

Vers la construction d'un modèle réduit paramétré pour le calcul de vibrations hydroélastiques avec précontrainte

C. Hoareau¹, J.-F. Deü¹, R. Ohayon¹

¹ LMSSC, Conservatoire national des arts et métiers, {christophe.hoareau}@lecnam.net

Résumé — Cette étude porte sur le calcul des vibrations linéaires d'une structure précontrainte par le poids d'un liquide interne. L'originalité de l'approche proposée consiste à utiliser des projections sur une base de modes propres associées à l'utilisation de la POD pour calculer de façon efficace les fréquences de résonance du problème couplé. Nous montrerons en particulier que la démarche proposée permet d'écrire un modèle réduit impliquant un petit nombre d'opérateurs matriciels paramétrés.

Mots clés — Réduction de modèle, vibrations hydroélastiques, précontrainte.

1 Introduction

1.1 Étude basée sur une expérience en laboratoire

Cette étude concerne un problème hydroélastique, à savoir les vibrations linéarisées de structures élastiques, remplies d'un fluide incompressible supposé non-visqueux. La prise en compte de l'effet de précontrainte dû au poids du liquide fait partie de l'originalité de l'approche [1]. La deuxième originalité se concentre sur la prédiction du comportement dynamique du problème couplé via des bases modales pour calculer les fréquences hydroélastiques [2]. Un travail préliminaire basé sur des bases POD (Proper Orthogonal Decomposition [3]) générant des matrices réduites paramétrées est proposé. Les résultats présentés sont comparés à une expérience réalisée par [4] qui est illustrée en Fig. 1. Le principe consiste à étudier le comportement dynamique d'un disque en plexiglass flexible situé au fond d'une colonne d'eau dont la hauteur du liquide λ est variable. L'expérience a permis de mettre en évidence que la précontrainte présente dans le disque et l'effet de masse ajoutée ont une influence mutuelle sur les fréquences couplées hydroélastiques. Rappelons que l'analyse vibratoire hydroélastique linéarisée est d'un grand intérêt pour l'étude du contrôle et de la stabilité des lanceurs à ergols liquides [5]. La généralisation de cette étude mènerait à terme à la construction de modèles réduits pour des calculs hydroélastiques paramétrés effectués en temps réels.

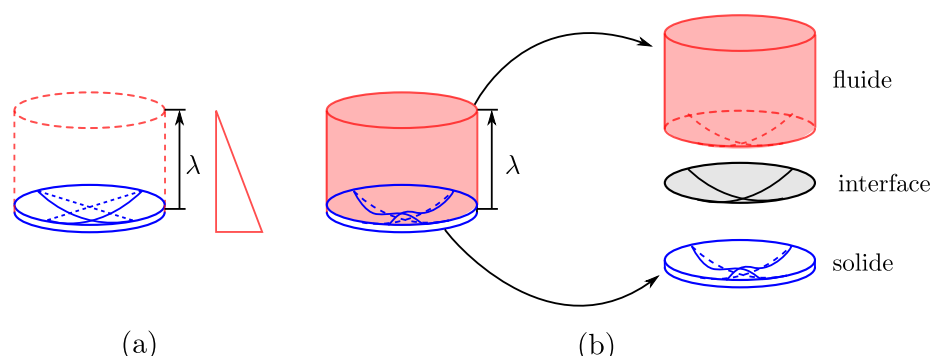


FIGURE 1 – (a) Calcul de l'état précontraint du fond en plexiglass en fonction du chargement hydrostatique du liquide λ et (b) vibrations linéarisées hydroélastiques, domaines fluide-structure et interface.

