

# Modélisation vibratoire de structures présentant des corps rigides

M. Serre<sup>1</sup>, B. Prabel<sup>1</sup>, H. Maitournam<sup>2</sup>

<sup>1</sup> DYN, Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives,  
Institut Polytechnique de Paris, CEA, Service d'Études Mécaniques et Thermiques, 91191, Gif-sur-Yvette, France  
{mathieu.serre, benoit.prabel}@cea.fr

<sup>2</sup> Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles  
habibou.maitournam@ensta-paris.fr

**Résumé** — Dans l'industrie, certains composants sont mis en vibration par un fluide en écoulement. Ces vibrations, si elles sont excessives, peuvent donner lieu à une usure qu'on cherche à contrôler afin de garantir le fonctionnement pérenne du système en toutes conditions. De nombreux travaux antérieurs tant au CEA qu'à EDF ont permis de disposer de modèles et d'outils numériques performants et validés pour une grande variété d'études vibratoires. On souhaite aujourd'hui les étendre au cas des structures présentant des mouvements de corps rigide. A cette fin, nous développons une modélisation prenant en compte les déplacements élastiques modaux, les mouvements de corps rigides ainsi que le calcul des forces de contact. Un algorithme d'intégration temporelle spécifique est implémenté dans le code industriel Cast3M. Cette première "brique" doit nous permettre d'étudier, via une approche couplée multi-échelle, l'interaction entre l'usure de la surface de contact et le comportement dynamique de la pièce en mouvement, les deux phénomènes étant interdépendants et évoluant sur des échelles de temps très différentes.

Ce papier présente les bases théoriques de la dynamique d'un solide déformables en grande rotation rigide, puis les performance de l'algorithme retenu sont validées sur des cas-simples.

**Mots clés** — corps rigides, grandes rotations, base modale, algorithme d'intégration temporelle, forces de contact.

## Introduction

La simulation numérique de l'usure est un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels. Elle permet d'apporter des éléments de compréhension aux mesures parfois très coûteuses, comme cela peut être le cas de composants difficiles d'accès dont l'examen nécessite l'arrêt de l'installation. Si l'expérimentation reste indispensable à la démarche scientifique de compréhension des phénomènes d'usure, leur modélisation numérique s'impose aujourd'hui comme une nécessité dans l'analyse et la prédiction des systèmes existants et futurs.

La dynamique des structures peut conduire ou non à l'usure des parties en contact, et, rétroactivement, la modification des surfaces de contact peut changer le régime dynamique. Ainsi, le travail proposé par cette thèse concerne l'étude des interactions entre dynamique des structures et usure.

Nous souhaitons à terme transposer les éléments caractéristiques du régime dynamique comme chargement d'un modèle local d'usure. Il est donc nécessaire de connaître a priori les forces de frottements entre deux surfaces en contact. Le calcul de ces forces de réaction découle de la dynamique des pièces en mouvement. Dans le cas le plus général, ces mouvements incluent des mouvements de corps rigide.

Notre objectif premier est donc d'étudier les mouvements d'un solide déformable en combinant translations rigides, rotations rigides et déplacements élastiques. Les bases théoriques d'un tel mouvement sont rappelées.

La non-linéarité géométrique engendrée par les grandes rotations implique de faire d'appel à un schéma d'intégration temporelle adapté que nous souhaitons intégrer dans le code industriel Cast3m.

Après une étude bibliographique, nous sélectionnons quelques schémas d'intégration et comparons leurs résultats sur des cas simples.

Nous réalisons ensuite certaines simplifications afin d'obtenir un algorithme hybride intégrant mouvements de corps rigides et déplacements élastiques présentant des temps de calcul raisonnables, et comprenant le calcul des forces de contact à chaque pas de temps. Ses performances sont là encore validées sur des cas simples.

## 1 Cinématique d'un solide déformable

Plusieurs méthodes synthétisées dans [Sha97] existent pour décrire la cinématique d'un solide déformable subissant des mouvements de corps rigides. Nous utilisons ici la méthode du "floating frame of reference" utilisée dans certains logiciels industriels. Deux repères sont utilisés. Le premier est un repère fixe galiléen tandis que le second décrit l'orientation du solide.

