

# Interactions non-linéaires dans une chaîne de cellules de type masses imbriquées non-linéaires

J. Flosi<sup>1</sup>, A. Ture Savadkoohi<sup>1</sup>, C.H. Lamarque<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LTDS, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Vaulx-en-Velin, {jean.flosi,alireza.turesavadkoohi,lamarque}@entpe.fr

**Résumé** — On considère un modèle d'interaction d'un métamatériau périodique de type masses imbriquées non-linéaires soumis à une excitation extérieure. Le modèle discret est constitué de cellules à deux degrés de liberté couplées aux cellules voisines. Les paramètres de couplages sont répartis selon deux échelles de temps et une approche continue est proposée, menant à deux EDP couplées. Après détermination des modes, le modèle continu projeté sur un mode est analysé par une méthode de perturbation. L'étude des dynamiques rapide et lente permet de cerner les évolutions possibles.

**Mots clés** — Métamatériau, réduction de modèle, variété invariante, bifurcation, dynamique rapide/lente.

## 1 Introduction

Les métamatériaux sont définis comme des matériaux nouveaux aux caractéristiques et performances non-naturelles résultant du processus de conception. Parmi les travaux pionniers, on citera [24] en électromagnétisme (permittivité électrique négative, perméabilité magnétique), [23] (en magnétisme), ou des approches concernant les champs optiques et mécaniques [3]. Dans le domaine vibro-acoustique, des designs particuliers pour systèmes linéaires permettent de définir une masse effective, qui pour une gamme de fréquences, devient négative et traduit l'opposition du système à la sollicitation [5]. L'une des manières de concevoir des méta-matériaux vibro-acoustiques consiste en l'assemblage de cellules ayant des caractéristiques particulières voulues. Lazarov [13] étudie l'assemblage de cellules unitaires constituées d'une seule masse pour former une chaîne infinie dont il contrôle la transmission par l'excitation. D'autres chaînes linéaires ont été étudiées [25] et on trouve des applications à ce type de matériaux dans [4, 15, 18, 27]. Un type de métamatériaux mécanique permettant la définition d'une masse effective négative est la conformation de type masses imbriquées. La cellule parfaite linéaire a été étudiée par Huang (et Cveticanin en introduction) comme un oscillateur isolé [10, 9] et l'existence d'une bande interdite [5] apparaît. L'étude d'une chaîne infinie de cellules de type masses imbriquées linéaires a été menée de manière discrète et l'influence du nombre de masses internes est étudié dans [19]. Des non-linéarités peuvent aussi être ajoutées au système afin d'en exploiter le comportement purement non-linéaire. Pour cela, des méthodes telles que l'équilibrage harmonique [1] ou les formes normales [11] permettent de déterminer la réponse fréquentielle du système. Ture Savadkoohi et. al. [21, 22] emploient une méthode des échelles multiples couplée aux variables complexes de Manevitch [14] afin de déterminer les dynamiques rapides et lentes du système, et provoquent des transferts d'énergie en exploitant le régime quasi-périodique [20] permis par la non-linéarité. Cette méthode peut alors être étendue aux systèmes à degrés de liberté multiples comme pour les chaînes d'oscillateurs non-linéaires [7]. Les cellules de type masses imbriquées à non-linéarité cubique sont étudiées par Cveticanin [8] sous forcing particulier ou formant une chaîne sans amortissement et sollicitation externe. Ici aussi, la non-linéarité permet l'existence d'une bande interdite. Lazarov [12] étudie la chaîne infinie non-linéaire cubique avec forcing et déduit la notion de bande interdite de l'équation de dispersion. Des travaux similaires sur chaîne infinie sont fournis dans [6, 26]. Dans ce travail, le système considéré est une chaîne périodique de cellules de type masses imbriquées à non-linéarités internes cubiques. L'ensemble de ces systèmes sont réalisables, notamment avec le développement des impressions 3D [2, 17].

