

Effet de l'inertie sur le flambement d'une poutre sous un chargement axial dynamique

A. Alaoui-Tahiri^{1,2}, C. Stolz¹, M. Corus^{1,2}, P. Badel^{1,2}

¹ IMSIA, UMR-CNRS 9219, 828 Bvd des Maréchaux, 91762. claud.stolz@ensta-paris.fr

² EDF R&D, Dpt ERMES, 7 Bvd Gaspard Monge, 91120 Palaiseau, amine.alaoui-tahiri@edf.fr

Résumé — Nous proposons d'analyser l'effet de l'inertie sur le flambement dynamique d'une poutre. Ce flambement dépend de la répartition des inerties massiques, on étudie deux cas particuliers, d'une part une répartition de masses ponctuelles et d'autre part des masses ponctuelles liées à la poutre par des ressorts linéaires. Pour ces répartitions, la propagation des ondes de traction-compression est différente. On analyse la perte potentielle de stabilité à partir d'un problème aux valeurs propres défini à chaque instant. Cette étude est destinée à comprendre le flambement dynamique d'une structure composite contenant des inclusions, massiques et rigides, comme les grilles d'assemblage combustible.

Mots clés — Flambement, onde de compression, inertie

1 Introduction

Lors d'un séisme, au sein des récepteurs des structures complexes comme les grilles d'assemblage combustible peuvent s'impacter et conduire à des dysfonctionnements des systèmes et à leur sécurité. La résistance au flambement est un des principaux critères de dimensionnement pour la sécurité. Le flambement statique étant une manifestation de la perte de stabilité d'une position d'équilibre a fait l'objet de plusieurs travaux pour des structures, avec ou sans imperfections, et pour différents comportements de matériau [1, 4, 3].

Le flambement dynamique est d'une physique plus complexe. La définition même de la stabilité dynamique n'est pas unique [5]. Plusieurs phénomènes ici entrent en jeu, suivant la nature et la vitesse du chargement, la réponse dynamique est de nature différente selon les caractéristiques de chaque structure. La perte de stabilité est ici définie comme la perte potentielle de l'unicité de la réponse dynamique. Pour des vitesses de croissance faible du chargement, une approche classique du mouvement où les effets d'inertie sont faibles permet une étude des équations du mouvement en considérant des évolutions proches d'une évolution quasi-statique. En revanche, pour des vitesses d'impact ou de choc fort, la propagation d'onde doit être considérée [2]. Dans un premier temps, nous allons considérer le cas d'une poutre soumise à un chargement axial dynamique de compression. L'objectif de cette première partie est de montrer la possibilité de l'exploitation d'un critère quasi-statique pour la prédiction du flambement d'une poutre en dynamique. La prise en compte de l'effet de l'inertie montre que le système peut supporter des charges d'amplitude plus élevée qu'en statique si l'effort est appliqué pendant un bref instant.

Dans la suite, nous allons appliquer cette approche dans le cas de la poutre simple puis sur une poutre avec des inerties ajoutées. Les inerties seront ajoutées soit sous forme de masses ponctuelles soit liées par des ressorts à la poutre. L'objectif de cette partie est de comprendre le rôle de l'inertie sur le flambement de la poutre en dynamique rapide.

2 Flambement d'une poutre simple sous un chargement axial dynamique

On considère une poutre simple homogène de longueur L encastrée à l'une de ses extrémités et libre de l'autre. La poutre est soumise à un effort axial $P(t)$ de compression appliqué à son extrémité libre. L'amplitude du chargement est de la forme d'une rampe qui atteint P_0 à t_{ch} puis revient à 0 à $2 \times t_{ch}$ de manière linéaire (Figure 2).