Nous considérons un solide massif et rigide, nous négligeons donc l'influence des déformations élastiques sur

l'orientation des axes de son repère où sur la position de son origine, tous deux considérés comme constants dans le repère mobile.

## 1.1 Déformations élastiques

Nous étudions un matériau homogène et isotrope. De plus, nous nous limitons au domaine élastique linéaire. Les contraintes évoluent donc proportionnellement aux déformations. Ne sont rappelées ici que les formules essentielles pour le cas d'un tel matériau. On procède à une décomposition des déplacements élastiques sur base modale.

On rappelle simplement que celle-ci correspond à un découplage des variables de l'espace et du temps. Ainsi le déplacement dans l'espace s'exprime comme la somme de fonctions vectorielles dépendant uniquement de la position appelées modes multipliées par des coefficients  $q_{fi}(t)$  uniquement fonction du temps appelés coordonnées élastiques ou modales.

$$\vec{U}_f(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i(x, y, z) q_{fi}(t) \quad (1)$$

On rappelle le lien entre déplacements élastiques et coordonnées modales :

$$\vec{U}_f = \Phi \vec{q}_f \quad (2)$$

Où  $\Phi$  est une matrice  $3 \times n$  dont les colonnes sont les modes :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{1x} & \Phi_{2x} & \dots & \Phi_{nx} \\ \Phi_{1y} & \Phi_{2y} & \dots & \Phi_{ny} \\ \Phi_{1z} & \Phi_{2z} & \dots & \Phi_{nz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Et  $\vec{q}_f$  le vecteur des coordonnées modales.

$n$  est le nombre de modes retenus permettant une précision satisfaisante.

### Relation déplacements-déformations

On rappelle cette relation dans le cas d'une structure linéaire et isotrope :

$$\varepsilon = D\Phi \vec{q}_f \quad (4)$$

Où  $D$  est un opérateur différentiel.

### Relation contraintes-déformations

On rappelle simplement la loi de Hooke :

$$\sigma = H\varepsilon \quad (5)$$

Où  $H$  est la matrice de Hooke.

## 1.2 Ajout des mouvements de corps rigide

### Position

On considère un repère galiléen fixe aussi appelé repère global ou principal et un repère mobile attaché au solide, tous deux définis par leur centre et leurs vecteurs directeurs :

$$\mathcal{R}_{global}(O, \vec{e}_x, \dots) \quad (6a)$$

$$\mathcal{R}_{solide}(C, \vec{e}_X, \dots) \quad (6b)$$

Ces deux repères sont initialement confondus. Les vecteurs  $[\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z]$  sont indépendants du temps tandis que  $[\vec{e}_X \ \vec{e}_Y \ \vec{e}_Z]$  dépendent de l'orientation du solide par rapport au repère principal et donc du temps.

On peut exprimer les coordonnées de tout point de l'espace en fonction de ses coordonnées dans le repère du solide

comme :

$$\vec{x} = [x \ y \ z]^T = \vec{x}_C + R [X \ Y \ Z]^T = \vec{x}_C + R\vec{X} \quad (7)$$

où :

$$R = \begin{bmatrix} \vec{e}_X \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_x \\ \vec{e}_X \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_X \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Est la matrice d'orientation / de rotation du solide. Elle peut également s'exprimer en fonction d'autres ensembles de paramètres appelés coordonnées rotationnelles, tous équivalents. Dans la suite nous utilisons les paramètres d'Euler que nous notons sous forme de vecteur :  $\vec{\theta}$ .

Dans le cas d'un solide déformable :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{U}_f, \quad \vec{X}_0 = \vec{X}(t=0) \quad (9)$$

$\vec{U}_f$  est le champ des déplacements élastiques exprimé dans le repère du solide. En faisant apparaître les dépendances en position et en temps :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_C(t) + R(t)(\vec{X}_0 + \vec{U}_f(\vec{X}_0, t)) \quad (10)$$

Dans la suite, on ne fait plus apparaître les variables de temps et d'espace.