1.2 Hypothèses préliminaires

La structure est supposée homogène, élastique et isotrope. Une relation de comportement linéaire (Saint-Venant Kirchhoff), valable pour des grands déplacements et faibles déformations, est utilisée. La structure est supposée vibrer, en contact avec un liquide incompressible et non-visqueux, autour d'un état précontraint. Cet état correspond à la contrainte induite par le poids du liquide menant à un équilibre statique non-linéaire. Ainsi, l'approche se décompose en deux temps :

- **Le calcul d'un état statique associé à un problème non-linéaire avec force suiveuse hydrostatique** est effectué en fonction d'un paramètre de chargement λ . Dans notre cas λ correspond à la hauteur de liquide. La solution en déplacement, notée $\mathbf{q}(\lambda)$, est obtenue via la méthode des éléments finis (MEF).
- **Le calcul des vibrations hydroélastiques** linéarisées autour de l'état précontraint est réalisé. Une formulation (\mathbf{u}, φ) couplant champ de déplacement de la structure \mathbf{u} et potentiel de déplacement du fluide φ est utilisée. Les vibrations du système sont classiquement calculées pour différentes hauteurs de liquide λ qui sont considérées comme un paramètre d'évolution. Les études prennent en compte l'énergie cinétique du liquide déplacé, appelée effet de masse ajoutée. Les effets de compressibilité du liquide (son énergie potentielle) ainsi que les effets de ballonnement de la surface libre (énergie potentielle due à la gravité et/ou à la tension superficielle) sont négligés. De ce fait, le potentiel de déplacement φ est nul sur la surface libre. Bien entendu, les effets de gravité sont présents pour définir la configuration d'équilibre statique non-linéaire autour de laquelle les vibrations sont étudiées.

2 Problèmes de référence

2.1 Problème non-linéaire discrétisé avec forces suiveuses

Le problème non-linéaire discrétisé par MEF consiste à évaluer la solution EF discrétisée qui vérifie les équations d'équilibre en fonction d'un paramètre de chargement noté λ tel que :

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(\lambda, \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Les efforts internes et externes sont respectivement notés \mathbf{f}_{int} et \mathbf{f}_{ext} . Il est utile de réécrire le problème sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K} + \lambda \mathbf{G}] \mathbf{q} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}) + \lambda \mathbf{g}_{\text{nl}}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2)$$

avec \mathbf{g} un terme d'effort externe indépendant de \mathbf{q} , \mathbf{K} et \mathbf{G} les parties linéaires respectivement liées aux efforts internes et externes, \mathbf{f}_{nl} contient les termes quadratiques et cubiques des efforts internes et \mathbf{g}_{nl} contient la partie non-linéaire des forces suiveuses. Nous pouvons démontrer que ces termes ont aussi une non-linéarité cubique si la force suiveuse est hydrostatique. Le problème non-linéaire est résolu de façon itérative via la résolution successive d'un système linéaire discrétisé :

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}(\lambda; \mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} = -\mathbf{r}(\mathbf{q}) \quad (3)$$

Le terme \mathbf{r} correspond au résidu d'équilibre et la matrice \mathbf{K}_{tan} est définie par :

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}(\lambda; \mathbf{q}) = \mathbf{K} + \lambda \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \lambda \frac{\partial \mathbf{g}_{\text{nl}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4)$$

Le problème est supposé stable sur la plage de paramètres de chargement.

2.2 Problème hydroélastique linéarisé autour de l'état précontraint

Le problème hydroélastique discrétisé couplant champ de déplacement \mathbf{u} et champ de potentiel de déplacement φ peut se ramener à un problème aux valeurs propres écrit sous forme suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{tan}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \rho_f \mathbf{C} \\ \rho_f \mathbf{C}^T & -\rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Compte tenu des hypothèses énoncées précédemment, il est possible de condenser le problème sur les degrés de libertés de la structure tel que :

$$[\mathbf{K}_{\text{tan}} - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)]\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_a = \mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}^T \quad (6)$$

avec \mathbf{K}_{tan} la matrice tangente de la structure autour d'un état précontraint, \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{M}_a la matrice de masse ajoutée et \mathbf{u} le vecteur des inconnues nodales. Notons que la matrice \mathbf{H} associée au gradient de φ est inversible et \mathbf{C} correspond à une matrice de couplage à l'interface fluide-structure. A terme, ce système permet d'évaluer les pulsations propres du problème couplé ainsi que les modes hydroélastiques :

$$\left\{ \omega_\alpha^2, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \varphi_\alpha \end{pmatrix} \right\}_{\alpha=1\dots m} \quad (7)$$

L'évaluation des fréquences propres du système couplé est à réaliser pour chaque paramètre de chargement λ , ce qui peut devenir coûteux en temps de calcul. Il devient donc pertinent d'utiliser des approches par projections sur base de modes pour accélérer les études paramétriques.

