence d'ondulations sur les bagues modifie localement la direction normale au contact. Or, dans la littérature, les modèles de contact entre les billes et les bagues sont basés sur la théorie de Hertz. Ainsi, ils supposent que les directions normales au contact entre la bille et chacune des bagues sont identiques afin de pouvoir réaliser l'équilibre de la bille. Le nouveau modèle mis en place permet de s'affranchir de cette hypothèse et ainsi de quantifier le moment résiduel du roulement, directement lié à la variation du couple de frottement.

La résolution de l'équilibre est réalisée à l'aide d'une méthode énergétique, spécifiquement implémentée. Elle permet en effet d'écrire l'équilibre des billes et des bagues en une seule équation et offre une haute modularité de par la possibilité d'ajouter ou supprimer des contraintes ou des énergies selon le type d'étude souhaité. Jovanović et Tomović [5] ont déjà proposé un modèle mathématique pour une étude dynamique du roulement où les équations du mouvement sont obtenues à partir des équations de Lagrange. Ce modèle a été réalisé en 2D pour un roulement à géométrie parfaite. Gao [2] a également développé un modèle énergétique en présence d'un défaut local pour déterminer son impact sur le comportement dynamique du système. Harsha [3] utilise aussi une formulation énergétique pour étudier l'influence des défauts d'ondulation sur le comportement vibratoire d'un roulement à deux degrés de libertés. L'expression de l'énergie de déformation élastique au contact est supposée linéaire et associée à des efforts dans la direction normale. Cette expression est étendue, dans le modèle proposé, à des efforts non-linéaires dans la direction normale mais aussi à des forces tangentielles. La résolution de ce problème permet de quantifier la variation de nombreux paramètres à différentes échelles. Les résultats présentés soulignent l'importance de la modélisation des défauts de forme, notamment afin d'obtenir une meilleure prédiction de certains paramètres de conception critiques.

## 2 Modélisation géométrique d'un roulement à billes avec défauts de forme

La modélisation de la géométrie du roulement est l'une des étapes les plus importantes pour obtenir un modèle de contact précis. Cette étude est basée sur un paramétrage en 2D comme présenté sur la Figure 1. Chaque élément du roulement est défini par la position de son centre ( $O_o$  pour la bague extérieure,  $O_i$  pour la bague intérieure et  $O_b$  pour les billes) et un rayon ( $R_o$  pour la bague extérieure,  $R_i$  pour la bague intérieure et  $D_w/2$  pour les billes). La bague extérieure est considérée comme étant fixe et un repère global  $R_{OR}$  est associé à son centre. La bague intérieure est soumise à un chargement extérieur  $\vec{F}_{ext}$ . Pour chaque contact, deux points  $C_{b_k}$  et  $C_k$  sont définis, appartenant respectivement à la bille et à la bague. Selon le contact, c'est-à-dire entre la bille et la bague extérieure ou la bille et la bague intérieure,  $k = o$  ou  $k = i$ . Ces points sont appelés, par abus de langage, points de contact, bien qu'ils n'appartiennent pas réellement à la zone de contact mais plutôt aux solides non déformés. Il s'agit en réalité de points permettant de calculer les forces de contact. La position de tous ces points est exprimée par les vecteurs suivants, dans le repère global  $R_{OR}$ , où  $j$  correspond au numéro de la bille :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_o O_{b_j}} &= R_j \begin{pmatrix} \cos \psi_j \\ \sin \psi_j \end{pmatrix} & \overrightarrow{O_o O_i} &= \vec{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_{r_y} \\ \delta_{r_z} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{o_j}}} &= \frac{D_w}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_{o_j} \\ \sin \theta_{o_j} \end{pmatrix} & \overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{i_j}}} &= \frac{-D_w}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_{i_j} \\ \sin \theta_{i_j} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{C_{b_{o_j}} C_{o_j}} &= \overline{\overline{P}}_{C_{o_j} \rightarrow OR} \begin{pmatrix} \delta_{n_{o_j}} \\ \delta_{t_{o_j}} \end{pmatrix} & \overrightarrow{C_{b_{i_j}} C_{i_j}} &= \overline{\overline{P}}_{C_{i_j} \rightarrow OR} \begin{pmatrix} \delta_{n_{i_j}} \\ \delta_{t_{i_j}} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{O_o C_{o_j}} &= R_{o_j} \begin{pmatrix} \cos \psi_{o_j} \\ \sin \psi_{o_j} \end{pmatrix} & \overrightarrow{O_i C_{i_j}} &= R_{i_j} \begin{pmatrix} \cos \psi_{i_j} \\ \sin \psi_{i_j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\overline{\overline{P}}_{C_{o_j} \rightarrow OR}$  et  $\overline{\overline{P}}_{C_{i_j} \rightarrow OR}$  les matrices de passage du repère local au contact au repère global  $R_{OR}$  définies par :