### Vitesse

On présente le vecteur vitesse angulaire  $\vec{W}$  exprimé dans le repère du solide tel que :

$$\dot{R}\vec{X} = R(\vec{W} \wedge \vec{X}) \quad (11)$$

Son homologue dans le repère global est noté  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{\omega} = R\vec{W} \quad (12)$$

En dérivant l'équation (10) par rapport au temps on obtient l'expression de la vitesse en tous points du solide dans le repère global :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_C + R(\vec{W} \wedge \vec{X}) + R\dot{\vec{X}} \quad (13)$$

En remplaçant avec 2 :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_C + R(\vec{W} \wedge (\vec{X}_0 + \Phi\vec{q}_f)) + R\Phi\dot{\vec{q}}_f \quad (14)$$

### Accélération

On présente le vecteur accélération angulaire  $\vec{\alpha}$  exprimé dans le repère global :

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = R(\vec{W} \wedge \vec{W}) + R\vec{A} \quad (15)$$

Où  $\vec{A}$  est son homologue dans le repère du solide tel que :

$$\vec{A} = \dot{\vec{W}} \quad (16)$$

On peut exprimer l'accélération en tous points du solide dans sa forme la plus développée :

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_C + R(\vec{W} \wedge (\vec{W} \wedge (\vec{X}_0 + \Phi\vec{q}_f))) + R(\vec{A} \wedge (\vec{X}_0 + \Phi\vec{q}_f)) + 2R(\vec{W} \wedge \Phi\dot{\vec{q}}_f) + R(\Phi\ddot{\vec{q}}_f) \quad (17)$$

—  $\ddot{\vec{x}}_C$  : accélération absolue de l'origine du repère du solide

- $R(\vec{W} \wedge (\vec{W} \wedge (\vec{X}_0 + \Phi \vec{q}_f)))$  : composante centrifuge liée à la vitesse de rotation
- $R(\vec{A} \wedge (\vec{X}_0 + \Phi \vec{q}_f))$  : composante tangentielle liée à l'accélération de la vitesse de rotation
- $2R(\vec{W} \wedge \Phi \dot{\vec{q}}_f)$  : composante de Coriolis
- $R(\Phi \ddot{\vec{q}}_f)$  : accélération due à la déformation élastique

Les mouvements de corps rigide peuvent être décrits par l'association de six degrés de liberté dont trois correspondent à la translation de l'origine du repère du solide et trois à sa rotation.

Le solide étant déformable, les déplacements élastiques décrits au 1.1 s'ajoutent à la description des mouvements de corps rigides. Ces déplacements élastiques sont exprimés sur base modale.

## 2 Équation dynamique dans le cas général

Dans cette partie, nous développons les termes de l'équation de Lagrange dans le cas d'un solide déformable subissant un mouvement de corps rigide par rapport au repère de référence.

Nous regroupons les degrés de libertés élastiques, de translation et de rotation dans le vecteur coordonnées généralisées :

$$\vec{q} = (\vec{x}_C \quad \vec{\theta} \quad \vec{q}_f)^T \quad (18)$$

En utilisant l'équation de Lagrange ou le principe des puissances virtuelles on peut exprimer l'équation dynamique sous la forme :

$$M \ddot{\vec{q}} + K \dot{\vec{q}} = Q_e + Q_v \quad (19)$$

$Q_v$  regroupe les forces d'inertie engendrées par les grandes rotations et les déplacements élastiques. Il inclue les forces centrifuges et de Coriolis. On renvoie à [Sha89] pour le développement de ce dernier.

$Q_e$  est le vecteur des forces extérieures généralisées. Il s'agit de la projection de la résultante des forces extérieures sur les coordonnées translationnelles, rotationnelles et élastiques.

### Matrice de masse

Dans [Sha89], la matrice de masse est déduite de l'expression de l'énergie cinétique et de la formule de la vitesse (14). Le développement n'est pas détaillé ici, seule la forme de la matrice de masse l'est :

$$M = \begin{bmatrix} m_{TT} & m_{T\theta} & m_{Tf} \\ & m_{\theta\theta} & m_{\theta f} \\ sym & & m_{ff} \end{bmatrix} \quad (20)$$

où les suffixes  $T$ ,  $\theta$  et  $f$  désignent respectivement à la translation, à la rotation et aux déplacements élastiques.

