

15ème Colloque National en Calcul des Structures

E. Bretin², J. Chapelat^{1,3}, P.-Y. Outtier³, Y. Renard^{1,2}

¹ Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, France

² Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS UMR5208, ICJ, France

³ MFP MICHELIN, Campus RDI Ladoux, France

Abstract — Nous proposons une stratégie d'optimisation d'une structure pneumatique sans air (appelé "airless tire" en anglais). Nous développons ainsi un outil numérique d'optimisation de forme de la géométrie d'une structure élastique en grandes déformations sous contrainte de contact traitée par la méthode de Nitsche. Les critères d'optimisation proposés sont de plus liés à l'énergie de déformation ainsi qu'à l'uniformité de roulage du pneumatique.

Mots clés — Grandes déformations élastiques, contact unilatéral, méthode de Nitsche, méthode des éléments finis, méthode des domaines fictifs, optimisation de forme, représentation level set.

1 Introduction

De nombreux outils d'optimisation de forme sont apparus récemment en mécanique numérique afin d'assister à la conception de produits industriels. Dans de nombreuses applications, le comportement mécanique de la structure élastique nécessite la prise en compte de la théorie des grandes déformations. Nous proposons ici d'utiliser des lois hyperélastiques pour relier contraintes et déformations suivant le comportement matériau de la structure (voir [14]). La géométrie d'un pneumatique sera ainsi optimisée en cherchant à minimiser des critères de déformation élastique et d'uniformité de roulage. Pour ce faire, une technique de multi-chargeement est proposée pour garder une certaine symétrie lors de la rotation du pneumatique. Enfin, un algorithme de gradient est utilisé pour minimiser les énergies associées aux critères d'optimisation. Plus précisément, les gradients de forme s'obtiennent suivant la stratégie développée dans les travaux précurseurs de J. Hadamard [9], J. Cea [4] pour l'écriture sous la forme d'un Lagrangien par J. Cea et J.-L. Lions [11] pour la méthode de l'état adjoint [11].

L'objectif est de présenter nos travaux d'optimisation de forme géométrique en élasticité non linéaire avec prise en compte du contact unilatéral du pneumatique sur le sol. Le contact est traité par la méthode de Nitsche, dont l'avantage est d'être une méthode consistante et qui ne nécessite pas l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange. La géométrie est représentée de manière implicite suivant une méthode level set [2] afin de faciliter l'évolution de la structure au fur et à mesure des itérations et d'autoriser des changements de topologie. Le problème mécanique avec contact unilatéral est discrétisé suivant la méthode des éléments finis et implémenté sous le logiciel GetFEM [16]. Plus précisément, la méthode des domaines fictifs [10, 3] couplée à des éléments coupés sera utilisée pour traiter la complexité de la géométrie évolutive.

Toutes les quantités mécaniques sont décrites dans leur configuration de référence (formulation lagrangienne). On cherche donc à optimiser une structure élastique roulante dans sa configuration de référence $\Omega^0 \subset \mathbb{R}^d, d = 2$ (en deux dimensions) ou 3 (en trois dimensions), un exemple étant décrit en Figure 1. Le bord $\partial\Omega^0$ du domaine Ω^0 est divisé en trois parties distinctes : Γ_N^0, Γ_C^0 et Γ_D^0 . Une condition de Neumann est considérée sur Γ_N^0 où une densité de force g_N^0 est imposée. Un contact avec frottement peut avoir lieu entre le bord Γ_C^0 du pneumatique (correspondant à la bande de roulement) et un obstacle

rigide et plat. Enfin une condition de déplacement imposé α_D est considérée sur le bord rigide Γ_D^0 et correspond au poids du véhicule sur la jante du pneumatique (α_D est une inconnue supplémentaire qui est déterminée en imposant le poids sur la jante). A noter que seule la frontière Γ_N^0 pourra être optimisée, la jante Γ_D^0 et la bande de roulement Γ_C^0 étant supposées fixe dans toute cette étude.