$$\overline{\overline{P}}_{C_{o_j} \rightarrow OR} = \begin{bmatrix} -\cos \psi_{o_j} & -\sin \psi_{o_j} \\ -\sin \psi_{o_j} & \cos \psi_{o_j} \end{bmatrix} ; \quad \overline{\overline{P}}_{C_{i_j} \rightarrow OR} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{i_j} & \sin \psi_{i_j} \\ \sin \psi_{i_j} & -\cos \psi_{i_j} \end{bmatrix}$$

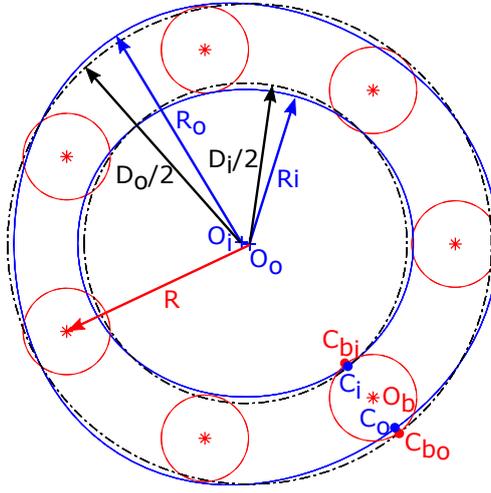


FIGURE 1 – Définition de la géométrie du roulement

Afin d'appliquer des défauts de forme périodiques sur les bagues, le rayon de ces dernières est exprimé à l'aide d'une décomposition en série de Fourier telle que :

$$R_k = \frac{D_k}{2} + \sum_n A_{wav_{k_n}} \cos(\omega_{k_n} \psi_k + \phi_{k_n}), \quad (1)$$

où  $A_{wav}$  correspond à l'amplitude de l'ondulation,  $\omega$  l'ordre du défaut et  $\phi$  le déphasage de celui-ci. L'indice  $k$  fait référence à la bague ( $k = o$  pour celle extérieure et  $k = i$  pour celle intérieure) et l'indice  $n$ , au numéro du défaut. Dans l'exemple sur la Figure 1, la bague extérieure a un défaut de triangulation ( $\omega_o = 3$ ) et la bague intérieure est ovalisée ( $\omega_i = 2$ ).

Le modèle présenté a été développé en 2D afin de permettre une meilleure compréhension et visualisation des phénomènes mis en jeu en présence d'ondulations. Il peut tout à fait être étendu en 3D avec le même raisonnement. Néanmoins, la définition de la géométrie doit être faite rigoureusement pour obtenir un modèle représentatif de la surface d'une gorge. Pour cela, les gorges du roulement peuvent être modélisées par des tores avec ondulations, sans oublier de prendre en compte la réorientation de la section transversale. En effet, pour obtenir une modélisation précise, il n'est pas possible d'uniquement projeter l'ondulation 2D à un angle de contact donné, comme cela est fait dans beaucoup de modèles présents dans la littérature.