FIGURE 1 – Modèle de la poutre simple

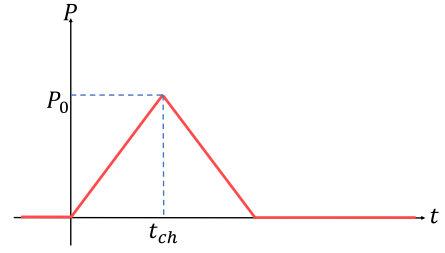


FIGURE 2 – Le chargement considéré

2.1 Équations du système

En utilisant la théorie classique de la poutre d'Euler-Bernoulli, et en considérant les déplacements longitudinaux et transversaux, respectivement u et v , dans les directions x et y , les deux équations de mouvement couplées par l'effort normal sont :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & F(x, t) &= EA \frac{\partial u}{\partial x} \\ -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

où $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ est la célérité des ondes de compression, $t_0 = \frac{L}{c_0}$ est le temps caractéristique, E est le module de Young, ρ la densité, I l'inertie de flexion, A la section de la poutre. $F(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ est l'effort normal dans la poutre, et $u(x, t)$ est la solution de l'équation d'onde longitudinale.

Pour conclure sur la stabilité de la poutre, nous allons nous contenter du critère de la variation seconde de l'énergie potentielle. La résolution de l'équation d'onde détermine l'évolution du champ de contraintes le long de la poutre à chaque instant t . Ce champ de contraintes peut être également obtenu par la méthode des caractéristiques. Le champ de contraintes obtenu est utilisé pour calculer la matrice de rigidité géométrique. Le problème devient alors similaire au problème de flambement statique à chaque pas de temps.

2.2 Résolution de l'équation d'onde

En écrivant le principe des puissances virtuelles, u^* avec un champ de déplacement cinématiquement admissible :

$$\forall u^* \in \mathbb{U}^*, \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = \int_0^L \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (2)$$

$$\begin{cases} u^*(0, t) = 0 & \forall t \\ EA \frac{\partial u^*}{\partial x}(x = L, t) = P(t) \end{cases} \quad (3)$$

En utilisant l'approximation de Ritz : $u^*(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \phi_i^*(x)$ avec $\phi_i^*(x)$ sont les fonctions de formes correspondantes à la traction compression d'une poutre/barre, les matrices de masse et de raideur élémentaires pour le mouvement longitudinal sont obtenues.

La solution temporelle est ensuite calculée explicitement après assemblage des matrices élémentaires et intégration temporelle avec l'application de l'effort qui dépend aussi du temps. Ainsi les déplacements et la vitesse des nœuds à chaque pas de temps sont obtenus. L'exploitation de ces derniers permet de retrouver la répartition du champ de contraintes à chaque instant le long de la poutre. Les résultats numériques peuvent être vérifiés par la méthode des caractéristiques. Ces résultats seront ensuite utilisés pour le calcul des matrices de raideur géométrique en flexion. En guise d'exemple, nous considérons la poutre et le chargement considérés dans la figure 2 appliqué suivant trois manières :

- $P_0 = 2 \times P_{Euler}$ et $t_{ch} = \frac{1}{4} t_0$: chargement très rapide
- $P_0 = 2 \times P_{Euler}$ et $t_{ch} = \frac{1}{2} t_0$: chargement rapide