- $m_{TT} = \text{diag}(m; m; m)$  : où  $m$  est la masse totale du solide
- $m_{T\theta}$  : couplage translation-rotation
- $m_{Tf}$  : couplage translation-déformations élastiques
- $m_{\theta\theta}$  : matrice d'inertie du solide
- $m_{\theta f}$  : couplage rotation-déformations élastiques
- $m_{ff} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  où les  $\mu_i$  sont les masses généralisées des modes 1 à  $n$ .

Exceptés  $m_{TT}$  et  $m_{ff}$  tous ces coefficients dépendent implicitement du temps de par leur dépendance aux déplacements élastiques et/ou aux coordonnées rotationnelles, y compris  $m_{\theta\theta}$  qui est la matrice d'inertie du solide.

### Matrice de raideur élastique

Dans le cadre de la mécanique élastique linéaire isotrope, on peut exprimer le travail des forces intérieures en fonction des coordonnées modales comme suit :

$$\delta W_s = -\vec{q}_f^T \left[ \int_V (D\Phi)^T H(D\Phi) dV \right] \delta \vec{q}_f \quad (21)$$

En notant  $K_{ff}$  la matrice entre crochets de l'équation (21), la matrice de raideur élastique a pour expression :

$$\delta W_s = -(\bar{x}_C \quad \bar{\theta} \quad \bar{q}_f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \bar{x}_C \\ \delta \bar{\theta} \\ \delta \bar{q}_f \end{pmatrix} \quad (22)$$

La matrice de raideur est ici une constante du temps. L'énergie de déformation ne dépend que des coordonnées modales. On note que  $K_{ff}$  est la même matrice de raideur que pour un calcul de structure élastique purement linéaire, c'est à dire en l'absence de mouvement de corps rigide.

### 3 Simplification : "Linear Theory of Elastodynamics"

Des travaux comme ceux proposés dans [ES96] étudient le couplage inertiel entre déformations élastiques et rotation rigide sur une poutre en rotation constante autour d'un axe fixe. Il est montré que ces termes ne deviennent significatifs que pour des structures légères et des vitesses de rotation élevées. En considérant des cas de solides rigides (sans déformations élastiques) ou élastiques avec de faibles vitesse de rotation rigide, on peut négliger ces termes de couplage. Il s'agit de l'approximation appelée "Linear Theory of Elastodynamics" évoquée dans [Sha89] et [shabana1997]. Cette dernière consiste en :

- réaliser dans un premier temps un calcul de corps rigide *indéformable* pour évaluer les forces d'inertie et de contact
- dans un second temps, introduire ces forces dans un calcul de structure élastique linéaire.

Dans ce contexte, les déplacements élastiques sont nuls. Les coefficients de la matrice de masse liés aux couplages inertiels avec les déplacements élastiques s'annulent. D'autres, comme la matrice d'inertie perdent leur dépendance temporelle. Enfin, le terme de couplage entre translation et rotation est négligé.

Le calcul des forces d'inertie s'en trouvent également largement simplifiées.

L'équation dynamique devient :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 \\ 0 & m_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\bar{x}}_C \\ \ddot{\bar{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}_{ext} \\ \vec{\Gamma}_{ext} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{W} \wedge J\vec{W} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Où  $\vec{\Gamma}_{ext}$  est le moment des forces extérieures,  $\vec{F}_{ext}$  leur résultante, tous les deux exprimés dans le repère global. Ce qui revient à la résolution de deux équations découplées :

- l'Équation de Newton :

$$m\ddot{\bar{x}} = \vec{F}_{ext} \quad (24)$$

- l'Équation d'Euler :

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = J\vec{A} + \vec{W} \wedge (J\vec{W}) = R^T \vec{\Gamma}_{ext} \quad (25)$$

$\vec{\pi}$  : moment cinétique du solide dans le repère global

$J = m_{\theta\theta}$  est la matrice d'inertie du solide .