### 3 Équilibre statique du roulement par formulation énergétique

#### 3.1 Formalisme énergétique

Dans cette étude, les bagues sont considérées comme étant infiniment rigides. Seules les déformations au contact sont modélisées. Déterminer l'équilibre statique d'un roulement revient à minimiser les énergies en jeu sous certaines contraintes. Ainsi, grâce à l'utilisation d'une formulation énergétique, il est possible de regrouper l'équilibre de chacune des billes et des bagues en une seule équation. Cette dernière, nommée fonctionnelle du problème, s'écrit sous la forme :

$$\Pi = \sum_{j=1}^Z (E_{o_j} + E_{i_j}) + \sum_m \lambda_m \cdot \mathcal{C}_m - W_{ext} \quad (2)$$

avec  $Z$ , le nombre de billes du roulement,  $E_o$  et  $E_i$  l'énergie potentielle de déformation au contact respectivement de la bague extérieure et intérieure et  $W_{ext}$  le travail des efforts extérieurs. Ces énergies sont les seules nécessaires en raison des hypothèses du modèle : bagues rigides et étude statique. Le coefficient  $\lambda_m$  correspond au multiplicateur de Lagrange permettant d'introduire la contrainte  $\mathcal{C}_m$ . Si cette dernière

est homogène à un déplacement alors  $\lambda_m$  représente une force. Il est ainsi possible de retrouver les efforts qui auraient été utilisés pour écrire chacune des équations d'équilibre ou des combinaisons linéaires de celles-ci. Dans le cas de la méthode énergétique, l'objectif est de minimiser la fonctionnelle en la dérivant par rapport à chacune des variables du problème. Annuler ces dérivées permet donc de déterminer l'équilibre.

### 3.2 Paramétrage du modèle

Le modèle développé permet de déterminer l'équilibre du roulement pour une configuration de chargement extérieur et une position des défauts données. Pour cela, le but est de déterminer la position relative des solides permettant de minimiser l'énergie. Néanmoins, la cage n'étant pas modélisée, une contrainte sur la position angulaire des billes est nécessaire. En effet, les billes ne peuvent se déplacer que d'une distance équivalente au diamètre d'alvéole. Dans cette étude, les billes sont dans un premier temps supposées équi-réparties sur le roulement. Cette contrainte s'écrit alors, pour chaque bille  $j$ , sous la forme :

$$c_{b_j} = 2\pi \frac{j-1}{Z} - \psi_j \quad (3)$$

où  $Z$  correspond au nombre de billes du roulement et  $\psi_j$  la position angulaire de la bille  $j$ .

Cette contrainte peut paraître plus restrictive que de permettre un déplacement de la bille au sein de l'alvéole de la cage. Cependant, dans la réalité, la position de la bille à l'équilibre  $N$  dépendra fortement de la position antérieure où elle se trouvait à l'équilibre  $N-1$ . Cela s'explique par le fait que pour qu'elle puisse se déplacer angulairement, il faut qu'elle subisse une force tangentielle supérieure à  $\mu Q_n$ , avec  $Q_n$  l'effort normal. Nous verrons par la suite que cette configuration est très rare, et qu'imposer la position de la bille  $j$  à un angle  $\psi_j$  ne semble donc pas aberrant. Ceci revient ainsi à faire une hypothèse sur la position de la bille à l'état  $N-1$ .

