

Modélisation d'un tube par élément fini de type poutre enrichi permettant l'ovalisation de la section

Y. Pascal-Abdellaoui^{1,2}, C. Stolz^{2,4}, F. Daude^{1,2}, P. Lafon^{1,2} and P.Galon^{2,3}

¹ EDF R&D Paris-Saclay, 7 Boulevard Gaspard Monge 91120 PALAISEAU, youri.pascal-abdellaoui@edf.fr

² IMSIA, UMR 9219, 828 Boulevard des Maréchaux 91120 PALAISEAU

³ Institut GeM, UMR 6183, École Centrale de Nantes, 1 Rue de la Noë 44321 NANTES

⁴ CEA Saclay, DEN/SEMT, Université Paris-Saclay, 91191 GIF-SUR-YVETTE

Résumé — On développe un élément fini de type poutre enrichi permettant de prendre en compte l'ovalisation de la section droite d'un tube. La cinématique retenue est une cinématique de coque, dont le mouvement de la section est développée en séries de Fourier. Le modèle décrit est alors discrétisé et implémenté dans le code de calcul Europlexus. Les résultats numériques de traction simple et de flexion pure sont comparés aux solutions analytiques.

Mots clés — poutre enrichie, ovalisation de section, séries de Fourier.

1 Introduction

Le phénomène de fouettement est une des conséquences potentielles de la rupture accidentelle d'une tuyauterie. Ce phénomène peut avoir une forte incidence sur la sûreté des installations industrielles puisqu'il génère de grands déplacements de la tuyauterie sectionnée qui pourrait impacter et endommager les structures et composants avoisinants. S'agissant de phénomènes physiques complexes, la caractérisation de la rupture de la tuyauterie et du fouettement associé est fondée actuellement sur des approches simplifiées reposant sur des hypothèses fortement conservatives. Ces hypothèses engendrent des difficultés à justifier le respect des critères de sûreté, pouvant conduire à des modifications coûteuses sur les installations.

De façon à répondre à ces enjeux, on se propose d'améliorer les outils et les méthodes actuellement disponibles pour la simulation du phénomène de fouettement afin de rendre plus réaliste la modélisation des phénomènes physiques prépondérants et leur couplage. L'objectif est ainsi de quantifier les déplacements de la tuyauterie rompue ainsi que l'impact de celle-ci sur les structures et sur les matériels environnants impliquant une perte potentielle d'intégrité ou d'opérabilité. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte dans la modélisation un grand nombre de phénomènes. Il s'agit, en particulier, de modéliser : l'ovalisation de la section, la formation de la rotule plastique, le déplacement de la tuyauterie sectionnée et l'impact de celle-ci avec les structures avoisinantes.

De nombreuses études ont été réalisées en modélisation tridimensionnelle [2] [3] coûteuse en temps de calcul. Il est donc souhaité de modéliser de façon simplifiée la dynamique de la tuyauterie rompue afin de permettre une évaluation rapide du respect des critères de sûreté. Dans ce but nous développons nos modélisations dans le cadre d'un formalisme filaire adapté à la dynamique des tuyauteries [4].

Dans un premier temps, nous décrivons la modélisation d'un tube droit comme une modélisation de poutre enrichie dont la section s'ovalise. Le modèle est alors discrétisé comme un élément fini et implémenté dans le code de dynamique rapide explicite Europlexus. Les résultats de simulation sont ensuite comparés à quelques solutions analytiques sur des cas de chargements simples.

2 Modélisation du tube

2.1 Cinématique de poutre enrichie d'un tube droit

Nous considérons un tube droit de longueur L , de rayon moyen R et d'épaisseur e , porté par l'axe \mathbf{E}_X (figure 1).

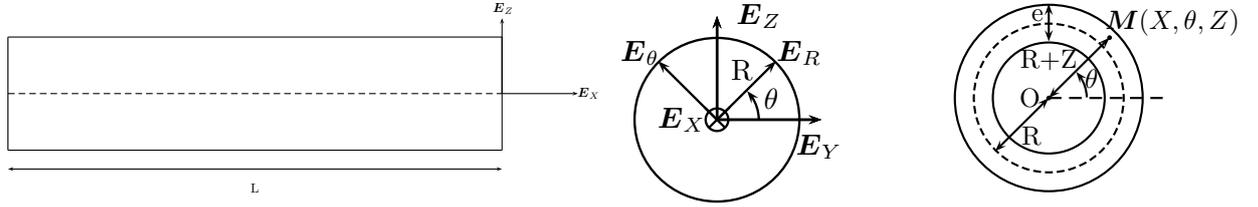


FIGURE 1 – Schématisation d'un tuyau droit : Vue plane (à gauche), vue transversale (au centre et à droite)