3 Problème hydroélastique avec précontrainte projeté sur base sèche

Le calcul des fréquences propres hydroélastiques peut s'effectuer via la résolution d'un problème aux valeurs propres nécessitant la construction d'un opérateur de masse ajoutée (voire Eq. (6)). Cependant, une telle approche nécessiterait l'inversion d'un opérateur \mathbf{H} pour chaque nouvelle valeur de paramètre λ . Pour pallier à ce problème, nous proposons ci-dessous une approche par projection sur base dite "sèche".

L'idée principale se base sur un calcul préliminaire des modes de la structure sans l'opérateur de masse ajoutée. La Fig. 2(a) représente l'évolution des 5 premières fréquences couplées en fonction du paramètre de chargement λ . L'approche décrite en Fig. 2(b) peut se décomposer en 5 étapes, pour une valeur de λ_i donnée :

- **E1** : Construction d'un problème aux valeurs propres autour d'un état précontraint constitué de la matrice tangente $\mathbf{K}_{\text{tan}}(\lambda_i)$ et de la matrice de masse \mathbf{M} .
- **E2** : Génération de la base de mode \mathbf{B}_u constituée des n_{sec} premiers vecteurs \mathbf{u}_β associés aux pulsations ω_β croissantes.
- **E3** : Résolution de n_{sec} systèmes linéaires à partir de l'opérateur \mathbf{H} , de la transposée de la matrice de couplage \mathbf{C}^T , pour chaque mode sec \mathbf{u}_β . La réponse du fluide φ_β ainsi calculée est stockée dans une matrice \mathbf{B}_φ .
- **E4** : Construction des opérateurs réduits \mathbf{K}_r , \mathbf{M}_r et \mathbf{M}_{ar} . Ces opérateurs sont de taille $(n_{\text{sec}} \times n_{\text{sec}})$.
- **E5** : Résolution du problème aux valeurs propres réduit avec matrice de masse ajoutée réduite :

$$[\mathbf{K}_r - \omega^2(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ar})]\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Les valeurs propres de ce système nous renseignent sur les fréquences de résonances hydroélastiques (comme illustré en Fig. 2(a)).

Cette méthodologie a l'avantage de permettre le calcul d'un opérateur de masse ajoutée réduit sans inversion de matrice. Elle est néanmoins dépendante du nombre de modes secs à choisir au préalable. A notre connaissance, aucune méthode *a priori* ne permet de déterminer le nombre optimal de modes secs à sélectionner. C'est cette approche qui a été utilisée et comparée aux résultats expérimentaux pour validation dans [2].