— $P_0 = 2 \times P_{Euler}$ et $t_{ch} = 2t_0$: chargement lent

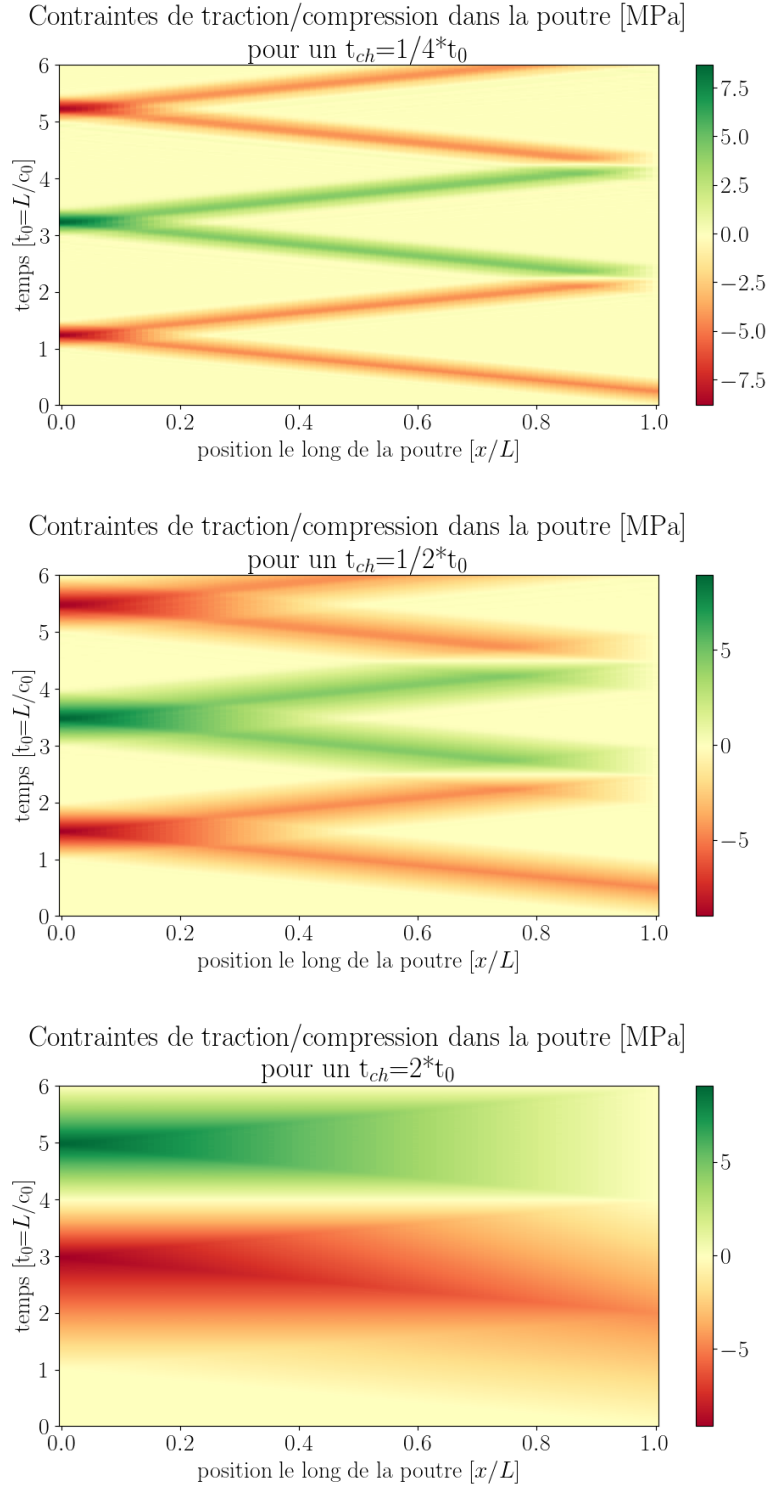


FIGURE 3 – Champs de contraintes pour les trois types de chargement

Dans la figure 3, les contraintes sont obtenues pour les trois pour chaque pas de temps le long de la poutre. Pour le chargement très rapide ($t_{ch} = \frac{1}{4}t_0$), une partie de la poutre seulement est chargée d'où le chargement nécessaire pour atteindre le critère de flambement est plus élevé. En revanche, pour les autres chargements, un flambement est possible car la partie chargée de la poutre est plus longue.

2.3 Flambement de la poutre simple

Contrairement à l'équation du mouvement longitudinal, nous n'allons pas chercher explicitement les déplacements et les rotations de la poutre en flexion. En revanche, nous allons regarder l'évolution des valeurs propres du système pour chaque pas de temps. Dans le cas où le chargement axial est dynamique, on cherche le temps critique de flambement qui correspond au temps de la présence d'une éventuelle instabilité. Pour cela, nous pouvons regarder le problème aux valeurs propres de deux façons :

- le système est dit instable lorsque la partie réelle d'une valeur propre du système devient positive

$$(K_{flex} - K_{geom}(t)) \cdot \mathbf{X} + M_{flex} \ddot{\mathbf{X}} = 0 \quad \det(K_{flex} - K_{geom}(t) + \omega^2 M_{flex}) = 0 \quad (4)$$