La cinématique du tube est décomposée en plusieurs contributions : le mouvement de translation de l'axe du tube $U_o(X), W_o(X), V_o(X)$, exprimé dans la base $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$, puis les rotations de la section droite $\mathbf{R}(X)$, définies en chaque point de l'axe (figure 2). Enfin, on définit le déplacement relatif par rapport à la section droite tournée $u(X, Z, \theta), w(X, Z, \theta), v(X, Z, \theta)$, représentant respectivement son gauchissement et la forme de la section déformée, (figure 3) exprimé dans la base $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$, où $-\frac{e}{2} \leq Z \leq \frac{e}{2}$.

Les positions du point de l'état initial, $\mathbf{M}(X, Z, \theta)$, et de l'état déformé, $\mathbf{m}(X, Z, \theta)$, sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_o + (R+Z) \cos \theta \mathbf{E}_R = X \mathbf{E}_X + (R+Z) \cos \theta \mathbf{E}_R \\ \mathbf{m} &= \mathbf{M} + \mathbf{U} = (X + U_o) \mathbf{E}_X + V_o \mathbf{E}_Z + W_o \mathbf{E}_Y + \mathbf{R}(X) \cdot ((R+Z+w) \mathbf{E}_R + u \mathbf{E}_X + v \mathbf{E}_\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

On considère que la rotation de la section est faible, on peut donc écrire :

$$\mathbf{R}(X) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}(X), \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} = (\Omega_x(X) \mathbf{E}_X + \Omega_y(X) \mathbf{E}_Y + \Omega_z(X) \mathbf{E}_Z) \wedge \mathbf{V} \quad (2)$$

où \mathbf{V} est un vecteur quelconque et \mathbf{I} la matrice identité.

Pour simplifier la présentation on considère ici un mouvement plan de l'axe du tube (i.e. $W_o = 0$ et $\Omega_x = \Omega_z = 0$) et on développe le mouvement au premier ordre en déplacement (figures 2 & 3). Pour prendre en compte l'ovalisation de la section, on considère un couplage entre la déformée de la section et la rotation du mouvement de l'axe du tube.

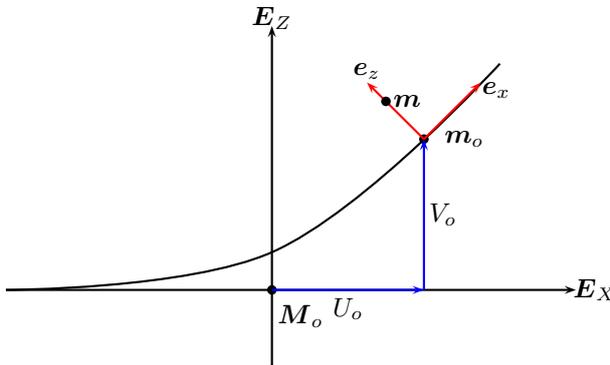


FIGURE 2 – Mouvement plan

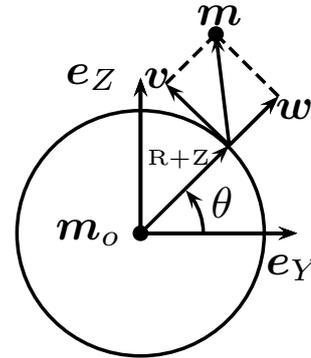


FIGURE 3 – Déplacements de coque dans la surface

La position actuelle $\mathbf{m}(X, \theta, Z)$, du point initialement en $\mathbf{M}(X, \theta, Z)$, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (X + U_o + u + (R+Z+w) \sin \theta \Omega_y + \Omega_y v \cos \theta) \mathbf{E}_X \\ &\quad + (R+Z+V_o \sin \theta + w) \mathbf{E}_R + (V_o \cos \theta + v) \mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (3)$$