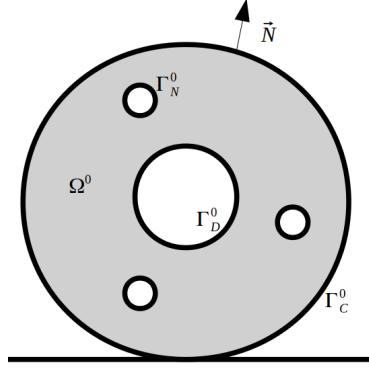


Figure 1: Représentation schématique du pneumatique et de l'obstacle rigide.

2 Problème mécanique

On suppose ici que le champ de déplacement $u_\Omega : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ est solution du problème élastique suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (F(u_\Omega) \hat{\sigma}(E(u_\Omega))) = f^0 & \text{dans } \Omega^0, \\ \hat{\sigma}(u_\Omega) \cdot N = g_N^0(u_\Omega) & \text{sur } \Gamma_N^0, \\ u_\Omega = \alpha_D & \text{sur } \Gamma_D^0, \end{cases}$$

où $\hat{\sigma}$ est le second tenseur de Piola-Kirchhoff et $F = I_d + \nabla u_\Omega$. La condition de contact sera explicitée ultérieurement. Comme le pneumatique est supposé rouler sur la bande de roulement, on considère N_d cas de chargement à différentes rotations régulièrement espacées. On obtient ainsi N_d rotations du pneumatique, avec des domaines Ω_i^0 (voir la Figure 2), pour i allant de 1 à N_d . La solution du déplacement associé au domaine Ω_i est de plus notée u_Ω^i .

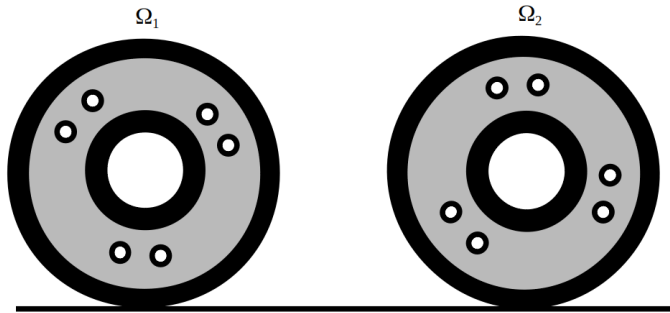


Figure 2: Représentation du pneumatique à différents angles de rotation. Deux configurations de Ω à différentes rotations pour $i = 1, 2$.

2.1 Contact unilatéral avec frottement

Le sol (ou obstacle) est supposé rigide et plat. On considère la normale entrante N_y au sol et g le gap initial entre l'obstacle et la bande de roulement (voir Figure 3). Le déplacement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est décomposé sur

Γ_C^0 par sa composante normale $u_N = u \cdot N_y$ et tangentielle $u_T = (I - N_y \otimes N_y)u$ de sorte que

$$u = u_N N_y + u_T.$$

Le gap initial est défini sur $X \in \Gamma_C^0$ par

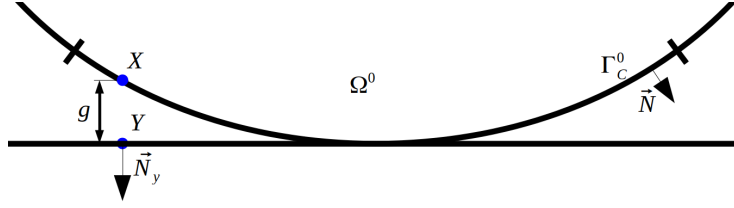


Figure 3: Représentation des surfaces de contact pour une configuration de la rotation du pneumatique.

$$g = N_y \cdot (Y - X),$$

où Y est la projection orthogonale de X sur l'obstacle. On note également la décomposition de la contrainte de contact sur Γ_C^0 en composantes normales et tangentielles :

$$\hat{\sigma}_N(u) = (\hat{\sigma}(u)N) \cdot N_y \text{ et } \hat{\sigma}_T(u) = \hat{\sigma}(u)N - (\hat{\sigma}(u)N) \cdot N_y.$$