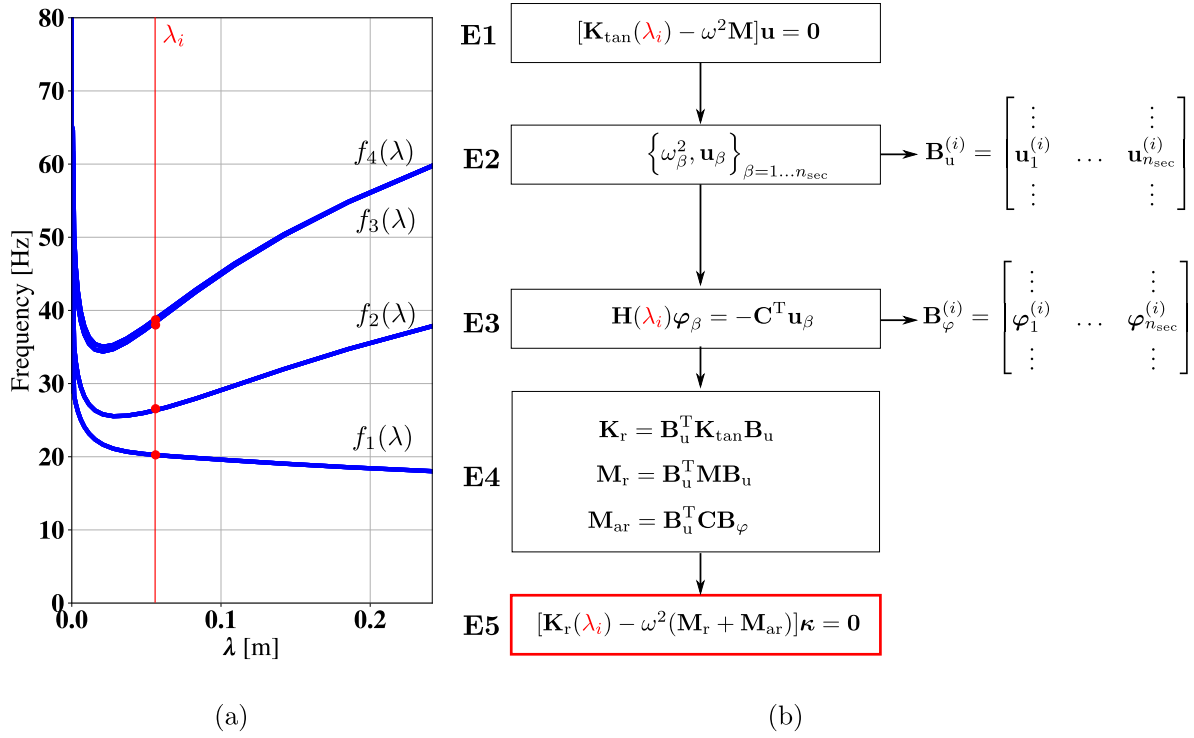


FIGURE 2 – (a) Évolution des fréquences hydroélastiques avec précontraintes ; (b) Méthodologie pour le calcul des valeurs propres hydroélastiques par projection sur base sèche.

4 Construction des opérateurs réduits et paramétrés

Les équations (8) nécessitent la construction d'opérateurs réduits \mathbf{K}_r et \mathbf{M}_{ar} pour chaque valeur du paramètre λ . Cette section est consacrée à l'approximation de ces opérateurs comme combinaison linéaire d'opérateurs réduits.

4.1 Matrices réduites comme somme finie d'opérateurs réduits

Les matrices \mathbf{M}_{ar} et \mathbf{K}_r dépendent du nombre de modes secs n_{sec} sélectionnés pour les construire. Ces matrices sont supposées de petites tailles vis-à-vis du nombre de degrés de liberté du problème de référence. Pour une matrice de masse ajoutée réduite donnée \mathbf{M}_{ar} , un vecteur \mathbf{V}_{ar} constitué des colonnes de la matrice réduite est généré comme illustré en Fig. 3. Cette méthodologie est aussi appliquée à la matrice de raideur réduite. Chaque vecteur peut être concaténé dans une matrice dite de "snapshots" \mathbf{U}_{snap} .

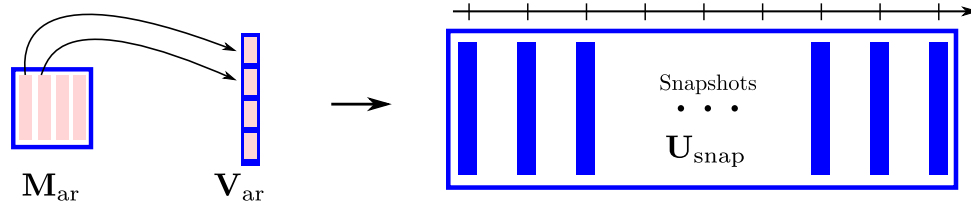


FIGURE 3 – Construction de la matrice des snapshots à partir des matrices de masse ajoutée réduites.