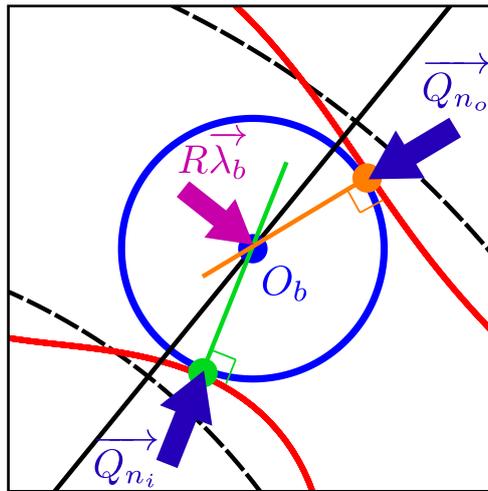


FIGURE 2 – Équilibre d'une bille

La prise en compte de cette contrainte dans la fonctionnelle du problème est possible grâce à l'ajout d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{b_j}$ . Intéressons-nous à sa signification physique. Maintenir la bille à une position angulaire donnée est équivalent à appliquer un effort pour empêcher ce déplacement. Si l'on suppose, dans un premier temps, que la bille ne subit que des efforts normaux au contact, équilibrer la bille revient à équilibrer deux efforts normaux issus de chacun des contacts ainsi qu'une force au centre de la bille, introduite par la contrainte comme représentée sur la figure 2. Or, dans la réalité, aucune force n'est appliquée sur le centre de la bille. Le maintien de la bille est permis par des efforts au contact. L'objectif est donc de retranscrire cette force fictive par des efforts tangentiels au contact. En effet, il est également possible de constater sur la figure 2 qu'en présence de défauts de forme, les deux directions normales au contact ne sont plus alignées. Il est donc impossible d'équilibrer la bille uniquement à partir des deux efforts normaux  $Q_{n_o}$  et  $Q_{n_i}$ , ce qui justifie la nécessité de permettre l'apparition de forces tangentielles au contact.

### 3.3 Modélisation du contact

Suite aux observations détaillées dans la section précédente, une nouvelle modélisation du contact est nécessaire afin d'exprimer le plus fidèlement possible les efforts subis par la bille. Le contact entre une bille et une bague est modélisé par un ressort non-linéaire dans la direction normale et un ressort linéaire dans la direction tangentielle. Leur raideur respective est déterminée à partir de la théorie de Hertz et d'un modèle de Dahl linéarisé comme représenté sur la figure 3.

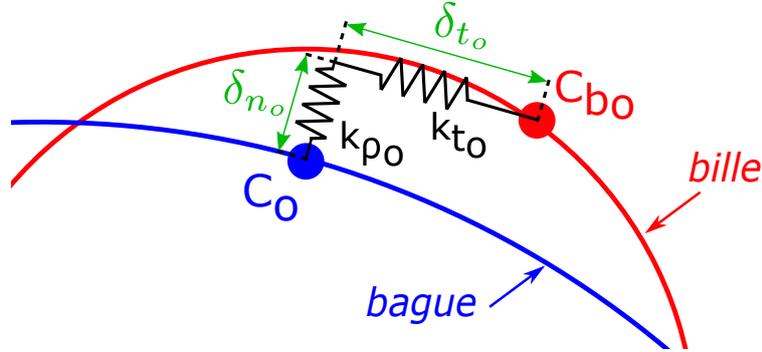


FIGURE 3 – Modélisation du contact bille/bague

#### 3.3.1 Modèle de Hertz

Dans le cadre de l'étude des roulements à billes, la majorité des modèles de contact sont basés sur la théorie de Hertz. Cette dernière considère que pour deux corps en contact, la force résultante est orientée dans la direction normale à la surface de contact. Dans le cas d'un contact entre une bille et la bague extérieure, l'énergie de déformation engendrée par cette force s'exprime par :

$$E_{n_o} = \int Q_{n_o} d\delta_{n_o} = \int k_{p_o} \max(0, \delta_{n_o})^{3/2} d\delta_{n_o} = \frac{2}{5} k_{p_o} \max(0, \delta_{n_o})^{5/2}, \quad (4)$$

avec  $k_{p_o}$  la raideur de contact dans la direction normale et  $\delta_{n_o}$ , la déflexion dans cette même direction. La même expression peut être écrite pour un contact entre la bille et la bague intérieure.

L'utilisation de la fonction max permet de définir l'état du contact. En effet, en raison du paramétrage géométrique défini dans la section 3.2, si la déflexion est négative cela signifie que la bille et la bague ne sont pas en contact. Cette configuration ne génère donc pas d'effort de contact. Cette stratégie permet ainsi de prendre en compte le phénomène de décollement dans le modèle.