- le système est dit instable lorsque le noyau du système en rigidité est de dimension non nulle :

$$(K_{flex} - K_{geom}(t)) \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (5)$$

Les deux conditions ci-dessus sont équivalentes. Les matrices K_{flex} et M_{flex} sont aussi obtenues en écrivant le principe de puissances virtuelles, en utilisant l'approximation de Ritz et les fonctions de formes correspondantes à la flexion d'une poutre. La matrice de rigidité géométrique $K_{geom}(t)$ est calculée à chaque pas de temps.

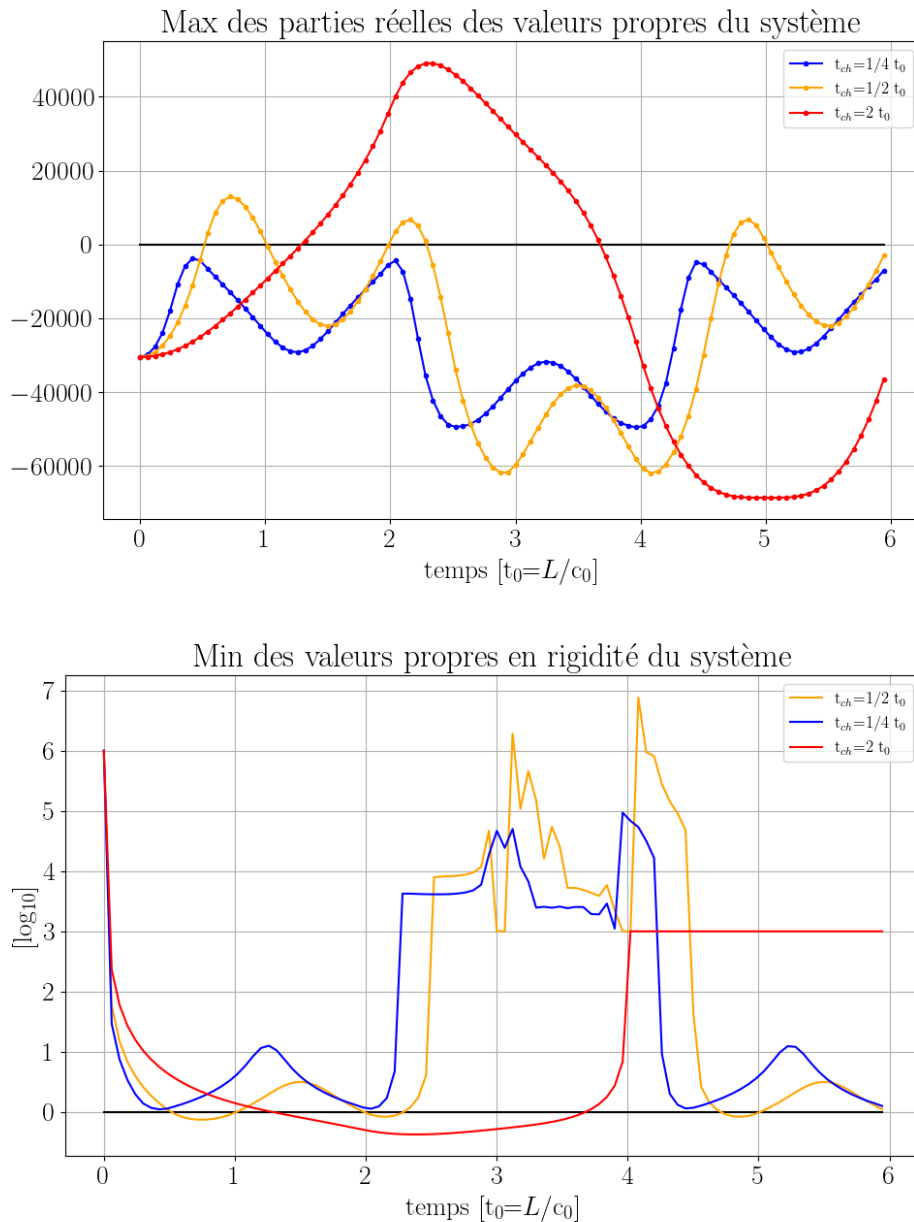


FIGURE 4 – Variation des valeurs propres

D'après les deux figures ci-dessus, on remarque que la poutre peut supporter une charge de compression deux fois la charge critique statique de flambement pour un temps de chargement égale à $\frac{1}{4}t_0$. Pour les deux autres chargements $\frac{1}{2}t_0$ et $2t_0$, le critère indique qu'un flambement potentiel de la poutre est présent. Ces exemples de chargement montrent que le flambement est sensible à la vitesse et à l'histoire du chargement. La réponse est encore différente lors d'un temps de maintien de t_0 (figure 5).