A partir de la matrice de snapshots, une décomposition en valeurs singulières (SVD) est effectuée pour en extraire les matrices \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$ et \mathbf{V} :

$$\mathbf{U}_{snap} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (9)$$

Les premiers vecteurs de la matrice \mathbf{U} contiennent les bases POD qui contiennent les informations numériques nécessaires pour reconstruire les matrices de bases comme illustré en Fig. 4. Les premières lignes de la matrice $\Sigma \mathbf{V}^T$ correspondent aux contributions de chaque matrice en fonction du paramètre.

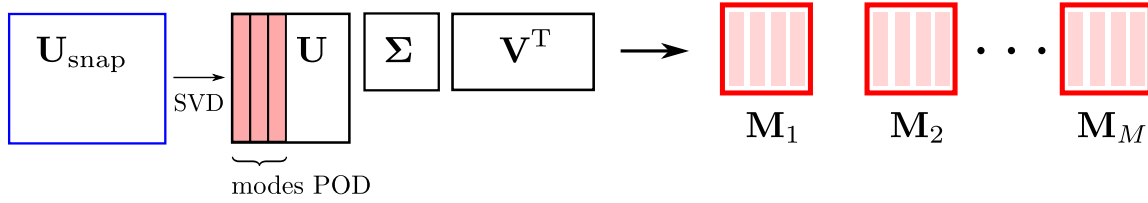


FIGURE 4 – Génération des bases de matrices réduites à partir d’une SVD.

Ainsi, cette méthodologie nous permet de générer des bases de matrices pour reconstruire \mathbf{M}_{ar} et \mathbf{K}_{r} via des combinaisons linéaires de façon suivante :

$$\mathbf{M}_{\text{ar}} \simeq \sum_{i=1}^M \theta_i(\lambda) \mathbf{M}_i \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{\text{r}} \simeq \sum_{i=1}^K \eta_i(\lambda) \mathbf{K}_i \quad (11)$$

Les coefficients $\eta_i(\lambda)$ et $\theta_i(\lambda)$ sont actuellement obtenus à partir de la SVD. Si le modèle peut s’écrire sous forme de produits de fonctions à variables séparées, \mathbf{K}_{r} peut s’exprimer sous forme d’une somme finie de matrices calculées *a priori* [6]. Cependant, à notre connaissance, aucune expression de la matrice \mathbf{M}_{ar} écrite sous forme séparée par rapport aux paramètres n’a été formulée dans la littérature.

5 Résultats numériques

Rappelons que la méthodologie présentée précédemment se base sur l’expérience issue de [4]. L’objectif est d’évaluer les vibrations hydroélastiques linéarisées d’une plaque mince en plexiglass, de forme circulaire, située sous une colonne d’eau. La solution statique du problème non-linéaire est supposée connue. Le liquide est en contact avec la surface supérieure de la structure qui est encastrée sur son bord. La surface inférieure du disque est libre d’effort. La hauteur du liquide varie de $\lambda_{\text{min}} = 0$ mm à $\lambda_{\text{max}} = 250$ mm. Les paramètres du matériaux sont le module d’Young $E = 6.9 \times 10^9$ Pa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.38$ et la masse volumique du solide $\rho_s = 1.4 \times 10^3$ kg.m⁻³. La masse volumique du liquide vaut $\rho_f = 1.0 \times 10^3$ kg.m⁻³.

Deux cas d’études sont présentés ci-après :

- Une **analyse des vibrations hydroélastiques sans précontrainte** est proposée. Cette étude met en évidence l’effet de masse ajoutée. Dans cette configuration, l’analyse des courbes montre que l’effet de masse ajoutée tend à faire diminuer les fréquences en fonction de λ . Ces résultats permettent également d’évaluer les fréquences pour différents nombres de matrices réduites issues de la POD via l’Eq. (10).
- Une autre **analyse des vibrations hydroélastiques avec précontrainte** montre l’effet de la précontrainte sur le comportement hydroélastique couplé. L’effet de masse ajoutée tend à faire diminuer les fréquences en fonction de λ pour de faibles valeurs de λ . Cependant, l’effet de la précontrainte a tendance à faire augmenter les fréquences hydroélastiques (sauf pour le mode 1). On peut ici évaluer le nombre de matrices réduites \mathbf{K}_i , issues de l’Eq. (11), nécessaires pour converger vers les fréquences du problème de référence.