On considère que le couplage n'est porté que par ϵ_{xx} , il en résulte le tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} + (R+Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} v \cos \theta + \Omega_y \frac{\partial v}{\partial X} \cos \theta + w \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \sin \theta \Omega_y \frac{\partial w}{\partial X} \\
\epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R+Z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} \\
2\epsilon_{x\theta} &= \cos \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) + \frac{1}{R+Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial X} \\
2\epsilon_{xz} &= \sin \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \\
2\epsilon_{z\theta} &= \frac{1}{R+Z} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{4}$$

Si l'on considère $u = v = w = 0$, la section ne se déforme pas (i.e. $\epsilon_{\theta\theta} = 0$), alors l'absence de distorsion impose (i.e. hypothèse d'Euler-Bernoulli)

$$\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} = 0 \tag{5}$$

et on remarque de plus que la variation d'épaisseur est nulle (i.e. $\epsilon_{zz} = 0$).

La seule déformation est portée par ϵ_{xx} , on retrouve une poutre de Bernoulli dont la section droite est une couronne circulaire non déformée.

D'une manière similaire, on peut associer les rotations à la surface moyenne, et la cinématique de coque s'écrit :

$$\xi(X, \theta, Z) = \xi(X, \theta) + \phi(X, \theta) \wedge \mathbf{AM}(Z) \tag{6}$$

Ici $\xi(X, \theta)$ représente les déplacements de la surface moyenne (i.e. en $Z = 0$), $\phi(X, \theta)$ les rotations de la surface moyenne et $\mathbf{AM}(Z) = Z\mathbf{E}_R$ la normale à la surface de côte Z .

En petite rotation on peut écrire :

$$\xi(X, \theta, Z) = \begin{pmatrix} w(X, \theta, Z) \\ v(X, \theta, Z) \\ u(X, \theta, Z) \end{pmatrix}; \xi(X, \theta) = \begin{pmatrix} w_o(X, \theta) \\ v_o(X, \theta) \\ u_o(X, \theta) \end{pmatrix}; \phi(X, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_z(X, \theta) \\ \phi_\theta(X, \theta) \\ \phi_X(X, \theta) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{AM}(Z) = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Pour simplifier notre écriture on note $v_1 = \phi_X$ et $u_1 = \phi_\theta$. La cinématique de coque s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
w(X, \theta, Z) &= w_0(X, \theta) \\
v(X, \theta, Z) &= v_0(X, \theta) + Zv_1(X, \theta) \\
u(X, \theta, Z) &= u_0(X, \theta) - Zu_1(X, \theta)
\end{aligned} \tag{8}$$

Prenons les hypothèses de Love-Kirchhoff, où ϵ_{xz} et $\epsilon_{\theta z}$ sont nuls. On a alors les relations suivantes :

$$u_1 = \frac{\partial w_0}{\partial X}; \quad v_1 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) \tag{9}$$

La déformation se décompose comme la somme de termes de membrane, ϵ^m , et de termes linéaires en Z , lesquels sont les variations de courbure, \mathbf{k} .

$$\epsilon = \epsilon^m + Z\mathbf{k} \tag{10}$$

Le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - R \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial u_o}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} (-v_o \cos \theta - w_o \sin \theta) + \frac{\partial V_o}{\partial X} \left(-\frac{\partial v_o}{\partial X} \cos \theta - \frac{\partial w_o}{\partial X} \sin \theta \right) + Zk_{xx} \\
\epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right) + Zk_{\theta\theta} \\
2\epsilon_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial X} + 2Zk_{x\theta}
\end{aligned} \tag{11}$$

où

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= -\sin\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} + \frac{1}{R} (\cos\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} (\frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o) + \cos\theta \frac{\partial V_o}{\partial X} (\frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial X} - \frac{\partial v_o}{\partial X})) \\
k_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2} (\frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o) \\
2k_{x\theta} &= -\frac{1}{R} (2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{\partial v_o}{\partial X})
\end{aligned} \tag{12}$$

On introduit le comportement local par la relation d'élasticité linéaire de contrainte plane (i.e. $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{\theta z} = 0$) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{pmatrix} \quad \text{avec } D = \frac{E}{1 - \nu^2} \tag{13}$$