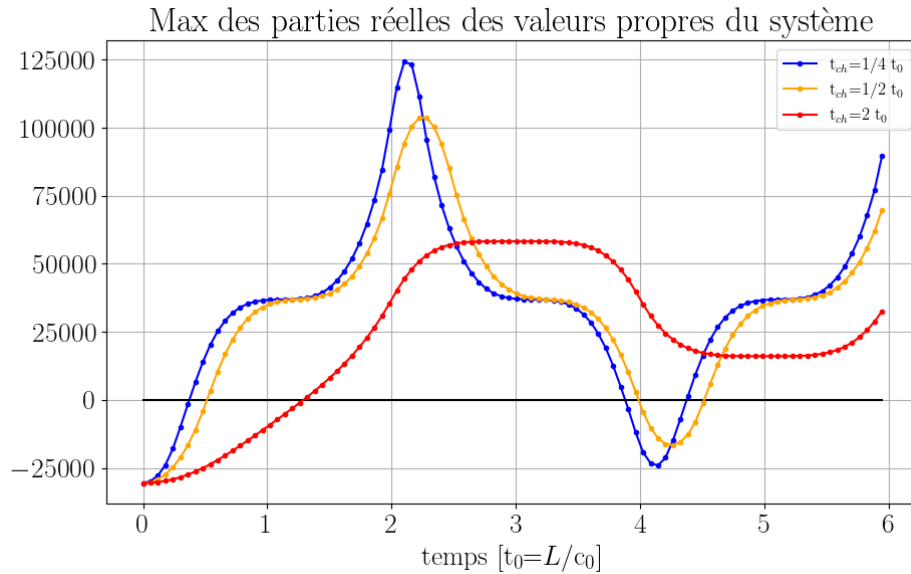


FIGURE 5 – Variation des valeurs propres avec un maintien du chargement

3 Effet de masses ajoutées sur le flambement

3.1 Distribution de masses ponctuelles

Dans cette partie, on considère trois masses ponctuelles situées aux positions $\{L/4; 2L/4; 3L/4\}$ de la poutre. Pour ce modèle un chargement d'amplitude de $1.25 \times P_{Euler}$ et un temps de chargement $t_{ch} = 2 * t_0$ est appliqué. Pour caractériser l'effet des masses ponctuelles, nous comparons la variation des valeurs propres pour différents modèles de poutre où les masses sont égales à $\{0; m/3; m; 5m; 10m\}$ où m est la masse de la poutre.

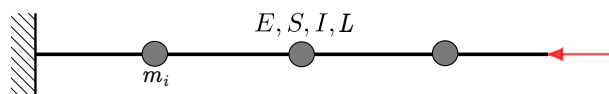


FIGURE 6 – Poutre avec masses ponctuelles

Sur la figure 7, on remarque que le fait d'ajouter des masses importantes (pour un rapport de 5 et 10) permet d'éviter le flambement de la poutre pour le chargement considéré.