## 2 Modèle considéré

On étudie le système présenté en Fig.1. Il s'agit d'une chaîne périodique de période  $L$  constituée de cellules de type masses imbriquées liées linéairement 2 à 2 et écartées d'une distance  $\Delta x$  au repos. Chaque cellule est composée d'une masse principale  $m_1$  liée par une non-linéarité cubique  $k_3$  ainsi qu'avec un amortissement  $c_2$  à sa masse intérieure  $m_2$ . Chaque cellule est liée à ses deux cellules voisines par une raideur  $k_1$  et un amortissement  $c_1$ .

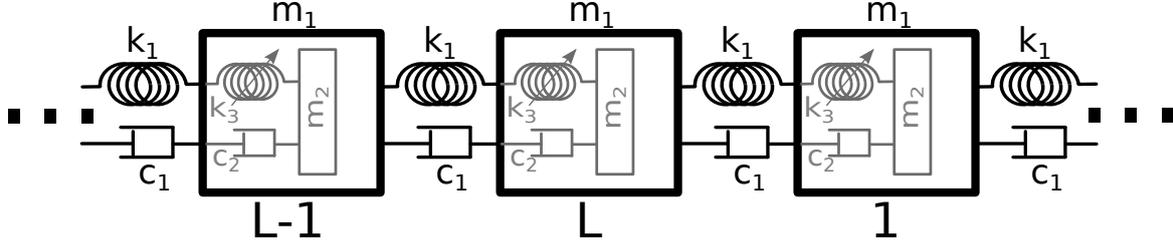


FIGURE 1 – Schéma de la chaîne  $L$ -périodique de cellules de type masses imbriquées non-linéaires cubiques

Le modèle correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 u_j}{dt^2} + k_1(2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) + k_3(u_j - v_j)^3 + c_1(2\frac{du_j}{dt} - \frac{du_{j-1}}{dt} - \frac{du_{j+1}}{dt}) \\ + c_2(\frac{du_j}{dt} - \frac{dv_j}{dt}) = F_j \sin(\Omega t) \text{ pour } j \in \{1, \dots, L\} \\ m_2 \frac{d^2 v_j}{dt^2} + k_3(v_j - u_j)^3 + c_2(\frac{dv_j}{dt} - \frac{du_j}{dt}) = 0 \text{ pour } j \in \{1, \dots, L\} \end{cases} \quad (1)$$

et la périodicité de la chaîne conduit aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_j(t) = u_{L+j}(t) \\ \frac{du_j(t)}{dt} = \frac{du_{L+j}(t)}{dt} \end{cases} \text{ pour } j \in \{0, \dots, L\} \quad (2)$$

On en déduit que  $u_0 = u_L$  et  $\frac{du_0}{dt} = \frac{du_L}{dt}$  ;  $u_1 = u_{L+1}$  et  $\frac{du_1}{dt} = \frac{du_{L+1}}{dt}$ .

Pour analyser ce système non-linéaire, on utilise une méthode des échelles multiples [16], l'introduction de variables complexes de L. Manevitch [14] et une méthode de Galerkin.

On pose  $0 < \varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \ll 1$  comme petit paramètre pour l'analyse par échelles multiples. On pose  $\tau = \omega t =$

$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} t$ . et on définit  $\varepsilon \Lambda = \frac{k_3}{k_1}$ ,  $\varepsilon \chi_1 = \frac{c_1}{\sqrt{k_1 m_1}}$ ,  $\varepsilon \chi_2 = \frac{c_2}{\sqrt{k_1 m_1}}$ ,  $\varepsilon f_j = \frac{F_j}{k_1}$  et  $\mu = \frac{\Omega}{\omega}$ . Les équations discrètes de l'Eq.1 deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_j}{d\tau^2} + (2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) + \varepsilon \Lambda (u_j - v_j)^3 \\ + \varepsilon \chi_1 (2\frac{du_j}{d\tau} - \frac{du_{j-1}}{d\tau} - \frac{du_{j+1}}{d\tau}) + \varepsilon \chi_2 (\frac{du_j}{d\tau} - \frac{dv_j}{d\tau}) = \varepsilon f_j \sin(\mu \tau) \text{ pour } j \in \{1, \dots, L\} \\ \varepsilon \frac{d^2 v_j}{d\tau^2} + \varepsilon \Lambda (v_j - u_j)^3 + \varepsilon \chi_2 (\frac{dv_j}{d\tau} - \frac{du_j}{d\tau}) = 0 \text{ pour } j \in \{1, \dots, L\} \end{cases} \quad (3)$$