La condition de contact unilatéral sur Γ_C est décrite par la condition de complémentarité suivante :

$$(u_N - g) \leq 0, \hat{\sigma}_N(u) \leq 0, (u_N - g) \hat{\sigma}_N(u) = 0. \quad (1)$$

Pour des aspects pratiques, nous considérons le frottement de Coulomb statique :

$$\begin{cases} |\hat{\sigma}_T(u)| \leq -\mathcal{F} \hat{\sigma}_N(u) & \text{if } u_T = 0, \\ \hat{\sigma}_T(u) = \mathcal{F} \hat{\sigma}_N(u) \frac{u_T}{|u_T|} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

La formulation faible du problème d'élasticité en grandes déformations avec une condition de contact mène à ce que $u_\Omega \in V$ satisfasse

$$\int_{\Omega^0} (F(u) \hat{\sigma}(E(u))) : \nabla v \, dX - \int_{\Gamma_N^0} g_N^0(u) \cdot v \, ds(X) - \int_{\Gamma_C} \hat{\sigma}(u)N \cdot v \, ds(X) = \int_{\Omega^0} f^0 \cdot v \, dX, \quad \forall v \in V,$$

où $V = \{v \in H^1(\Omega^0; \mathbb{R}^d) : v = 0 \text{ on } \Gamma_D^0\}$.

2.2 Formulation faible avec la méthode de Nitsche

La méthode de Nitsche, présentée initialement par J. Nitsche dans [13] pour une condition de Dirichlet, a été introduite pour le contact unilatéral et sans frottement dans [6, 8], puis généralisée au contact avec frottement de Tresca dans [5] et étendue à Coulomb dans [7]. La méthode de Nitsche introduit un terme qui impose faiblement les conditions de contact frottant (1) et (2) d'une manière consistante. Dans le cadre des grandes déformations, nous adaptons le travail de R. Mlika dans [12] où la méthode de Nitsche est présentée pour contact entre deux corps élastiques. La méthode de Nitsche est basée sur une formulation équivalente des conditions (1) - (2) et vient originellement de la formulation d'une approche Lagrangien augmenté [1], ce qui donne

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N(u) &= -[\hat{\sigma}_N(u) - \gamma(u_N - g)]_-, \\ \hat{\sigma}_T(u) &= P_{\mathcal{B}(0, \rho(u))}(\hat{\sigma}(u)N - \gamma u), \end{aligned}$$

où $\rho(u) = \mathcal{F}[\hat{\sigma}_N(u) - \gamma(u_N - g)]_-$ est le seuil de frottement, $\mathcal{F}$ le coefficient de frottement, la partie négative étant définie par $[x]_- = \frac{1}{2}(|x| - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et la projection d'un élément $x \in \mathbb{R}^d$ sur la boule $\mathcal{B}(N_y, \rho(u))$ de rayon $\rho(u)$ sur le plan tangent de normale N_y (voir également [15]) est définie par

$$P_{\mathcal{B}(N_y, \rho)}(q) = \begin{cases} (I_d - N_y \otimes N_y)q & \text{si } |(I_d - N_y \otimes N_y)q| \leq \rho, \\ \rho \frac{(I_d - N_y \otimes N_y)q}{|(I_d - N_y \otimes N_y)q|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On précise la notation de la dérivée directionnelle d'un élément A par rapport à x dans la direction y telle que

$$\langle \mathcal{D}_x A(x), y \rangle = \lim_{\varepsilon} \frac{A(x + \varepsilon y) - A(x)}{\varepsilon}.$$