2.2 Développement en séries de Fourier

Jusqu'à présent nos variables cinématiques de coques u_o, v_o, w_o dépendent encore de X et de θ . Nous allons développer ces variables en séries de Fourier selon θ pour obtenir finalement des variables ne dépendant que de X . Ainsi le développement en séries de Fourier nous donne :

$$\begin{aligned}
u_o(X, \theta) &= \sum_{i=2}^{N_f} u_i^c(X) \cos(i\theta) + u_i^s(X) \sin(i\theta) \\
v_o(X, \theta) &= \sum_{i=1}^{N_f} v_i^c(X) \cos(i\theta) + v_i^s(X) \sin(i\theta) \\
w_o(X, \theta) &= w_o(X) + \sum_{i=1}^{N_f} w_i^c(X) \cos(i\theta) + w_i^s(X) \sin(i\theta)
\end{aligned} \tag{14}$$

N_f représente le nombre de modes de Fourier considéré dans le développement.

2.3 Flexion globale, extension et gonflement

Dans un premier temps, intéressons nous à un gonflement de la section de la tuyauterie porté par w ($u = v = 0$ et $N_f = 0$) :

$$w_o(X, \theta) = w_o(X) ; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_o}{\partial X} - R \sin\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + Z (-\sin\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2}) ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = (\frac{1}{R} - \frac{Z}{R^2}) w_o \tag{15}$$

La puissances des efforts intérieurs permet de définir les efforts généralisés :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^L (\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} R d\theta dZ) dX = - \int_0^L N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y (-\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2}) + n_o \delta w_o + m_o \frac{\partial^2 \delta w_o}{\partial X^2} dX \tag{16}$$

où les efforts généralisés sont :

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{xx} R d\theta dZ ; \quad M_y = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{xx} (R + Z) \sin\theta R d\theta dZ \\
n_o &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{\theta\theta} d\theta dZ ; \quad m_o = - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{xx} Z R d\theta dZ
\end{aligned} \tag{17}$$

En équilibre statique avec des efforts imposés nuls ($\mathcal{P}_i = 0$), les équations d'équilibre deviennent :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 ; \quad n_o + \frac{\partial^2 m_o}{\partial X^2} = 0 \tag{18}$$

Pour la loi de comportement considérée (équation 13), on obtient alors les efforts généralisés :

$$\begin{aligned} N &= DS\left(\frac{\partial U_o}{\partial X} + v\frac{w_o}{R}\right) ; \quad M_y = D\pi\left(R^3e + \frac{Re^3}{12}\right)\left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right) ; \\ n_o &= D\frac{S}{R}\left(v\frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{w_o}{R}\right) ; \quad m_o = DR\frac{\pi e^3}{6}\frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} \quad \text{où } S = 2\pi Re \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 Ovalisation du 2nd mode dans le plan

Nous nous intéressons au second mode d'ovalisation ($N_f = 2$). Pour simplifier l'étude on ne considère que les déformations membranaires (i.e. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sauf $k_{\theta\theta} \neq 0$). On ajoute en plus comme hypothèse l'inextensibilité de la section, c'est à dire que le périmètre de la section ne change pas. Cette hypothèse signifie que la déformation membranaire circonférentielle est nulle (i.e. $\epsilon_{\theta\theta}^m = 0$). Ceci nous permet d'obtenir une relation entre v_o et w_o .

$$\epsilon_{\theta\theta}^m = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o\right) = 0 \quad (20)$$

On prend comme déplacement de coque :

$$u_o(X, \theta) = 0 ; \quad w_o(X, \theta) = w_2^c \cos(2\theta) ; \quad v_o(X, \theta) = -\frac{1}{2}w_2^c \sin(2\theta) \quad (21)$$

La puissance des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_i = -\int_0^L N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y \left(-\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2}\right) + T_y \left(\frac{\partial \delta V_o}{\partial X}\right) + n_2^c \delta w_2^c + t_2^c \frac{\partial \delta w_2^c}{\partial X} dX \quad (22)$$

D'une manière similaire, on obtient les équations d'équilibre en statique :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0 ; \quad \frac{\partial T_y}{\partial X} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 ; \quad \frac{\partial t_2^c}{\partial X} - n_2^c = 0 \quad (23)$$