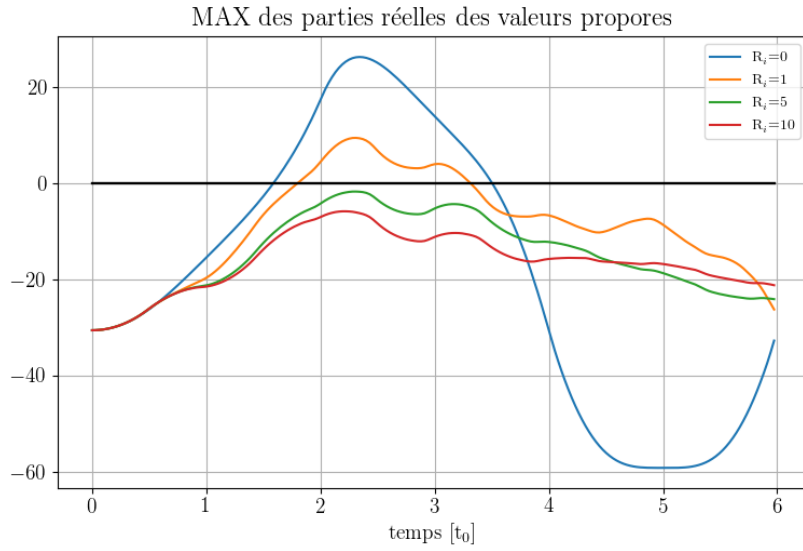


FIGURE 7 – variation des valeurs propres pour différents modèles en 3 masses ponctuelles équidistantes

Les masses ajoutées jouent un rôle d'obstacle pour les ondes, plus la masse est grande moins l'onde est transmise. Le fait d'ajouter des masses ne garantit pas toujours l'absence du flambement. Des calculs menés pour d'autres répartitions de masses ont montré que si la répartition est concentrée autour du point d'application de la charge, le flambement est atteint pour des charges inférieures à la charge critique statique.