Dans le cas du contact unilatéral, la formulation de Nitsche en grandes déformations s'écrit

$$\int_{\Omega^0} (F(u) \hat{\sigma}(E(u))) : \nabla v \, dX - \int_{\Gamma_N^0} g_N^0(u) \cdot v \, ds(X) + I(u, v, N) = \int_{\Omega^0} f^0 \cdot v \, dX, \quad (3)$$

où le terme de contact $I(u, v, N)$ satisfait

$$\begin{aligned} I(u, v, N) = & - \int_{\Gamma_C^0} \frac{\theta}{\gamma} \hat{\sigma}(u) N \cdot \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}(u) N, v \rangle \, ds(X) \\ & - \int_{\Gamma_C^0} \frac{1}{\gamma} [\hat{\sigma}_N(u) + \gamma(u_N - g)]_- \langle \mathcal{D}_u (\theta \hat{\sigma}_N(u) - \gamma(u_N - g)), v \rangle \, ds(X) \\ & + \int_{\Gamma_C^0} \frac{1}{\gamma} P_{\mathcal{B}(N_y, \rho(u))}(\hat{\sigma}(u) N - \gamma u) \cdot \langle \mathcal{D}_u (\theta \hat{\sigma}_T(u) - \gamma(u_T - g)), v \rangle \, ds(X). \end{aligned} \quad (4)$$

Les dérivées directionnelles des tenseurs de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}$ (proposé dans (4)) et $\hat{\hat{\sigma}}$ (utile par la suite) sont

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}(u), v \rangle &= \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial E}(u) : \langle \mathcal{D}_u E(u), v \rangle = \frac{\partial^2 W}{\partial E^2}(E(u)) : \text{sym}(F^T(u) \nabla v), \\ \langle \mathcal{D}_u \hat{\hat{\sigma}}(u), v \rangle &= \langle \mathcal{D}_u F(u) \hat{\hat{\sigma}}(u), v \rangle = F(u) \langle \mathcal{D}_u \hat{\hat{\sigma}}(u), v \rangle + \langle \mathcal{D}_u F(u), v \rangle \hat{\hat{\sigma}}(u) \\ &= F(u) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial E^2}(E(u)) : \text{sym}(F^T(u) \nabla v) \right) + \nabla v \hat{\hat{\sigma}}(u). \end{aligned}$$

avec $\langle \mathcal{D}_u F(u), v \rangle = \nabla v$ et $\langle \mathcal{D}_u E(u), v \rangle = \text{sym}(F^T(u) \nabla v)$ où $\text{sym}(\cdot)$ est la partie symétrique d'un tenseur d'ordre deux.

3 Critère d'optimisation et gradient de forme

3.1 Critère d'optimisation

Le premier critère d'optimisation correspond à l'énergie de déformation élastique :

$$J_e(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Omega^0} W(u_\Omega) \, dX,$$

où W est la densité d'énergie dont l'expression varie suivant la loi hyperélastique considérée. Afin de garantir une certaine symétrie de rotation du pneumatique, deux autres critères sont introduits par la suite. Dans un premier temps, on propose d'uniformiser la contrainte de contact sur l'ensemble des rotations du pneumatiques. Pour ce faire, on introduit la contrainte de contact moyenne $p_{mean} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \hat{\sigma}(u_\Omega^i) N$, où

$\hat{\sigma}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff et on essaie d'uniformiser la contrainte de contact sur chaque rotation du pneumatique u_{Ω}^i par rapport à cette moyenne :

$$J_p(\Omega, u_{\Omega}, p_{mean}) = \frac{1}{2} \|\hat{\sigma}(u_{\Omega})N - p_{mean}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_C^0, \mathbb{R}^d)}^2.$$

Un troisième critère consiste enfin à uniformiser la flèche de la jante rigide :

$$J_d(\Omega, u_{\Omega}, d_{mean}) = \int_{\Gamma_D^0} \frac{1}{2} (u_{\Omega} \cdot N_y - d_{mean})^2 ds(X),$$

où $d_{mean} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} u_{\Omega}^i \cdot N_y$. Finalement, nous considérons l'énergie globale suivante

$$J(\Omega) = \sum_{i=1}^{N_d} J_g(\Omega_i, u_{\Omega}^i, p_{mean}) \text{ où } J_g(\Omega_i, u_{\Omega}^i, p_{mean}) = J_e(\Omega_i, u_{\Omega}^i) + \alpha J_p(\Omega_i, u_{\Omega}^i, p_{mean}) + \beta J_d(\Omega_i, u_{\Omega}^i, d_{mean}), \quad (5)$$

et une étude sur l'influence des paramètres α et β sera proposée dans le cadre d'une optimisation multi-critère et multi-chargement de la structure Ω .