#### 3.3.2 Modèle de Dahl linéarisé

En présence de forces tangentielles au contact, le modèle de Hertz n'est plus suffisant. Un modèle de frottement est alors nécessaire afin de permettre l'équilibre de la bille. Certains modèles, tels que celui de Coulomb, permettent de définir des critères d'adhérence ou de glissement mais ne donnent pas d'information sur les paramètres de contact dans le cône de frottement. Le modèle de Dahl, quant à lui, définit l'évolution de la force de frottement en fonction de la déflexion, en introduisant une loi de comportement. En corrélant le modèle empirique de Dahl et le modèle constitutif théorique de Mindlin, il est alors possible d'écrire un modèle de Dahl dont les paramètres dépendent de la géométrie du contact et des matériaux et définissent ainsi une loi de comportement physique [8]. Pour des raisons de simplicité, sachant que la déflexion tangentielle restera faible comparée à la valeur  $\mu Q_n$ , le modèle utilisé pour le calcul de la force tangentielle  $F_t$  est linéarisé. L'énergie associée prend alors la forme suivante :

$$E_t = \int F_t d\delta_t = \int k_t \delta_t d\delta_t = \frac{1}{2} k_t \delta_t^2, \quad (5)$$

où  $k_t$  représente la raideur tangentielle correspondant à la pente de la courbe du modèle de Dahl, pour  $F_t = 0$  et  $\delta_t$ , la déflexion tangentielle au contact.

### 3.4 Expression de la fonctionnelle du problème

La résolution de l'équilibre statique est réalisée en deux étapes. Dans la première, la position angulaire de la bille est imposée. La bille est alors équilibrée à l'aide de deux forces normales à chacun des contacts et d'une force fictive au centre de la bille. La deuxième étape a pour objectif de transformer cette force en efforts tangentiels au contact. Pour cela, les points de contact obtenus sur chacun des solides sont fixes mais les solides peuvent bouger les uns par rapport aux autres.

#### • Etape 1 : Position angulaire de la bille imposée

Dans cette étape, l'objectif est de déterminer la position relative des solides ainsi que les points de contact associés. Au vu du paramétrage géométrique défini dans la section 2, les variables  $\vec{V}_1$  du problème sont, pour chaque bille, les angles  $\psi_o, \psi_i, \theta_o$  et  $\theta_i$  permettant de positionner les points de contact, les déflexions au contact  $\delta_{n_o}$  et  $\delta_{n_i}$  reliant les billes et les bagues, le rayon  $R$  et l'angle  $\psi$  positionnant la bille et enfin les déflexions du roulement  $\vec{\delta} = (\delta_{r_y}, \delta_{r_z})$  représentant la position relative des deux bagues. Le but est ainsi de résoudre :

$$\min_{\vec{V}_1} \Pi_1 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi_1}{\partial \vec{V}_1} = \vec{0}, \quad (6)$$

où la fonctionnelle est définie par :

$$\Pi_1 = \sum_{j=1}^Z \left( E_{n_{o_j}} + E_{n_{i_j}} + \overrightarrow{\lambda_{OR_j}} \cdot \overrightarrow{C_{OR_j}} + \lambda_{n_{o_j}} C_{n_{o_j}} + \overrightarrow{\lambda_{IR_j}} \cdot \overrightarrow{C_{IR_j}} + \lambda_{n_{i_j}} C_{n_{i_j}} + \lambda_{b_j} C_{b_j} \right) - W_{ext}. \quad (7)$$

L'équation 7 contient ainsi l'énergie de déformation pour chacun des contacts dans la direction normale  $E_{n_o}$  et  $E_{n_i}$ , le travail des efforts extérieurs défini par :  $W_{ext} = \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \vec{\delta}$ , et des contraintes sur chacune des billes :  $\overrightarrow{C_{OR_j}}, \overrightarrow{C_{IR_j}}, C_{n_{o_j}}$  et  $C_{b_j}$ .