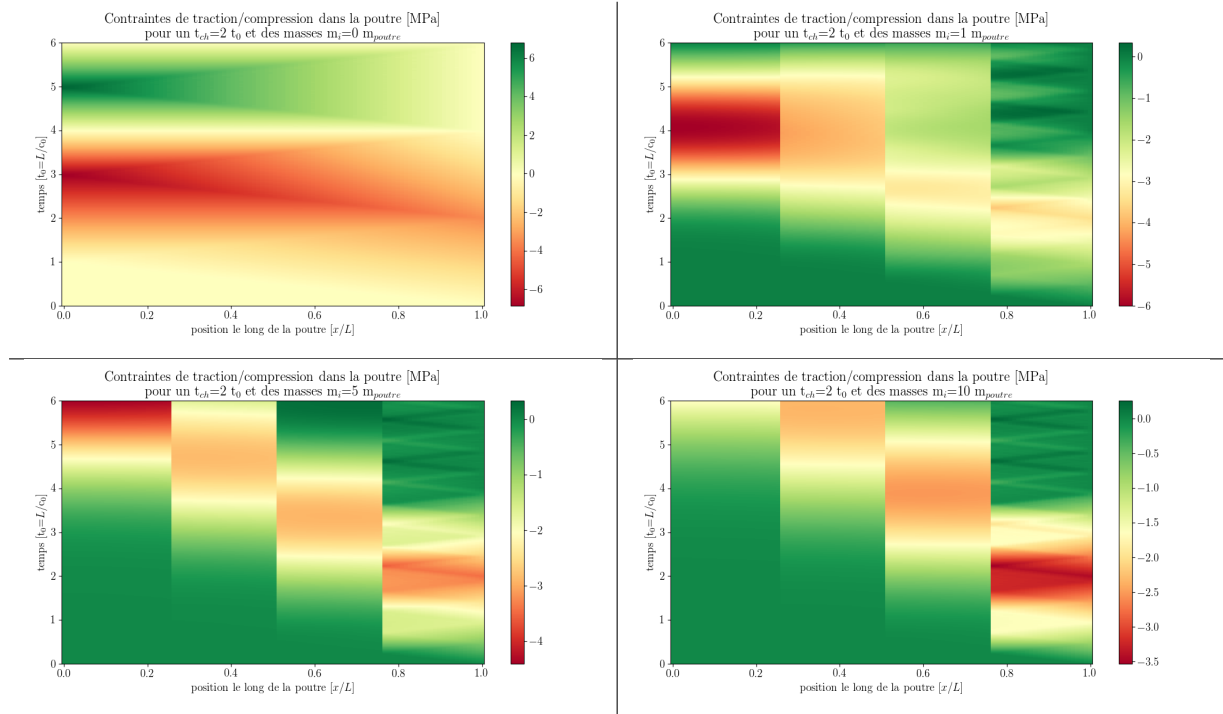


TABLE 1 – Champ de contraintes pour différents rapports de masses

3.2 Masses avec ressorts liés à la poutre

Maintenant, des masses liées par des ressorts à des positions données sur la poutre sont considérées. Les masses ponctuelles auront une valeur égale à la masse de la poutre, les raideurs k_i sont choisies en fonction du rapport r_f de fréquence du système masse-ressort et la première fréquence propre longitudinale de la poutre soit : $r_f = \frac{f_i}{f_{poutre}} = \{0.1; 0.25; 0.5; 1; 2; 5\}$ (le rapport 0 est considéré pour la poutre simple sans masse ajoutée)

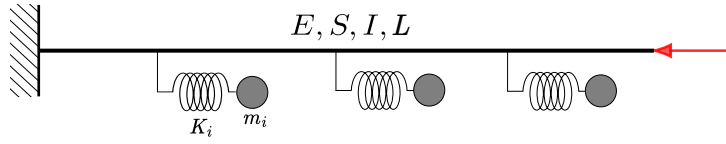


FIGURE 8 – Poutre avec des systèmes masses ressorts

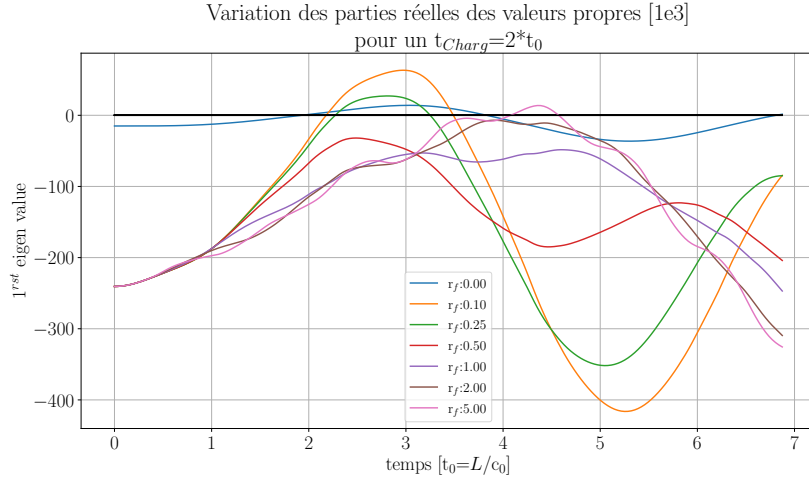


FIGURE 9 – variation des valeurs propres pour différents rapports pour 3 masses équidistantes

D'après la figure 9, on remarque que le critère indique une perte de stabilité potentielle pour tous les rapports de fréquence sauf pour les rapports $\{1; 2\}$. Ceci est expliqué par le fait qu'il y a une interaction entre la propagation de l'onde dans la poutre et le système d'inertie ajouté. L'interaction est importante pour les modèles où les fréquences sont proches.