5.1 Problème hydroélastique sans précontrainte avec masse ajoutée

Le problème aux valeurs propres ci-dessous permet de calculer les fréquences hydroélastiques sans précontrainte :

$$\left[\mathbf{K}_r^{\text{lin}} - \omega^2 \left(\mathbf{M}_r + \sum_{i=1}^M \theta_i(\lambda) \mathbf{M}_i \right) \right] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Les résultats de la Fig. 5 montrent l'évolution des 5 premières fréquences hydroélastiques en fonction de λ . La courbe en rouge correspond aux résultats de référence et la courbe en tirets bleus correspond à la solution reconstruite. Nous constatons que peu de matrices réduites \mathbf{M}_i suffisent pour reconstruire les fréquences de résonances. Nous traçons en Fig 6 les trois premiers coefficients θ_i en fonction du paramètre de chargement. Ces coefficients sont les contributions des 3 premières matrices obtenues via la POD. Les premiers modes ont des contributions plus importantes que les modes suivants. Les fluctuations des coefficients fonctions de λ sont de plus en plus importantes quand le nombre de modes augmente.

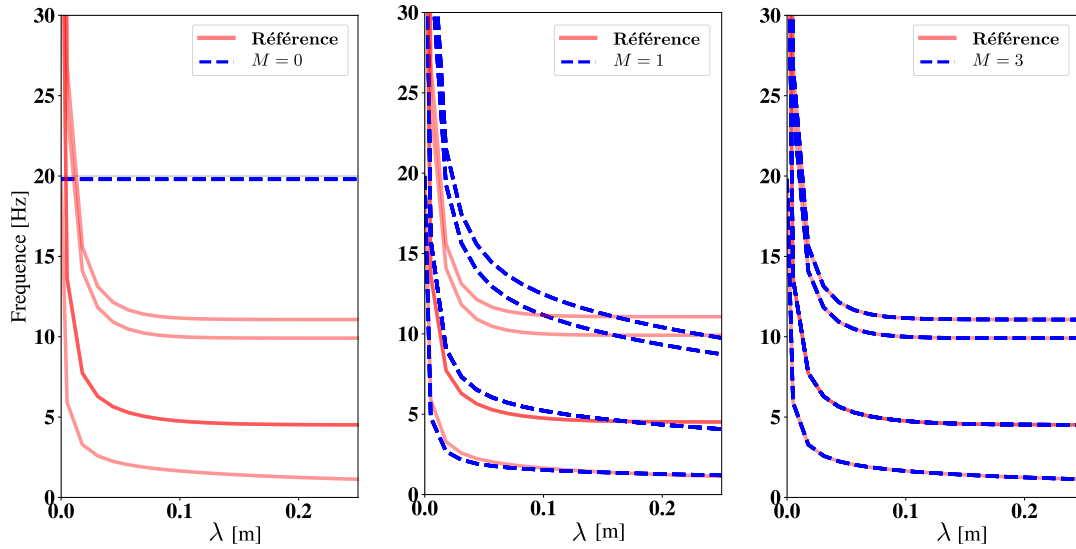


FIGURE 5 – Évolution des fréquences de résonances hydroélastiques en fonction du paramètre de chargement λ pour différents nombres d'opérateurs réduits de masse ajoutée \mathbf{M}_i .