## 3 Approche continue

### 3.1 Détermination des modes

$X$  est la variable spatiale continue initiale dans laquelle les cellules sont espacées d'une distance  $\Delta x$  au repos. L'étude est faite en introduisant la variable d'espace continue normalisée  $x = \frac{X}{\Delta x}$  menant aux

fonctions continues :

$$\begin{cases} u(x, \tau) = u(x = j - 1, \tau), x \in [0, L], j = \{1, \dots, L + 1\} \\ v(x, \tau) = v(x = j - 1, \tau), x \in [0, L], j = \{1, \dots, L + 1\} \end{cases} \quad (4)$$

En appliquant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} U(x, t) = u(x, t) \\ V(x, t) = u(x, t) - v(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

les nouvelles équations continues du système sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}(x, \tau) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, \tau) + \varepsilon \Lambda V^3(x, \tau) - \varepsilon \chi_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \tau) + \varepsilon \chi_2 \frac{\partial}{\partial \tau} V(x, \tau) = \varepsilon f(x) \sin(\mu \tau) \\ \frac{d^2(U - V)}{d\tau^2}(x, \tau) - \Lambda V^3(x, \tau) - \chi_2 \frac{\partial V}{\partial \tau}(x, \tau) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

L'étude du système linéarisé nous permet de déterminer les modes propres de fréquence  $\omega_k$  de la chaîne. Puisqu'on ne considère aucune interaction multimodale, on définit :

$$\begin{cases} U(x, \tau) = \rho_{1,k}(\tau) \cos(\omega_k x + \Theta_k) \\ V(x, \tau) = \rho_{2,k}(\tau) \cos(\omega_k x + \Theta_k) \end{cases} \quad \omega_k = \frac{2k\pi}{L} \quad (7)$$

où  $k$  désigne le seul mode considéré. Il est maintenant possible de projeter les équations dynamiques continues suivant le mode  $k$  considéré.

### 3.2 Études des dynamiques rapide et lente

On introduit les variables complexes de Manevitch [14] autour de la fréquence  $\omega_k$  comme :

$$\begin{cases} \Phi_1(\tau) e^{i\mu\tau} = \frac{\partial \rho_{1,k}}{\partial \tau}(\tau) + i\mu \rho_{1,k}(\tau) \\ \Psi_1(\tau) e^{i\mu\tau} = \frac{\partial \rho_{2,k}}{\partial \tau}(\tau) + i\mu \rho_{2,k}(\tau) \end{cases} \quad \mu = \omega_k + \varepsilon \sigma \quad (8)$$

La première harmonique des équations dynamiques est gardée par une méthode de Galerkin et l'étude des échelles multiples est menée en introduisant la décomposition  $\tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \dots$

On exprime enfin les variables complexes en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \Phi_1(\tau) = N_1(\tau) e^{i\vartheta_1(\tau)} \\ \Psi_1(\tau) = N_2(\tau) e^{i\vartheta_2(\tau)} \end{cases} \quad (9)$$

L'étude de dynamique rapide permet de déterminer la variété invariante lente du système. L'équation de la variété invariante lente est :

$$N_1(\tau_1, \dots) = \sqrt{\left( \frac{9\Lambda N_2^3(\tau_1, \dots)}{16\omega_k^4} - N_2(\tau_1, \dots) \right)^2 + \left( \frac{\chi_2 N_2(\tau_1, \dots)}{\omega_k} \right)^2} \quad (10)$$