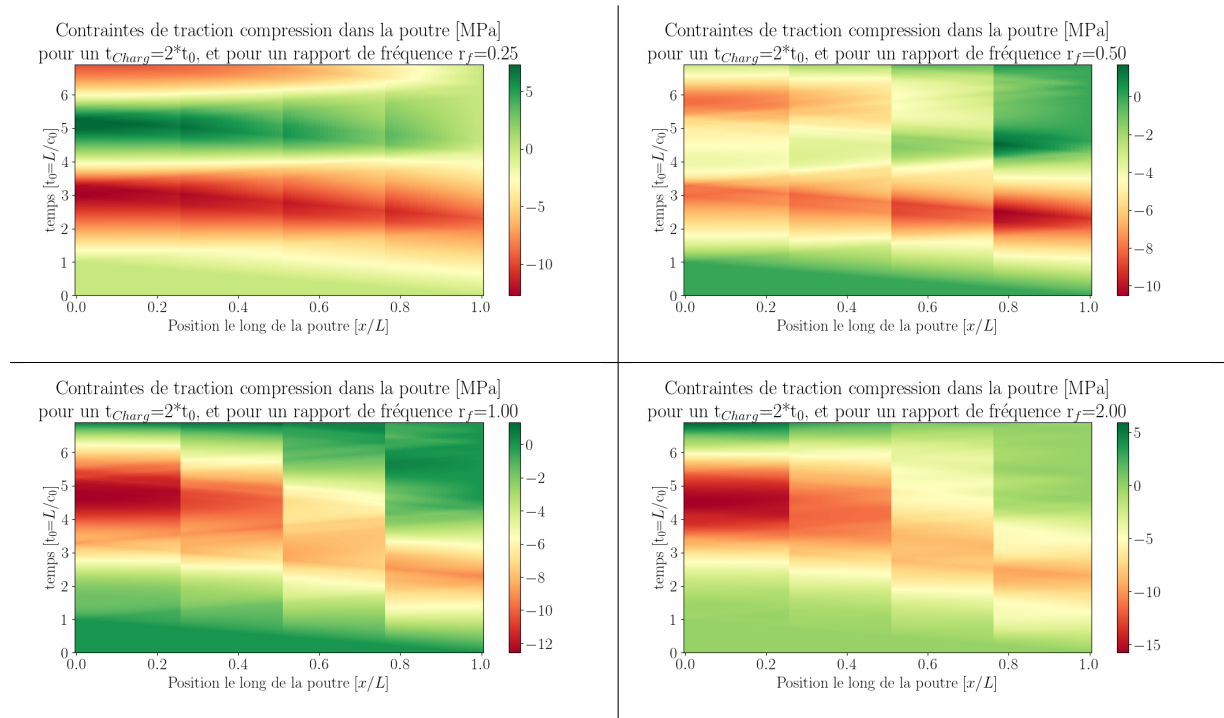


TABLE 2 – Champ de contraintes pour différents rapports de fréquence

4 Conclusion :

Cette étude menée sur les différents modèles de poutre avec des inerties a permis de mettre en évidence l'effet de la prise en compte de l'onde de compression pour l'estimation du flambement d'une poutre sous un chargement axial dynamique. L'analyse est faite en appliquant des chargements avec des formes variées sur la poutre. Les résultats montrent que l'élément essentiel qui amène au flambement d'une poutre avec ou sans inertie est la vitesse et l'histoire du chargement appliqué. L'instabilité est aussi sensible aux caractéristiques du système (rapport entre masses et/ou rapport entre les fréquences des différents composants de la structure).

Cette étude se poursuit actuellement avec la considération de non-linéarités dans le système d'inertie ajouté et l'analyse de son effet sur le mouvement de l'onde axiale et par suite le flambement potentiel de la poutre. Pour le modèle de poutre avec masses-ressorts, la validation de cette analyse est envisagée en mettant en place une maquette d'une structure avec des inclusions de masses ponctuelles rigides et un protocole expérimental adapté dans des conditions d'impact.

Références

- [1] C. Stolz. *Stabilité des matériaux et des structures*, Editions de l'Ecole Polytechnique ,2003.
 - [2] J. Wooseok, A.Waas. *Dynamic bifurcation buckling of an impacted column*. International Journal of Engineering Science. 46 : 958-967,2008
 - [3] J. M. T. Thompson, Michael J.T. Thompson, G. W. Hunt *A General Theory of Elastic Stability*, J.Wiley, 1973.
 - [4] Timoshenko, Stephen, and James M. Gere *Theory of elastic stability*. New York : McGraw-Hill, 1961.
 - [5] T. Kubiak, *Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures* Chapter 5, Springer International Publishing Switzerland, 2013
-