En conclusion, l'équation dynamique a été établie dans le cas général via l'équation de Lagrange et met en évidence un couplage inertiel entre les différents degrés de liberté (translation, rotation, déformations).

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cadre de la "Linear theory of elastodynamics" qui consiste en négliger les couplages inertiels entre déplacements élastiques et mouvements de corps rigide. Dans le cadre de cette approximation, les déplacement rigides et élastiques sont calculés successivement puis additionnés. Cette approximation convient à l'exemple que nous avons choisi, mais devient imprécise si l'on considère des structures légères, souples, soumises à des rotations rapides.

Une dernière approximation consiste en négliger le couplage entre rotation et translation qui apparaît lorsque le repère du solide n'est pas centré sur son centre de masse.

Ces approximations vont nous permettre de nous affranchir du caractère implicite de l'équation du mouvement.

La prochaine section est dédiée aux méthodes d'intégration numérique.

## 4 Intégration numérique

Dans cette partie nous recherchons un schéma d'intégration dédié aux grandes rotations à implémenter dans le code industriel Cast3m. Ce code utilise déjà l'algorithme des différences centrées de la famille de Newmark pour le calcul vibratoire de structures élastiques linéaires. Le mouvement de translation rigide ne présente pas de difficulté car il peut être intégré par ce même algorithme.

Le groupe des rotations dans l'espace n'ayant que localement la structure d'espace vectoriel, l'intégration de grandes rotations nécessite de prendre des précautions particulières.

De nombreux travaux ont été réalisés dans cette optique, chacun d'entre eux mettant en avant diverses propriétés de conservation synonymes de précision. Après une étude bibliographique, nous avons sélectionné trois d'entre eux que nous comparons sur des cas simples plus ou moins non linéaires trouvés dans la littérature.

Enfin, nous associons l'algorithme retenu aux différences centrées et validons ses résultats sur des cas-tests associant déformations élastiques, rotations rigides et forces de contact.

### 4.1 Sélection d'un schéma d'intégration pour les grandes rotations

Nous avons pré-sélectionné dans la littérature trois schémas d'intégration dérivés de la famille de Newmark dédiés à la dynamique rotationnelle de corps rigides.

TABLE 1 – Algorithmes pré-sélectionnés

Implicite	$\beta, \gamma$	Expression du bilan / Equation dynamique
ALGO C1 [SW91]	$\beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$	$R_{n+1}J\vec{W}_{n+1} - R_nJ\vec{W}_n = h\vec{\Gamma}_{n+\frac{1}{2}}$
Explicites		
ALGO C2 [SW91]	$\beta = 0, \gamma = 1$	$R_{n+1}J\vec{W}_{n+1} - R_nJ\vec{W}_n = h\vec{\Gamma}_{n+\frac{1}{2}}$
NMB (Newmark Body) [KE05]	$\beta = 0, \gamma = 1/2$	$\vec{J}\vec{A}_{n+1} + \vec{W}_{n+1} \wedge \vec{J}\vec{W}_{n+1} = R_{n+1}^T \vec{\Gamma}_{n+1}$

$h$  : pas de temps.

$\Theta$  : vecteur de rotation incrémental entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Les trois algorithmes considérés diffèrent par les valeurs des coefficients de Newmark  $\beta$  et  $\gamma$  ainsi que par la forme de l'équation dynamique qu'ils appliquent. En effet, le NMB suit directement l'équation d'Euler, tandis que les ALGO C1 et C2 l'appliquent sous forme de bilan du moment cinétique. De plus, l'ALGO C2 est explicite. Nous souhaitons quantifier l'influence de ces facteurs sur la précision de la trajectoire.

Les propriétés de conservation passent ici au second plan.

Les cas-tests retenus pour notre étude sont les suivants :

- "freely spinning body" : un solide ayant une vitesse de rotation initiale que l'on laisse évoluer pendant un temps long (100 s). Il représente le plus simple des cas-tests étudiés ici.
- "book toss" : un corps rigide avec  $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ , en rotation instable autour de son axe d'inertie de valeur intermédiaire, subissant pendant un court instant un couple perturbateur. L'instabilité du mouvement nous permet de magnifier les erreurs d'intégration des algorithmes comparés.
- "soft coulombic wall" : un solide chargé attiré par un potentiel magnétique attractif et repoussé par un mur chargé situé en dessous de lui.