On obtient, avec la loi de comportement en contraintes planes, les efforts généralisés :

$$\begin{aligned} N &= DS\frac{\partial U_o}{\partial X} ; \quad \xi = \frac{w_2^c}{R} ; \quad I = \pi R^3 e ; \quad S = 2\pi Re \\ M_y &= D\left[I\left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{5}{8}\xi^2\right)\left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right) + I\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\xi\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial V_o}{\partial X}\right)\right] \\ T_y &= DI\left[\left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\xi\right)\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{5}{8}\left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right)^2 \frac{\partial V_o}{\partial X}\right] \\ n_2^c &= D\frac{I}{R}\left[\left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\xi\right)\left(\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right) + \frac{5}{8}\frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial V_o}{\partial X} \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right] + D\frac{3\pi e^3}{4R^2}\xi \\ t_2^c &= D\frac{I}{R}\left[\left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\xi\right)\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \frac{\partial V_o}{\partial X} + \frac{5}{8}\frac{\partial \xi}{\partial X}\left(\frac{\partial V_o}{\partial X}\right)^2\right] + G\frac{I}{4R}\frac{\partial \xi}{\partial X} \end{aligned} \quad (24)$$

L'équation du moment M_y est modifiée par rapport au cas précédent car l'inertie de la section a changé.

3 Vérifications

3.1 Extension simple

Pour cette première vérification analytique, on se propose d'étudier le cas d'une tuyauterie en traction simple (figure 4). On impose un déplacement $\frac{u_D}{2}$ d'un côté et $-\frac{u_D}{2}$ de l'autre. On cherche ici la variation du rayon qui dépend du déplacement, u_D , que l'on impose. Sous l'effet de Poisson, l'allongement de la tuyauterie va s'accompagner par la restriction de sa section.

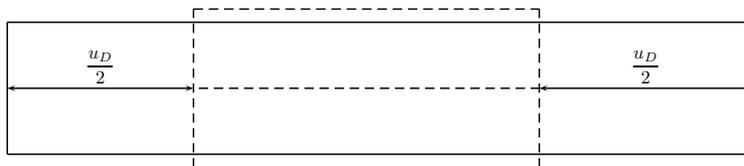


FIGURE 4 – Poutre en traction, déplacement imposé

3.1.1 Résolution 1D Analytique

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de la modélisation théorique 1D que nous avons développée précédemment (équations 18 et 19).

Dans le cas d’une traction simple en considérant également une variation de rayon, seuls le déplacement axial U_o et le déplacement radial w_o sont non nuls. En supposant également que le déplacement w_o est uniforme, on obtient, avec les conditions aux limites $U_o(0) = -\frac{u_D}{2}$ et $U_o(L) = \frac{u_D}{2}$, le déplacement :

$$U_o(X) = \frac{u_D}{L}X \quad \text{et} \quad w_o = -Rv\frac{u_D}{L} \quad (25)$$

En prenant $R = 9.5 \cdot 10^{-4}m$, $L = 10^{-2}m$, $v = 0.3$ et $u_D = 10^{-4}m$ on obtient la valeur du déplacement radial $w_o = -2.85 \cdot 10^{-6}m$.

3.1.2 Résolution 1D Numérique

On réalise un calcul unidimensionnel avec un seul élément fini dans Europlexus avec les données précédentes. Ce calcul a été effectué avec un nombre de Courant de 0.05 ce qui correspond à un pas de temps moyen de $9 \cdot 10^{-8}s$.

Afin de ne pas apporter des erreurs parasites aux résultats numériques, le déplacement est imposé lentement. Les résultats numériques sont considérés sur un seul élément de longueur L et de rayon extérieur $R + \frac{e}{2}$.

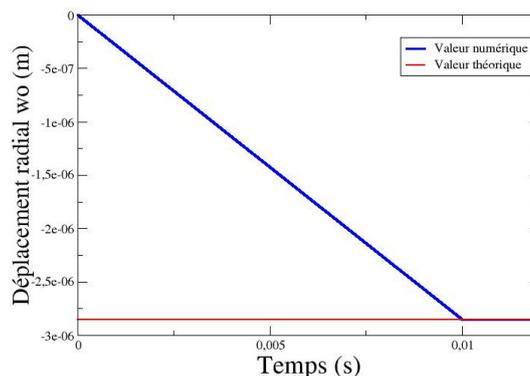
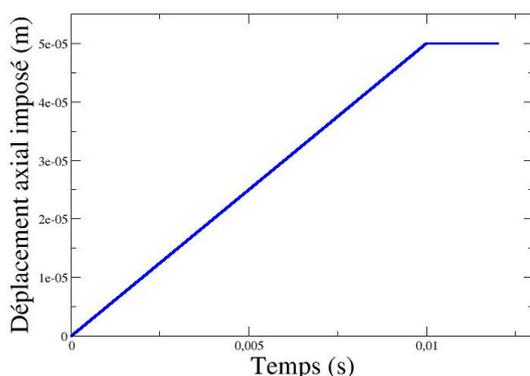


FIGURE 5 – Déplacement(m) axial en traction simple FIGURE 6 – Déplacement(m) radial en traction simple

Le résultat numérique est en bonne adéquation avec le résultat analytique, $w_o = -2.85 \cdot 10^{-6}m$ (figure 6), avec une erreur relative de 10^{-5} .