3.2 Gradient de forme

Dans le cadre de l'optimisation de forme géométrique, on cherche à minimiser un critère $J(\Omega)$ afin d'obtenir la forme optimale de la structure en forçant l'évolution des frontières de la structure. Nous rappelons ici que seule la frontière Γ_N^0 est optimisable et donc peut évoluer. On introduit la forme générique d'un critère d'optimisation (ou critère objectif) :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega^0} \mathcal{M}(u_{\Omega}) dX + \int_{\partial\Omega^0} \mathcal{N}(u_{\Omega}) ds(X),$$

où u_{Ω} est la solution de l'équation (3). Ici, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux fonctions que l'on suppose suffisamment régulières pour que la dérivée directionnelle de J soit bien définie. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier aux bornes fixes. Soit Ω_{ad} l'ensemble des solutions admissible Ω où seul le bord $\Gamma_N^0 \in C^2$ peut évoluer (voir Figure 1). La fonction objective $J(\Omega)$ doit être minimisée

$$\inf_{\Omega \in \Omega_{ad}} J(\Omega). \quad (6)$$

On cherche à minimiser le critère $J(\Omega)$ dans (6) sous la contrainte suivante : la formulation faible avec contact (3) doit être respectée. On introduit donc le Lagrangien $\mathcal{L} : V \mapsto \mathbb{R}$ défini comme

$$\mathcal{L}(u, v, N, \Omega) = J(\Omega, u) + \left(\int_{\Omega^0} (F(u) \hat{\sigma}(E(u))) : \nabla v dX - \int_{\Gamma_N^0} g_N^0(u) \cdot v ds(X) + I(u, v, N) - \int_{\Omega^0} f^0 \cdot v dX \right).$$

où $J(\Omega, u) = \int_{\Omega^0} \mathcal{M}(u) dX + \int_{\partial\Omega^0} \mathcal{N}(u) ds(X)$. La clé est de remarquer que $J(\Omega) = J(\Omega, u_{\Omega})$ et donc d'identifier $J(\Omega)$ comme

$$J(\Omega) = \mathcal{L}(u_{\Omega}, v, N, \Omega).$$

Si $\mathcal{L}$ est différentiable par rapport au domaine Ω dans la direction Θ , cela donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}J(\Omega), \Theta \rangle &= \langle \mathcal{D}[\mathcal{L}(u_{\Omega}, v, N, \Omega)], \Theta \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_{\Omega} \mathcal{L}(u_{\Omega}, v, N, \Omega), \Theta \cdot N \rangle + \langle \mathcal{D}_n \mathcal{L}(u_{\Omega}, v, N, \Omega), \langle \mathcal{D}_{\Omega} N, \Theta \rangle \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{D}_u \mathcal{L}(u_{\Omega}, v, N, \Omega), \langle \mathcal{D}_{\Omega} u_{\Omega}, \Theta \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Or la dérivée directionnelle $\langle \mathcal{D}_u \mathcal{L}(u_\Omega, v, N, \Omega), \langle \mathcal{D}_\Omega u_\Omega, \Theta \rangle \rangle$ ne peut être explicitée. Afin de faire disparaître ce terme et obtenir une forme explicite de la dérivée de J , on développe la méthode de l'état adjoint et on cherche $p \in V$ tel que

$$\langle \mathcal{D}_u \mathcal{L}(u_\Omega, p, N, \Omega), q \rangle = 0, \forall q \in V.$$