La contrainte  $C_{b_j}$  permet l'équi-répartition des billes et a été définie dans la section 3.2. Les contraintes  $\overrightarrow{C_{OR_j}}$  et  $\overrightarrow{C_{IR_j}}$  correspondent à des relations de fermetures géométriques permettant de lier les déflexions au contact aux points de contact appartenant à chacun des solides. Elles ont respectivement pour expression :

$$\overrightarrow{C_{OR_j}} = \overrightarrow{O_o O_{b_j}} + \overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{o_j}}} + \overrightarrow{C_{b_{o_j}} C_{o_j}} + \overrightarrow{C_{o_j} O_o} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{C_{IR_j}} = \overrightarrow{O_o O_{b_j}} + \overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{i_j}}} + \overrightarrow{C_{b_{i_j}} C_{i_j}} + \overrightarrow{C_{i_j} O_i} + \overrightarrow{O_i O_o}. \quad (9)$$

Enfin, les contraintes  $C_{n_{o_j}}$  et  $C_{n_{i_j}}$  permettent la recherche de déflexions au contact dans la direction normale, en cherchant les points de contact où le vecteur normal à la bille est colinéaire à celui normal à la bague. En définissant  $k=o$  ou  $k=i$  selon le contact, cette contrainte se traduit mathématiquement par :

$$C_{n_{k_j}} = \frac{\overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{k_j}}}}{\overrightarrow{O_{b_j} C_{b_{k_j}}}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{O_k C_{k_j}}}{\partial \psi_{k_j}}. \quad (10)$$

#### • Etape 2 : Relaxation

Cette étape consiste en une relaxation des contraintes où la position angulaire de la bille redevient libre. Les points de contact obtenus à l'étape précédente sont conservés mais chacun des solides peut se déplacer. Les variables  $\vec{V}_2$  du modèle sont donc :  $\theta_o, \theta_i, \delta_{n_o}, \delta_{t_o}, \delta_{n_i}, \delta_{t_i}, R, \psi$  pour chacune des billes, ainsi que les déflexions du roulement  $\vec{\delta}$ . Comme précédemment, l'objectif est de minimiser la fonctionnelle par rapport à chacune des variables sachant que cette dernière a pour expression :

$$\Pi_2 = \sum_{j=1}^Z \left( E_{n_{o_j}} + E_{t_{o_j}} + E_{n_{i_j}} + E_{t_{i_j}} + \overrightarrow{\lambda_{OR_j}} \cdot \overrightarrow{C_{OR_j}} + \overrightarrow{\lambda_{IR_j}} \cdot \overrightarrow{C_{IR_j}} + \lambda_{\theta_j} C_{\theta_j} \right) - W_{ext}. \quad (11)$$

D'après l'équation 11, il est possible de constater qu'il n'y a plus de contraintes sur la position angulaire de la bille, ni sur la direction des déflexions au contact, afin de permettre l'apparition de forces tangentielles. La nouvelle contrainte  $C_{\theta_j}$  permet de conserver les points de contact fixes sur la bille, tout en sachant que cette dernière peut se déplacer. Cette contrainte est définie par :

$$C_{\theta_j} = \theta_{init_j} - \widehat{C_{b_{o_j}} O_{b_j} C_{b_{i_j}}} \quad (12)$$

avec  $\theta_{init_j}$  correspondant à l'angle  $\widehat{C_{b_{o_j}} O_{b_j} C_{b_{i_j}}}$  obtenu à l'issue de l'étape 1.

## 4 Impact des défauts sur les performances du roulement

Afin de quantifier l'impact des défauts de forme sur les paramètres du roulement, deux cas d'étude ont été réalisés sur un roulement ayant les dimensions géométriques présentées dans le tableau 1, un module de Young  $E = 204 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . Afin de modéliser en 2D une première configuration équivalente à un chargement symétrique, les billes positionnées dans le roulement ont un diamètre supérieur à l'espacement entre les bagues. Une deuxième configuration concerne un chargement combiné comme présenté dans le tableau 2. Pour chaque cas, les résultats obtenus pour un roulement à géométrie parfaite sont comparés à ceux d'un roulement ayant un défaut de triangulation de  $0,01 \text{ mm}$  ( $A_{wav_o} = 0,01 \text{ mm}$  et  $\omega_o = 3$ ) sur la bague extérieure et une ovalisation de  $0,01 \text{ mm}$  sur la bague intérieure ( $A_{wav_i} = 0,01 \text{ mm}$  et  $\omega_i = 2$ ), sans déphasage, comme présenté sur la figure 1.