Le résultat analytique est comparé aux résultats issus d'intégrations numériques dans les cas libres et forcés. La Fig.2a présente en vert le tracé de la variété invariante lente obtenue après projection modale (voir Eq.10) et en noir le résultat obtenu par intégration numérique de l'Eq.3 par méthode de Runge Kutta et projection sur le premier mode. Seule la première harmonique est gardée. Le système est libre mais présente une déformation initiale suivant le premier mode comme présenté en Table 1 sous la mention "libre". Les évolutions temporelles de  $N_1$  et  $N_2$  sont tracées sur Fig.2b. On vérifie bien le passage par le point de bifurcation résultant du passage par la zone instable de la variété invariante lente. La géométrie de la variété invariante lente est en accord avec le comportement du système. La Fig.3 traite de la même manière de la comparaison entre variété invariante lente en vert et les résultats numériques en noir dans le cas du système forcé suivant le mode  $k = 3$  comme décrit en Table 1 sous la mention "forcé". Dans ce cas, la projection modale est donc faite suivant le troisième mode et seule la troisième harmonique est gardée.

L'étude dynamique lente à l'ordre  $\varepsilon^1$  permet par la suite de déterminer les points singuliers et points d'équilibres. Ces points mènent à la prédiction des régimes périodiques et quasi-périodiques. L'étude détaillée est omise dans ce papier.

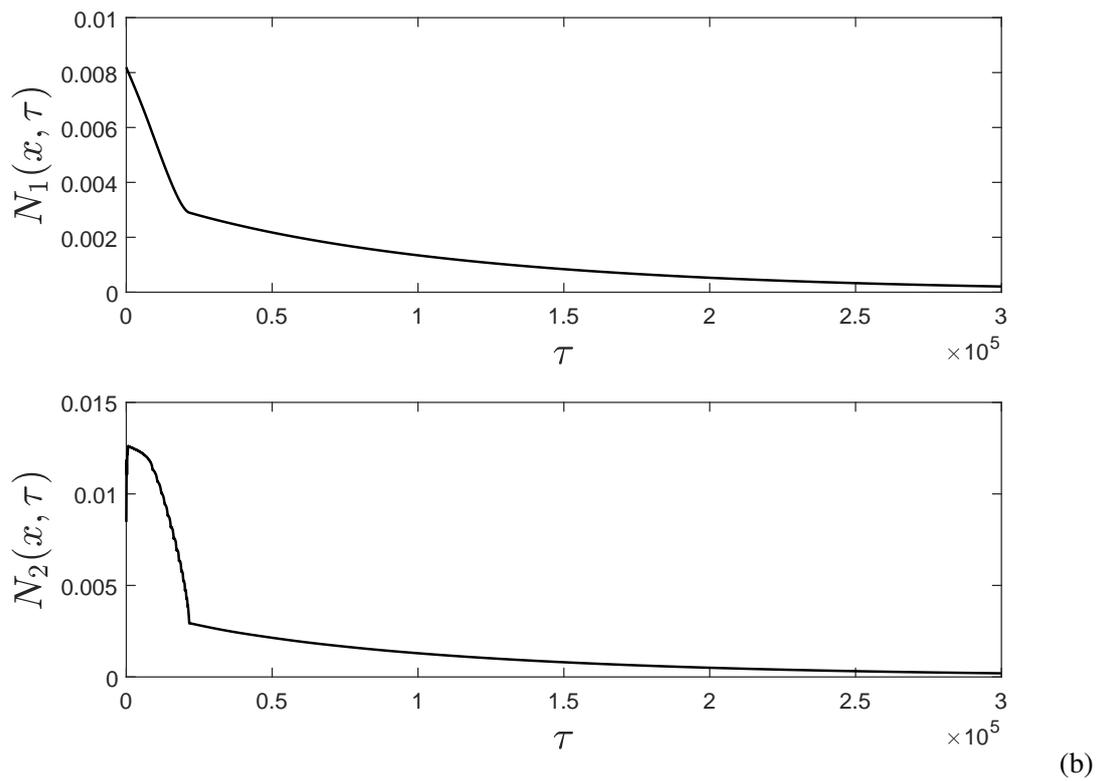
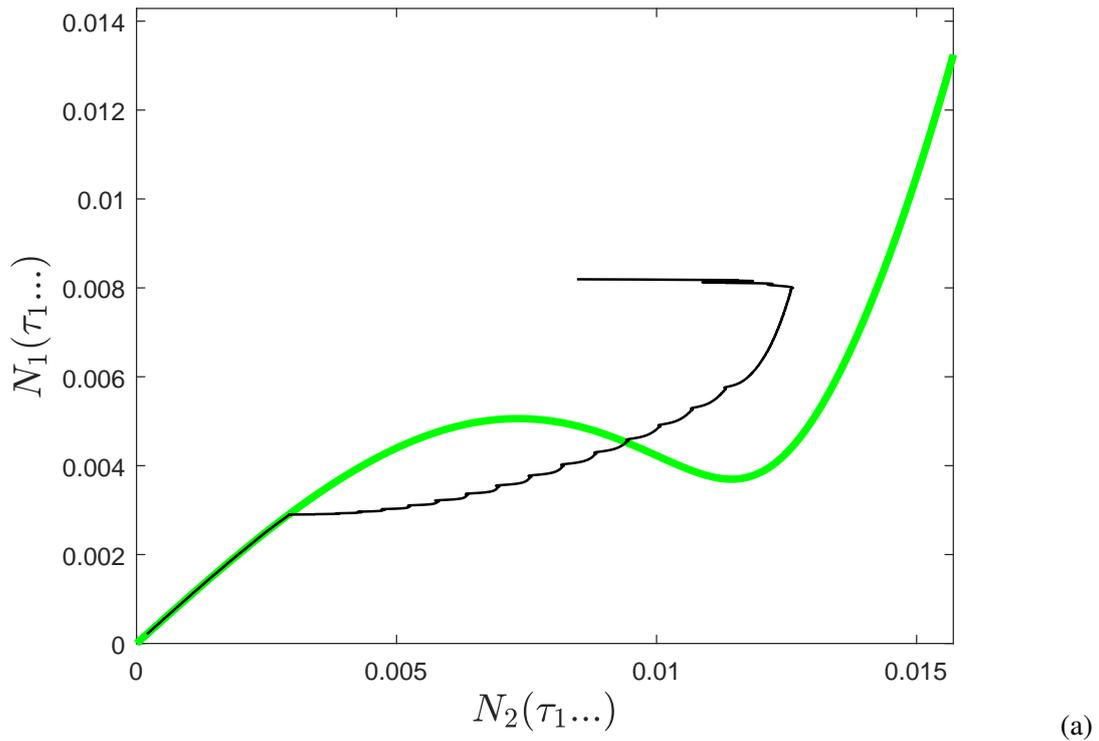