Si on évalue ensuite l'équation (7) à $v = p$, on obtient

$$\langle \mathcal{D}_\Omega \mathcal{L}(u_\Omega, p, N, \Omega), \Theta \rangle = \langle \mathcal{D}_\Omega \mathcal{L}(u_\Omega, p, N, \Omega), \Theta \cdot n \rangle + \langle \mathcal{D}_n \mathcal{L}(u_\Omega, p, N, \Omega), \langle \mathcal{D}_\Omega N, \Theta \rangle \rangle,$$

car $\langle \mathcal{D}_\Omega u, \Theta \rangle \in V$. Par ailleurs, le terme $\langle \mathcal{D}_u \mathcal{L}(u, p, n, \Omega), q \rangle$ mène à

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_u \mathcal{L}(u, p, N, \Omega), q \rangle &= \int_{\Omega^0} \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}(E(u)), q \rangle : \nabla p \, dX - \int_{\Gamma_N^0} \langle \mathcal{D}_u g_N^0(u), q \rangle \cdot p \, dX + \langle \mathcal{D}_u I(u, p, N), q \rangle \\ &+ \int_{\Omega^0} \langle \mathcal{D}_u \mathcal{M}(u), q \rangle \, dX + \int_{\partial\Omega^0} \langle \mathcal{D}_u \mathcal{N}(u), q \rangle \, ds(X). \end{aligned} \quad (8)$$

Ceci permet d'écrire explicitement le gradient de forme tel que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}J(\Omega^0), \Theta \rangle &= \int_{\Gamma_m^0} (\Theta \cdot N) (\mathcal{M}(u_\Omega) + F(u_\Omega) \frac{\partial W}{\partial E} E(u_\Omega) : \nabla p - f^0(X) \cdot p) \, ds(X) \\ &+ \int_{\Gamma_m^0} (\Theta \cdot N) (\kappa_m \mathcal{N}(u_\Omega) + \nabla \mathcal{N}(u_\Omega) \cdot N) \, ds(X) \\ &- \int_{\Gamma_m^0 \cap \Gamma_N^0} (\Theta \cdot N) (\kappa_m p \cdot g_N^0(u_\Omega) + \nabla(p \cdot g_N^0(u_\Omega)) \cdot N) \, ds(X). \end{aligned}$$

puisque $\Gamma_m^0 \cap \Gamma_C^0 = \emptyset$ et $I(u, p, N)$ est défini sur Γ_C^0 . La dérivée directionnelle $\langle \mathcal{D}_u I_{\mathcal{N}}(u, p, N), q \rangle$ de l'équation (8) peut être développée

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_u I(u, p, n), q \rangle &= - \int_{\Gamma_C^0} \frac{\Theta}{\gamma} \langle \mathcal{D}_u(\hat{\sigma}(u)N \cdot \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}(u)N, p \rangle), q \rangle \, ds(X) \\ &- \int_{\Gamma_C^0} \frac{1}{\gamma} \langle \mathcal{D}_u ([\hat{\sigma}_N(u) + \gamma(u_N - g)] - (\Theta \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}_N(u), p \rangle - \gamma p_n)), q \rangle \, ds(X) \\ &+ \int_{\Gamma_C^0} \frac{1}{\gamma} \langle \mathcal{D}_u P_{\mathcal{B}(0,p)}(\hat{\sigma}_T(u) - \gamma u_T) \cdot (\Theta \langle \mathcal{D}_u \hat{\sigma}_T(u), p \rangle - \gamma p_t), q \rangle \, ds(X), \forall q \in V. \end{aligned}$$

4 Résultats numériques

Dans cette section, nous comparons d'abord différentes lois élastiques pour minimiser l'énergie de déformation élastique avant de proposer des optimisations multi-critère avec les critères précédemment proposés pour montrer leur efficacité.