Diamètre bague extérieure	$D_o$	30 mm
Diamètre bague intérieure	$D_i$	20 mm
Diamètre bille	$D_w$	5.1 mm
Nombre de billes	$Z$	7

TABLE 1 – Paramètres géométriques

	$F_{r_y}(N)$	$F_{r_z}(N)$
Chargement symétrique	0	0
Chargement combiné	1000	2500

TABLE 2 – Cas de chargement

Intéressons-nous, dans le cas d'un chargement symétrique, aux efforts au contact. La figure 4 montre que sans défaut toutes les billes ont le même chargement et aucune force tangentielle n'est nécessaire à leur équilibre. En revanche, l'introduction de défauts engendre l'apparition de forces tangentielles ainsi qu'une variation des efforts normaux allant jusqu'à 22% de la valeur sans défaut. Dans le cas de faibles chargements cela peut aller jusqu'à entraîner le décollement de certaines billes, et ainsi modifier le comportement du roulement complet.

Pour un chargement combiné, toutes les billes ne subissent pas le même effort normal, même sans défaut (figure 5). Dans cette configuration, les directions normales au contact n'étant plus alignées de part et d'autre de la bille, des forces tangentielles sont nécessaires à son équilibre. Comme pour un chargement symétrique, l'ajout de défauts de forme entraîne des variations des efforts de contact autour de la valeur sans défaut.