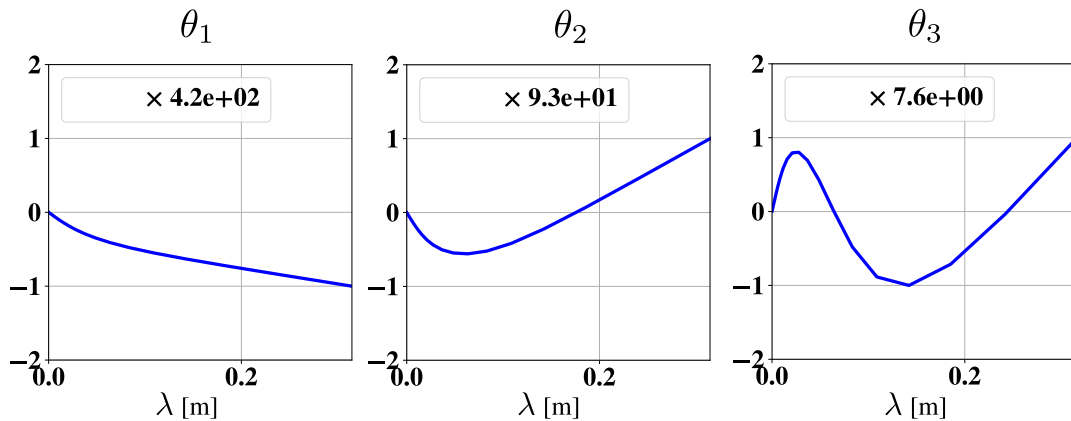


FIGURE 6 – Contributions des matrices de masse ajoutée réduites obtenues via la POD en fonction du paramètre λ .

5.2 Problème hydroélastique avec précontrainte et masse ajoutée

Le problème aux valeurs propres ci-dessous permet de calculer les fréquences hydroélastiques avec précontrainte :

$$\left[\sum_{i=1}^K \eta_i(\lambda) \mathbf{K}_i - \omega^2 \left(\mathbf{M}_r + \sum_{i=1}^M \theta_i(\lambda) \mathbf{M}_i \right) \right] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (13)$$

De façon similaire à l'étude précédente, la Fig. 7 montre l'évolution des 5 premières fréquences hydroélastiques avec la prise en compte de la précontrainte. Le nombre de matrices \mathbf{M}_i est fixé à 3 sur toutes les courbes. Seul le nombre de matrices \mathbf{K}_i varie d'un graphe à l'autre. Au même titre que pour les matrices de masse, le nombre de matrices de raideur réduites \mathbf{K}_i nécessaires pour converger reste faible. Nous traçons en Fig. 8 les trois premiers coefficients η_i en fonction du paramètre de chargement. Le temps de calcul du modèle réduit est ici indépendant du nombre de degrés de liberté du problème de référence. Il peut être résolu de façon quasi instantanée si le nombre et la taille des opérateurs restent faibles.