Pour chaque exemple, nous traçons la trajectoire d'un point du solide intégrée avec les trois algorithmes.

### Freely spinning body

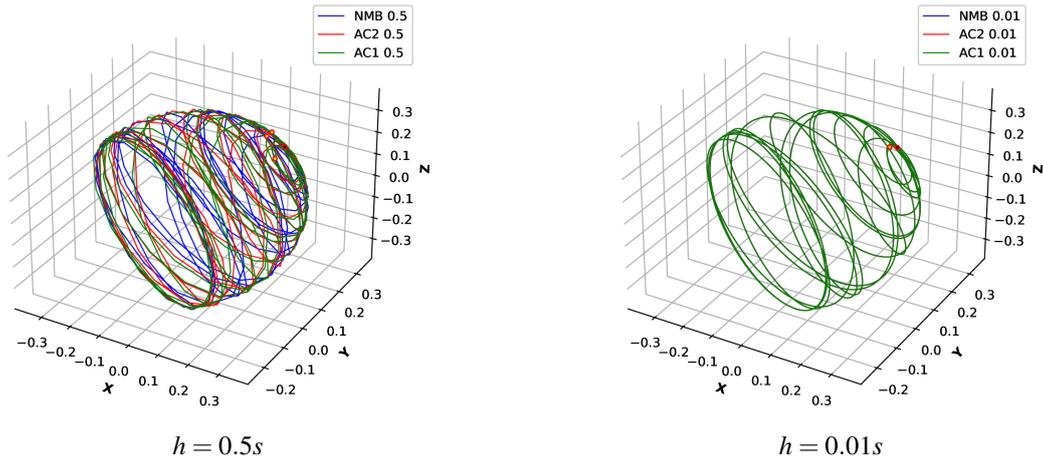


FIGURE 1 – Freely spinning body : comparaison des trajectoires pour  $h = 0.5s$  et  $h = 0.01s$

### Coulombic soft potential wall

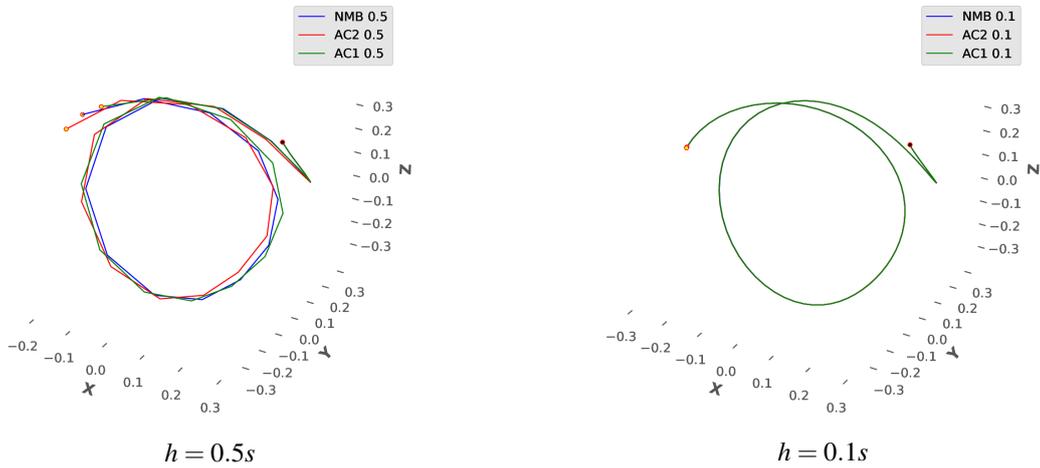


FIGURE 2 – Coulombic soft potential wall : comparaison des trajectoires pour  $h = 0.5s$  et  $h = 0.1s$