FIGURE 2 – Réponse libre du système suivant le mode 1. (a) Variété invariante lente tracée en vert et accompagnée par les résultats issus de l'intégration numérique du système discret suivi d'une projection sur le mode 1. (b) Évolutions temporelles de  $N_1(\tau)$  et  $N_2(\tau)$  obtenues numériquement tracés en noir. Les paramètres du système sont explicités dans le Table 1 sous la mention "libre".

## 4 Conclusion

Différentes dynamiques de la chaîne périodique non-linéaire mènent après projection suivant un mode à l'expression de la variété invariante lente et à l'identification des points singuliers et points

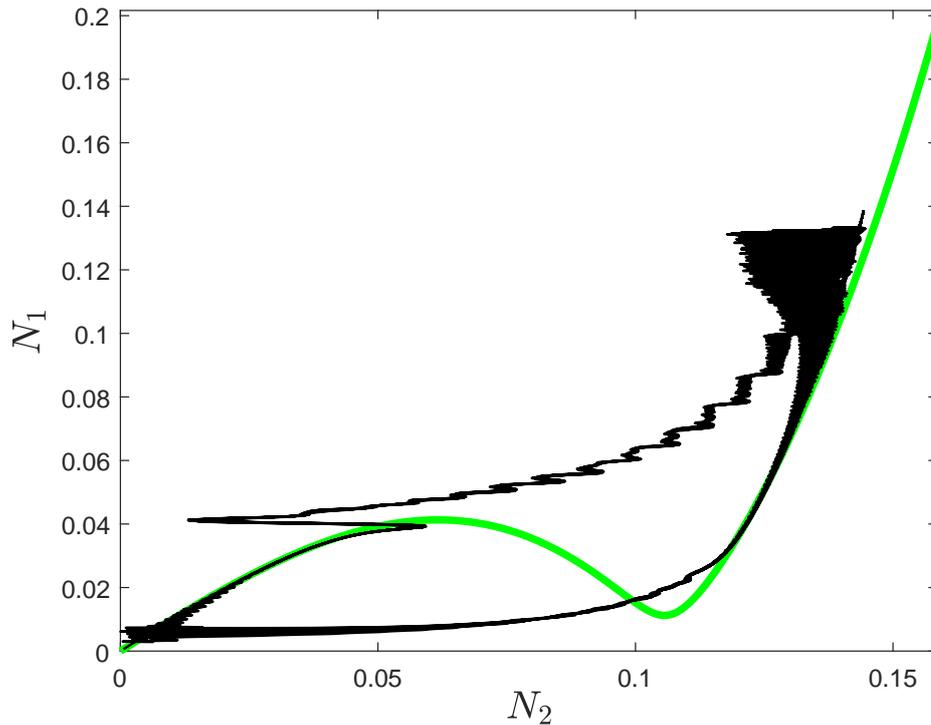


FIGURE 3 – Réponse forcée du système suivant le mode 3. La variété invariante lente est tracée en vert et accompagnée par les résultats issus de l'intégration numérique du système discret suivi d'une projection sur le mode 3 tracés en noir. Les paramètres du système sont explicités dans le Table 1 sous la mention "forcé".

TABLE 1 – Caractéristiques des vérifications libre et forcée

Libre									
$L$	$\varepsilon$	$\chi_1$	$\chi_2$	$\Lambda$	$u_j(0)$	$f_j$	$\sigma$	$\mu = \omega_1$	
100	0.001	0.1	0.02	0.2	$0.13 \cos(\omega_1(j-1))$	0	0	0.0628	
Forcé									
$L$	$\varepsilon$	$\chi_1$	$\chi_2$	$\Lambda$	$u_j(0)$	$f_j$	$\sigma$	$\mu = \omega_3$	
100	0.001	0.1	0.02	0.2	0	$0.07 \cos(\omega_3(j-1))$	0	0.1885	

d'équilibres du système, aboutissant à la réponse fréquentielle du système. Nous pouvons alors prédire en fonction de l'excitation différents régimes de la chaîne, c'est-à-dire régime périodique (par la présence des points d'équilibres) ou quasi-périodique (par la présence des points singuliers). L'ensemble des développements constitue un outil de design de chaîne adapté aux sollicitations fournissant une réponse modulée.

## 5 Acknowledgements

L'auteur tiens à remercier les organisations suivantes pour avoir soutenue sa recherche : (i) Le "Ministère de la transition écologique et (ii) LABEX CELYA (ANR-10-LABX-0060) de "Université de Lyon" à travers le programme "Investissement d'Avenir"(ANR-11-IDEX-0007) opéré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR).