4.1 Comparaison de lois élastiques

Nous proposons plusieurs tests d'optimisation de forme avec trois lois de comportement élastiques : l'élasticité linéaire, le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff et le modèle Mooney-Rivlin en incompressible. La forme optimale obtenue dépend de la loi élastique considérée (voir Figure 4) et la topologie peut également varier en fonction de la loi élastique (voir Figure 5). L'élasticité linéaire est particulièrement inadaptée lorsque des grandes déformations ont lieu dans le comportement de la structure. Le modèle de Saint Venant-Kirchhoff est également peu réaliste lorsque la structure se déforme de façon importante.

On observe d'ailleurs que ces deux modèles mènent à la même topologie en Figure 5, alors que le modèle de Mooney-Rivlin en incompressible (plus adéquate à décrire le comportement d'un pneumatique en élastomère) mène à une topologie légèrement différente.

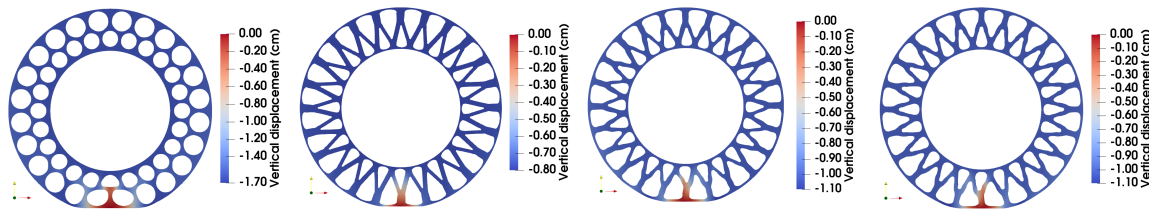


Figure 4: Optimisation de forme. De gauche à droite : géométrie initiale avec 48 trous circulaires; modèle d'élasticité linéaire; modèle de Saint Venant-Kirchhoff; modèle de Mooney-Rivlin en incompressible.

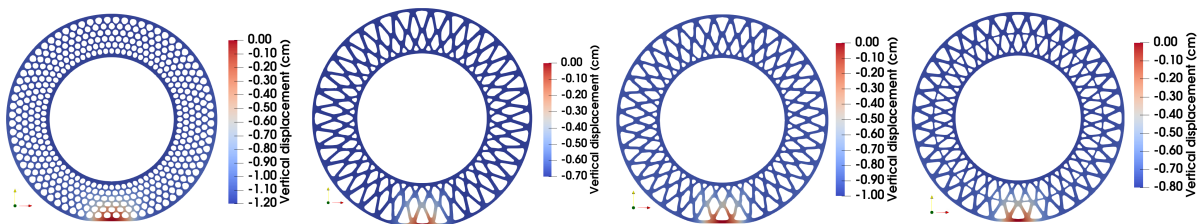


Figure 5: Optimisation de forme. De gauche à droite : géométrie initiale avec 360 trous circulaires; modèle d'élasticité linéaire; modèle de Saint Venant-Kirchhoff; modèle de Mooney-Rivlin en incompressible.

4.2 Optimisation multi-critère

Dans cette section, seule la géométrie présentée en Figure 4 est considérée et seul le modèle de Mooney-Rivlin en incompressible est implémenté.

4.2.1 Uniformité de la contrainte de contact

On cherche à minimiser le critère $J(\Omega)$ défini dans (5) et on impose $\alpha = 50$ et $\beta = 0$, de sorte qu'on souhaite minimiser J_e et J_p . Le critère J_p est effectivement minimisé (voir Figure 6) et la forme est différente par rapport à l'optimisation menée avec J_e (voir la forme optimale obtenue avec le modèle de Mooney-Rivlin en incompressible en Figure 4).

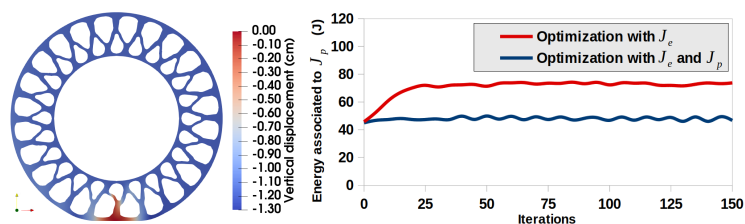


Figure 6: Optimisation de forme. A gauche : forme optimale avec J_e et J_p et à droite : énergie associée à l'uniformité de la contrainte de contact J_p .