### Book toss

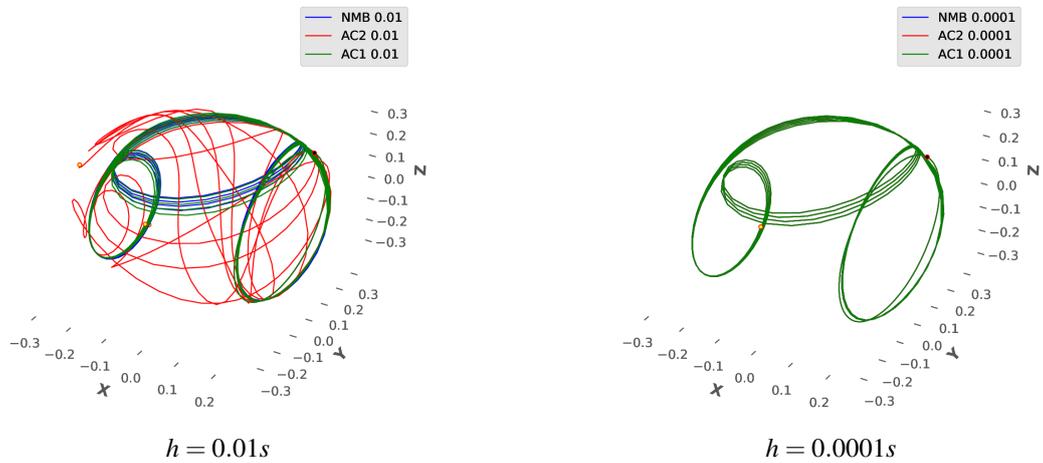


FIGURE 3 – Book toss : comparaison des trajectoires pour  $h = 0.01s$  et  $h = 0.0001s$

Dans de nombreux contextes, la présence de chocs à haute fréquence nous contraint d'utiliser un pas de temps très petit. Nous avons constaté que pour un pas de temps suffisamment petit, les résultats convergés des trois algorithmes étudiés sont identiques, y compris en terme de trajectoire. Nous optons donc pour implémenter l'ALGO C2 dans l'opérateur DYNE de Cast3M qui est explicite et permet ainsi d'obtenir des temps de calcul nettement plus petits (33% en moyenne).

## 4.2 Introduction de forces de contact

Nous envisageons les cas-tests suivants pour la validation de notre algorithme final :

- toupie sur plan frottant
- pendule avec support sur plan frottant
- bi-pendule avec chocs

## 5 Conclusion et perspectives

Le cadre de la théorie "Linear Theory of Elastodynamics", permet certaines hypothèses simplificatrices. Ainsi, nous avons implémenté un algorithme d'intégration temporelle explicite basé sur celui de Simo et Wong pour les mouvements de corps rigides et celui des différences centrées pour les déplacements élastiques. Le calcul des forces extérieures et de contact prend aussi en compte les potentiels grands mouvements. Les cas tests présentés ont permis de valider les algorithmes. L'approche proposée permet donc de modéliser le comportement dynamique de n'importe quelle structure dont les caractéristiques et les sollicitations restent dans le cadre de l'approximation retenue. De futurs travaux concerneront la modélisation de contacts plus complexes puis la modélisation de l'usure des surfaces de contact.

*Ce travail a été réalisé en collaboration avec EDF, dans le cadre de l'un des projets de R et D de l'Institut Tripartite CEA-EDF-Framatome.*

## Références

- [ES96] H. EL-ASBY et A. A. SHABAN. "Coupling between rigid body and deformation modes". In : *Journal of Sound and Vibration* (1996).
- [KE05] KRYSL et ENDRES. "Explicit Newmark/Verlet algorithm for time integration of the rotational dynamics of rigid bodies". In : *International Journal for numerical methods in engineering* (2005).
- [Sha89] SHABANA. *Dynamics of multibody systems*. Sous la dir. de Wiley INTER-SCIENCE. 1989.
- [Sha97] Ahmed A SHABANA. "Flexible multibody dynamics : review of past and recent developments". In : *Multibody system dynamics* 1.2 (1997). Publisher : Springer, p. 189-222.
- [SW91] SIMO et WONG. "Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum". In : *International Journal for numerical methods in engineering* (1991).