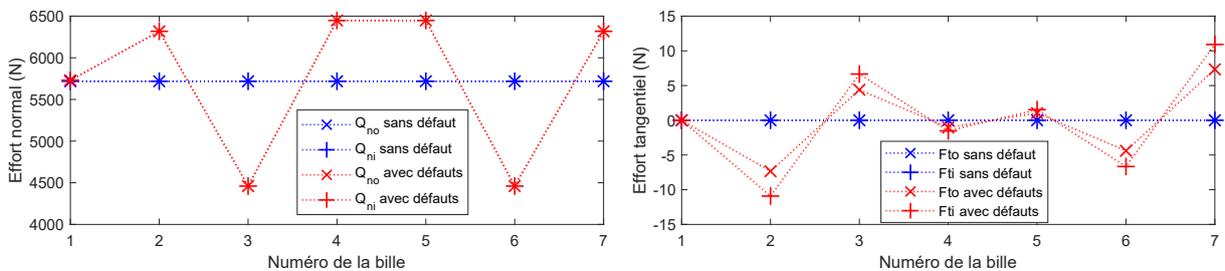


FIGURE 4 – Efforts de contact pour un chargement symétrique

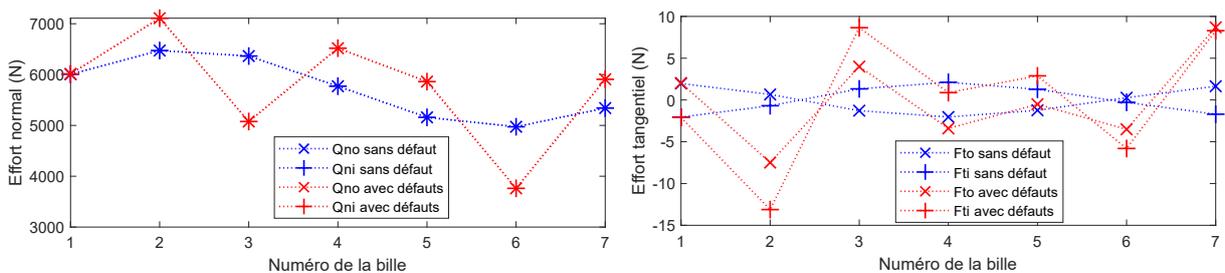


FIGURE 5 – Efforts de contact pour un chargement combiné

Grâce à la modélisation précise du contact, le calcul des forces tangentielles sur chacune des billes permet de déterminer un moment résiduel sur le roulement. Ce dernier rend possible la prédiction des variations du couple de frottement du roulement. Pour modéliser cette évolution au cours de la rotation, une succession d'équilibres peut être réalisée pour différents déphasages angulaires des défauts. Dans notre étude, une seule position est considérée mais elle permet de montrer que pour un roulement à géométrie parfaite, chargé symétriquement, le couple de frottement est nul. Dans cette configuration, l'ajout de défauts augmente légèrement le moment résiduel mais c'est dans le cas d'un chargement combiné que ce dernier devient très important comme présenté dans le tableau 3.

Chargement symétrique		Chargement combiné	
Sans défaut	Avec défauts	Sans défaut	Avec défauts
$-1,09.10^{-11}$ N.mm	$5,83.10^{-3}$ N.mm	$1,08.10^{-3}$ N.mm	3,07 N.mm

TABLE 3 – Moment résiduel

## 5 Conclusion

Cet article présente le développement d'une formulation énergétique très modulaire permettant de résoudre l'équilibre statique d'un roulement à billes en présence de défauts de forme dans les gorges. Alors que les modèles de la littérature considèrent que les efforts normaux au contact restent toujours alignées, cet article explique comment estimer les efforts tangentiels impliqués dans l'équilibre des billes, tout en modélisant la géométrie exacte d'un roulement.

Les résultats obtenus mettent en évidence qu'un chargement symétrique génère les mêmes efforts au contact uniquement dans le cas d'un roulement à géométrie parfaite. Pour un chargement combiné, l'équilibre exact des billes ne peut être réalisé qu'en ajoutant des efforts tangentiels au contact. Les défauts de forme engendrent quant à eux d'importantes variations des paramètres qu'il est nécessaire de prendre en compte pour avoir une modélisation correcte du comportement du roulement. Cela permet de quantifier certains phénomènes tels que le wobble, correspondant à la variation de l'axe de rotation du roulement, la variation du couple de frottement ou encore la durée de vie, directement impactée par les importantes variations des chargements au contact.

## Références

- [1] B. Changqing and X. Qingyu. Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2) :23–48, June 2006.
- [2] P. Gao, L. Hou, R. Yang, and Y. Chen. Local defect modelling and nonlinear dynamic analysis for the inter-shaft bearing in a dual-rotor system. *Applied Mathematical Modelling*, 68 :29–47, April 2019.
- [3] S. P. Harsha, K. Sandeep, and R. Prakash. Non-linear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3) :557–580, May 2004.
- [4] G. Jang and S.-W. Jeong. Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3) :709–726, January 2004.
- [5] J. Jovanović and R. Tomović. Analysis of dynamic behaviour of rotor-bearing system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, 228(12) :2141–2161, August 2014.
- [6] J. Liu, X. Li, S. Ding, and R. Pang. A time-varying friction moment calculation method of an angular contact ball bearing with the waviness error. *Mechanism and Machine Theory*, 148 :103799, June 2020.
- [7] J. Liu, H. Wu, and Y. Shao. A comparative study of surface waviness models for predicting vibrations of a ball bearing. *Science China Technological Sciences*, 60(12) :1841–1852, December 2017.
- [8] N. Peyret, M. Rosatello, G. Chevallier, and J.-L. Dion. A Mindlin derived Dahl friction model. *Mechanism and Machine Theory*, 117 :48–55, November 2017.
- [9] H. Wang, Q. Han, and D. Zhou. Nonlinear dynamic modeling of rotor system supported by angular contact ball bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 85(Supplement C) :16–40, February 2017.
- [10] L. Xu and Y. Li. Modeling of a deep-groove ball bearing with waviness defects in planar multibody system. *Multibody System Dynamics*, 33(3) :229–258, March 2015.