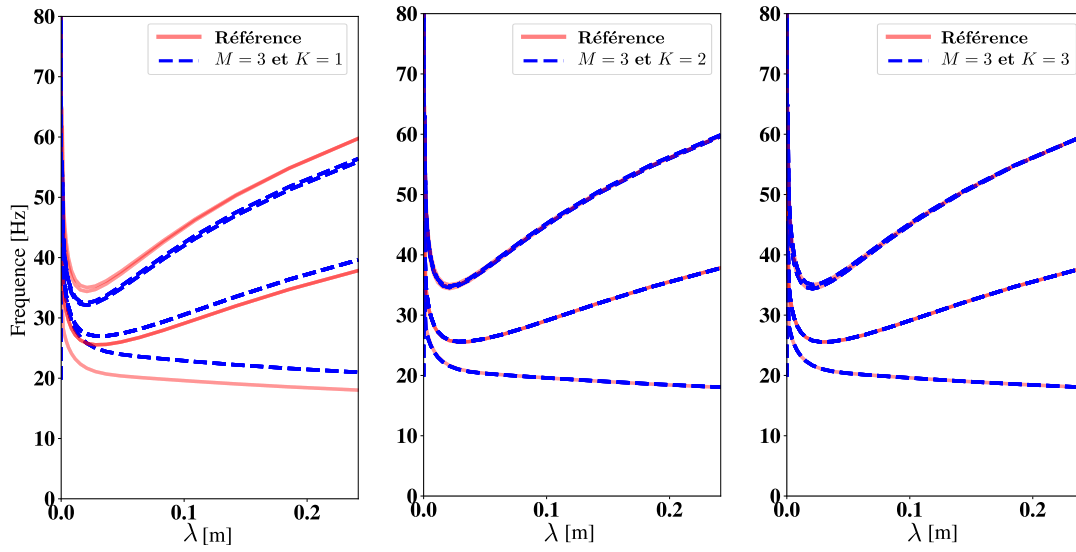


FIGURE 7 – Évolution des fréquences de résonances hydroélastiques avec précontrainte en fonction du paramètre de chargement λ pour différents nombres d'opérateurs de raideur réduites \mathbf{K}_i .

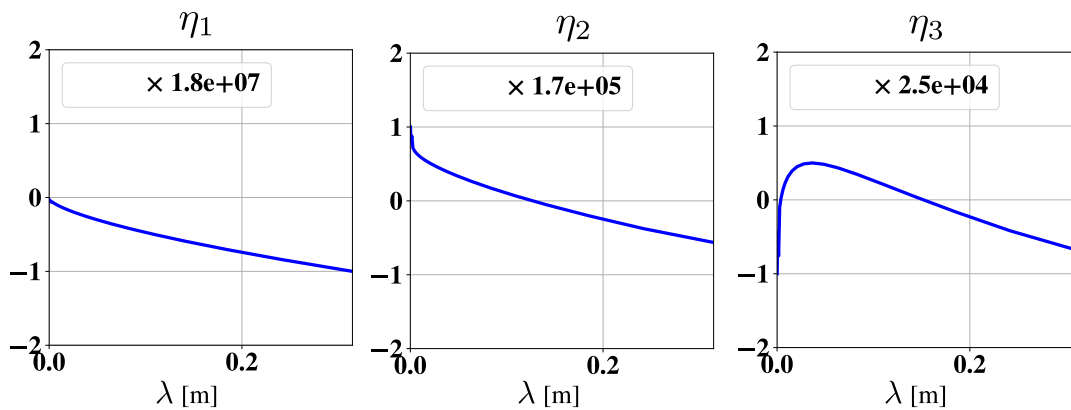


FIGURE 8 – Contributions des matrices de raideur tangente réduites obtenues via la POD en fonction du paramètre λ .

5.3 Conclusion

Cette étude concerne la construction d'un modèle réduit paramétré d'un problème hydroélastique avec précontrainte. Une approche originale permettant de construire des matrices réduites sous formes de séries à variables séparées à partir d'une SVD a été proposée. Un exemple basé sur une expérience issue de [4] permet de mettre en évidence la faisabilité et la validité de la présente méthode qui prend en compte les influences mutuelles de la précontrainte et de l'effet de masse ajoutée. La façon d'interpoler les coefficients obtenus via la SVD pour une plus grande quantité de paramètres fera l'objet de futurs développements. A terme, ces travaux pourraient être intégrés à des jumeaux numériques paramétrés pour le calcul du comportement hydroélastique de lanceurs spatiaux dans le cadre d'optimisations ou de boucles de contrôles asservies.

Références

- [1] C. Hoareau, J.-F. Deü, *Nonlinear equilibrium of partially liquid-filled tanks : A finite element/level-set method to handle hydrostatic follower forces*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 113, 112-127, 2019.
- [2] C. Hoareau, J.-F. Deü, R. Ohayon. *Prestressed vibrations of partially filled tanks containing a free-surface fluid : finite element and reduced order models*, Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, Barcelona, Spain, 330-340, 2019.
- [3] G. Berkooz, P. Holmes, J. Lumley. *The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows*. Annual Review of Fluid Mechanics, 25, 539-575, 1993.
- [4] M. Chiba. *Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom containing liquid. Part I : Experiment*, Journal of Fluids and Structures, 6, 181-206, 1992.
- [5] H.J.-P. Morand, R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*, Wiley, 1995.
- [6] C. Hoareau, J.-F. Deü, R. Ohayon. *POD associated with modal projection-based reduced order model for prestress structural vibrations*, Proceedings of the 10th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, Austria, 2022.