3.2 Flexion Pure

Pour cette seconde vérification analytique, on se propose d’étudier le cas d’une tuyauterie en flexion pure. On impose les rotations ω et $-\omega$ des sections respectivement S_o et S_L autour de l’axe E_Y (figure 7).

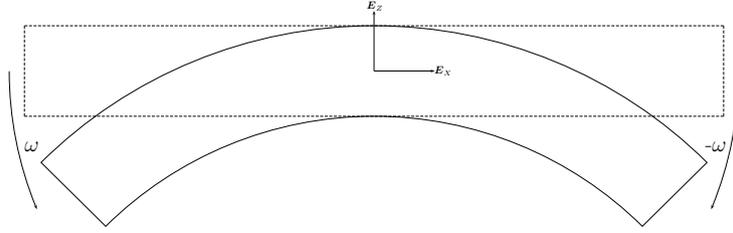


FIGURE 7 – Tube en flexion pure, rotation imposée à ses deux extrémités

3.2.1 Résolution 1D Analytique

On souhaite résoudre le cas d'une flexion pure en se plaçant dans le cas de la modélisation que nous avons développée (équations 23 et 24).

Dans la suite on considère une solution du problème vérifiant : w_2^c uniforme et $w_2^c \ll 1$. On prend comme conditions aux limites :

$$V_o(0) = 0 ; V_o(L) = 0 ; -\Omega_y(0) = \frac{\partial V_o}{\partial X}(0) = -\omega ; -\Omega_y(L) = \frac{\partial V_o}{\partial X}(L) = \omega \quad (26)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$w_2^c = R \frac{R^4}{e^2} \left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} = \frac{2\omega}{L} \quad (27)$$

En prenant $R=10^{-3}m$, $e=10^{-4}m$, $L = 10^{-2}m$ et $\omega = 10^{-1}rad$. On obtient la valeur du déplacement

$$w_2^c = 4.10^{-5}m.$$

3.2.2 Résolution 1D Numérique

On réalise un calcul unidimensionnel avec un seul élément fini dans Europlexus avec les données précédentes. Ce calcul a été effectué avec un nombre de Courant de 0.05 ce qui correspond à un pas de temps moyen de $9.10^{-8}s$. Le résultat numérique est en bonne adéquation avec le résultat analytique, $w_2^c = 4.10^{-5}m$ (figure 9), avec une erreur relative de 10^{-5} .

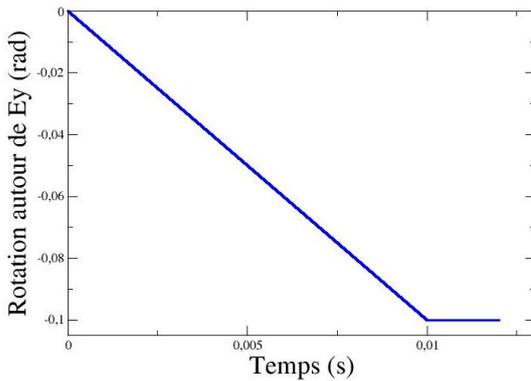


FIGURE 8 – Rotation imposée (rad) en flexion pure

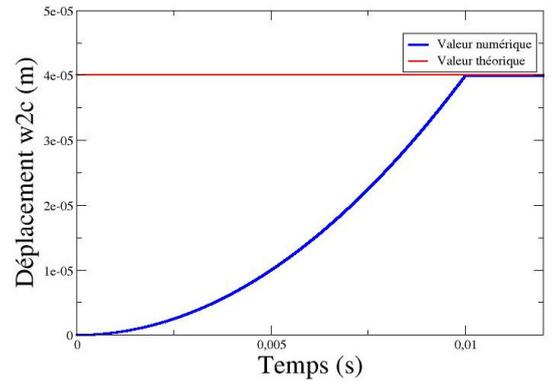


FIGURE 9 – Déplacement (m) w_2^c en flexion pure

3.2.3 Relations Moment-Courbure

On souhaite maintenant regarder l'influence du changement d'inertie dans la section sur la relation Moment-Courbure. On a supposé $w_2^c \ll 1$ et en posant $\frac{w_2^c}{R} = \zeta$ et $\kappa = \frac{R^2}{e} \left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right)$ on obtient :