## Références

- [1] S. Baguet, V.N. Nguyen, C. Grenat, C.-H. Lamarque, R. Dufour, *Nonlinear dynamics of micromechanical resonator arrays for mass sensing*, Dynamics, 95 :1203-1220, 2019.
- [2] M.V. Barnhart, X. Xu, Y. Chen, S. Zhang, J. Song, G. Huang. *Experimental demonstration of a dissipative multi-resonator metamaterial for broadband elastic wave attenuation*, Journal of Sound and Vibration, 438 :1-12, 2019.
- [3] K. Bertoldi, V. Vitelli, J. Christensen, M. Van Hecke. *Flexible mechanical metamaterials*, Nat. Rev. Mater. 2, Macmillan Publishers Limited, 17066, 2017.
- [4] O. R. Bilal, A. Foehr, C. Daraio. *Enhancement of deep subwavelength band gaps in flat spiral-based phononic metamaterials using the trampoline phenomena*, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 87, 7 2020.
- [5] L. Brillouin *Wave Propagation in Periodic Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1946.
- [6] M. A. Campana, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Ruzzene, S. Neild, F. Scarpa. *Impact of non-linear resonators in periodic structures using a perturbation approach*, Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier Ltd., 135 :106408, 2020.
- [7] S. Charlemagne, C.-H. Lamarque, A. Ture Savadkoochi. *Vibratory control of a linear system by addition of a chain of nonlinear oscillators*, Acta Mechanica, Springer Verlag, 3111-3133, 2017.
- [8] L. Cveticanin, M. Zukovic. *Negative effective mass in acoustic metamaterial with nonlinear mass-in-mass sub-systems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier B.V., 51 :89-104, 2017.
- [9] L. Cveticanin, M. Zukovic, D. Cveticanin. *Influence of nonlinear subunits on the resonance frequency band gaps of acoustic metamaterial*, Nonlinear Dynamics, Springer Science+Business Media B.V., 93 :1341-1351, 2018.
- [10] H.H. Huang, C.T. Sun, G.L. Huang. *On the negative effective mass density in acoustic metamaterials*, International Journal of Engineering Science, Elsevier, 47 :10-617, 2009.
- [11] L. Jézéquel, C.-H. Lamarque. *Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 149 :429-459, 1991.
- [12] B. S. Lazarov, J. S. Jensen. *Low-frequency band gaps in chains with attached nonlinear oscillators*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier 42 :1186-1193, 2007.
- [13] B. S. Lazarov, J. J. Thomsen. *Using high-frequency vibrations and non-linear inclusions to create metamaterials with adjustable effective properties*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, 44 :90-97, 2009.
- [14] L. I. Manevitch. *The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators Using Complex Variables*, Nonlinear Dynamics, Kluwer Academics Publishers, 25 :95-109, 2001
- [15] S. J. Mitchell, A. Pandolfi, M. Ortiz. *Metaconcrete : designed aggregates to enhance dynamic performance*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 65 :69-81, 2014.
- [16] A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods*, WILEY-VCH, 1973
- [17] C. Nimmagadda, K. H. Matlack. *Thermally tunable band gaps in architected metamaterial structures*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 439 :29-42, 2019.
- [18] H. Peng, P. Frank Pai. *Acoustic metamaterial plates for elastic wave absorption and structural vibration suppression*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 89 :350-361, 2014.
- [19] G. S. Rodrigues, H. I. Weber. *Elastic metamaterials analysis : Simple and double resonators*, Research In-venty : International Journal of Engineering And Science, 11-16, 2017.
- [20] Y. Starosvetsky, O. V. Gendelman. *Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry*, Physica D : Nonlinear Phenomena, Elsevier, 237(13) :1719-1733, 2008.
- [21] A. Ture Savadkoochi, C.-H. Lamarque, M. V. Contessa. *Trapping vibratory energy of main linear structures by coupling light systems with geometrical and material nonlinearities*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, 80 :3-13, 2016.
- [22] A. Ture Savadkoochi, C.-H. Lamarque, Z. Dimitrijevic. *Vibratory energy exchange between a linear and a nonsmooth system in the presence of the gravity*, Nonlinear Dynamics, Springer, 70 :1473-1483, 2012.
- [23] G. H. B. Thompson. *Unusual waveguide characteristics associated with the apparent negative permeability obtainable in ferrites*. Nature Publishing Group, 175 :1135-1136, 1955.
- [24] V. G. Veselago. *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\nu$* , Soviet Physics Uspekhi, 10 :509-514 1968.

- [25] X. Wang. *Dynamic behaviour of a metamaterial system with negative mass and modulus* International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 51 :1534-1541, 2014.
- [26] L. Wuk, Y. Li. *Harnessing bulging or sloshing modes to design locally resonant liquid-solid metamaterials*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 116280, 2021.
- [27] R. Zhong, Z. Zong, P. F. Pai, X. Ruan. *Multi-stopband negative stiffness composite column design for vibration absorption*, Thin-Walled Structures, Elsevier, 144 :106330, 2019.