4.2.2 Uniformité de la flèche

On cherche à minimiser le critère $J(\Omega)$ défini dans (5) et on impose dans un premier cas $\alpha = 0$ et $\beta = 0.1$ puis dans un second cas $\alpha = 50$, $\beta = 0.1$, de sorte qu'on souhaite d'abord minimiser J_e et J_p puis J_e , J_p

et J_d . On calcule l'écart-type sur l'ensemble des flèches $u_{\Omega}^i \cdot N$ tel que $\sigma_{stdev} = \sqrt{\frac{1}{N_d} \sum_i (u_{\Omega}^i \cdot N - d_{mean})^2}$ (voir Figure 7 à droite). Le critère d'uniformité de la flèche est efficace puisqu'on uniformise bien la flèche sur l'ensemble de la rotation du pneumatique lorsque J_d est implémenté.

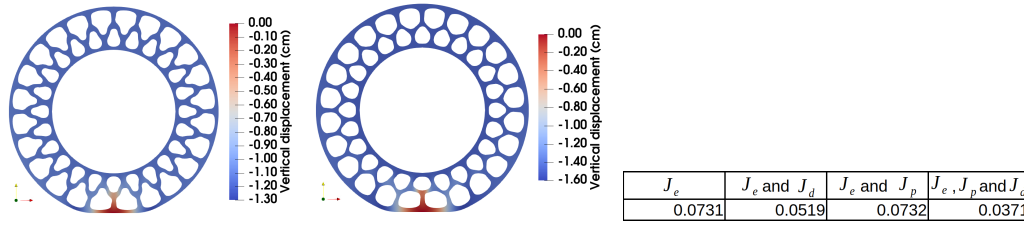


Figure 7: Optimisation de forme. De gauche à droite : forme optimale avec J_e et J_d ; J_e, J_p et J_d ; comparaison de l'écart-type des flèches sur la rotation de la structure en fonction des critères d'optimisation.

References

- [1] P Alart, A Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 353–375, 1991.
- [2] G Allaire, F Jouve, A-M Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of Computational Physics, 363 - 393, 2004.
- [3] E Burman and P Hansbo. *Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method*, Applied Numerical Mathematics, Elsevier, 328–341, 2012.
- [4] J Cea. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Dunod, 371-402, 1986.
- [5] F Chouly. *An adaptation of Nitsche's method to the Tresca friction problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, 329–339, 2014.
- [6] F Chouly, P Hild. *A Nitsche-Based Method for Unilateral Contact Problems: Numerical Analysis*, SIAM J. Numerical Analysis, SIAM, 1295-1307, 2013.
- [7] F Chouly, P Hild, V LLeras, Y Renard. *Nitsche-based finite element method for contact with Coulomb friction*, European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, 839–847, 2017.
- [8] F Chouly, P Hild, Y Renard. *Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche's method for contact problems in elasticity: theory and numerical experiments*, Mathematics of Computation, 1089–1112, 2013.
- [9] J Hadamard. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, Imprimerie nationale, 1908.
- [10] J Haslinger, Y Renard. *A new fictitious domain approach inspired by the extended finite element method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, SIAM, 1474–1499, 2009.
- [11] J L Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 1968.
- [12] R Mlika, Y Renard, F Chouly. *An unbiased Nitsche's formulation of large deformation frictional contact and self-contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 265–288, 2017.
- [13] J Nitsche. *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 9-15, 1971.
- [14] Raymond W. Ogden, *Non-linear elastic deformations*, Courier Corporation, 1997.
- [15] K Poullos, Y Renard. *An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids*, Computers & Structures, Elsevier, 75–90, 2015.
- [16] K Poullos, Y Renard. *Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language*, Transactions on Mathematical Software, 47:1, 2020.