$$\zeta = \kappa^2 \quad ; \quad M_y = D\pi R e^2 \left(1 - \frac{3}{2}\zeta\right)\kappa = D\pi R e^2 \left(1 - \frac{3}{2}\kappa^2\right)\kappa \quad (28)$$

M_y admet un extremum lorsque $\frac{\partial M_y}{\partial \kappa} = 0$ cette valeur est atteinte pour $\kappa^2 = \frac{2}{9}$ donc pour $\zeta = \frac{2}{9}$ soit $w_2^c = \frac{2}{9}R$. On retrouve les valeurs de Brazier [1].

Si l'on ne considère pas $w_2^c \ll 1$ alors on a les relations :

$$w_2^c = R \frac{\frac{R^4}{e^2} \left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right)^2}{1 + \frac{5}{6} \frac{R^4}{e^2} \left(-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2}\right)^2} ; \quad \zeta = \frac{\kappa^2}{1 + \frac{5}{6} \kappa^2} ; \quad M_y = D\pi R e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \zeta + \frac{5}{8} \zeta^2\right) \kappa \quad (29)$$

Dans ce cas on remarque que le moment de flexion atteint un maximum contrairement à la solution de St Venant (figure 10). Si le moment continue de croître passé ce maximum, la ruine du tube est susceptible de se produire [1].

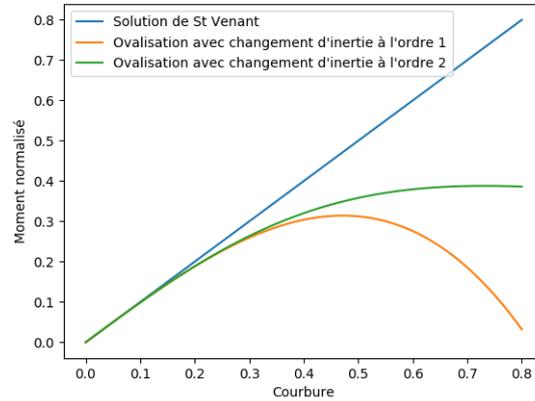


FIGURE 10 – Courbe Moment-Courbure

4 Conclusions

Dans cette étude, un élément de poutre enrichi a été proposé permettant de prendre en considération l'ovalisation de sa section par le biais d'une cinématique de coque développée en séries de Fourier. Les résultats présentés permettent de vérifier que cet élément est conforme aux résultats analytiques en traction simple et en flexion pure. Cet élément permet donc une ovalisation de sa section tout en restant dans un formalisme filaire. Dans la suite des travaux, nous allons considérer des tubes non plus droits mais coudés pour représenter plus fidèlement les circuits de tuyauteries. Nous prendrons un plus grand nombre de modes de Fourier pour représenter des sections très déformées. Des tests numériques ainsi que la littérature nous incitent à aller jusqu'à 6 modes de Fourier pour avoir une bonne représentativité. La recherche de la rotule plastique restant un objectif primordial, il conviendra également de traiter la plasticité de manière locale dans la section.

Références

- [1] Brazier, L.G., Great Britain Aeronautical Research Committee. *The Flexure Of Thin Cylindrical Shells And Other "Thin" Sections*, Proceedings of the Royal Society, Series A 116, 104–114, 1926.
- [2] S.Potapov, P.Galon. *Modelling of Aquitaine II pipe whipping test with the EUROPLEXUS fast dynamic code*, Nuclear Engineering and Design, 2045-2054, 2005.
- [3] R.F.Kulak, E.Narvydas. *Validation of the NEPTUNE computer code for pipe whip analysis*, SMIRT 16, Washington DC, 2001.
- [4] Daude, F. and Galon, P. *A Finite-Volume approach for compressible single- and two-phase flows in flexible pipelines with fluid-structure interaction*, Journal of Computational Physics, 362 :375-408, 2018.