

Simulation de la réponse vibratoire des solides hyperélastiques en roulage sur un sol rigide

Z. Knar^{1,2}, JJ. Sinou¹, S. Besset¹, V. Clauzon²

¹ École Centrale de Lyon, LTDS UMR 5513, 69134 Ecully Cedex, France, {zakaria.knar,jean-jacques.sinou,sebastian.besset}@ec-lyon.fr

² Michelin, Centre de technologie de Ladoux, vivien.clauzon@michelin.com

Résumé —

Ce travail de recherche présente une technique numérique pour calculer la réponse vibratoire non-linéaire d'une structure hyperélastique en contact avec un plan rigide. Les non-linéarités traitées sont similaires à celles prises en compte dans la simulation de la réponse dynamique des pneumatiques. La formulation mathématique de la méthode proposée est détaillée. La méthode est appliquée pour calculer les vibrations non-linéaires d'un cylindre rainuré en roulage sur un sol rigide. Les résultats de simulation sont analysés pour donner ensuite des éléments de validation de la stratégie numérique proposée.

Mots clés — dynamique non linéaire, contact mécanique, modélisation multi-échelle

1 Introduction

Avec l'avènement des véhicules électriques et les progrès réalisés par les constructeurs automobiles pour réduire le bruit d'origine aérodynamique, le bruit de roulement devient la première source de bruit dans le milieu urbain. Par conséquent, les normes étatiques et spécifications des constructeurs de véhicules sur ce bruit sont de plus en plus exigeantes. La conception des pneumatiques à faible émission de bruit, sans sacrifier les autres performances, s'avère donc un enjeu sociétal et économique majeur. La simulation apporte une aide précieuse à la conception et permet aussi de comprendre les mécanismes physiques régissant le comportement mécanique du pneumatique.

La modélisation de la réponse dynamique du pneu nécessite non seulement le traitement de plusieurs non-linéarités (non-linéarité géométrique, loi de comportement, contact entre le pneu et la chaussée) mais aussi la prise en compte du caractère à deux échelles de celle-ci. En effet, la réponse dynamique du pneumatique est la résultante d'une dynamique macroscopique de roulage qui opère autour de la fréquence de rotation avec des amplitudes ayant un ordre de grandeur similaire aux dimensions du pneu d'une part, et d'une réponse vibratoire excitée par la rugosité de la chaussée et la résonance de la sculpture de la bande de roulement d'une autre part [7, 8].

Une approche directe de simulation consiste à résoudre le problème dynamique par une intégration temporelle avec un schéma numérique conservatif, stable et capable de donner l'intégralité de la réponse dynamique [3, 4]. Cependant, cette approche est limitée par le coût informatique considérable à déployer pour assurer un temps de calcul raisonnable. Une autre stratégie consiste à perturber une configuration de référence pour calculer la réponse vibratoire. La méthode proposée consiste alors à effectuer une première simulation quasi-statique non-linéaire afin d'éviter le passage par un schéma d'intégration temporelle. Ensuite, le problème dynamique est linéarisé en prenant la configuration quasi-statique comme point de référence. La réponse vibratoire peut alors être calculée en intégrant un problème linéaire avec un schéma numérique. La formulation mathématique de cette approche est présentée dans ces travaux. La méthode proposée est implémentée et testée pour calculer la réponse vibratoire d'un prototype ayant une géométrie et une loi de comportement simplifiées. Les résultats de simulation sont présentés et analysés.

2 Formulation mathématique

Un pneumatique qui s'aplatit au contact de la route subit une déformation significative par rapport à sa forme circulaire initiale. L'hypothèse de l'élasticité linéaire consistant à confondre la configuration

de référence et la configuration déformée n'est plus valide. Le traitement de la non-linéarité géométrique s'avère alors important dans la simulation du comportement mécanique des pneumatiques [2]. Dans un premier temps, les tenseurs mécaniques utilisés dans la théorie des grandes déformations sont introduits avec la loi de comportement des matériaux hyperélastiques. Ensuite, la mise en équation de la méthodologie est détaillée et les hypothèses effectuées sont explicitées et justifiées.

2.1 Notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ représentant la configuration de référence d'un corps déformable. Les particules du domaine Ω sont identifiées par le vecteur position $\mathbf{X}$. La position de chaque particule dans la configuration déformée à l'instant t est représentée par $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$. Le déplacement $\mathbf{u}$ est défini par $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. La frontière du domaine $\Gamma = \partial\Omega$ est séparée en une partie Γ_u où un déplacement $\mathbf{u}_d$ est imposé, une partie Γ_f où les contraintes sont imposées et une partie Γ_c qui représente la zone potentielle de contact. Le gradient par rapport à la configuration de référence est noté ∇ . $\mathbf{I}$ est le tenseur identité d'ordre 2. Le tenseur de gradient de déformation est défini par $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$. Le tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ est utilisé pour la description des déformations. Le premier (resp. deuxième) tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff est noté $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{S}$). La bande de roulement des pneumatiques est composée d'un mélange de caoutchoucs. Ce type de matériau a un comportement hyperélastique. Sa loi de comportement est caractérisée par une énergie de déformation W [6]. Le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff est alors relié au tenseur de déformation de Green-Lagrange via la loi de comportement suivante :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

Le tenseur d'élasticité d'ordre 4 correspondant est alors défini par :

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}$$

Ce tenseur est nécessaire dans la résolution du problème variationnel non-linéaire issu des équations d'équilibre local avec la méthode de Newton. Celui-ci est aussi utilisé dans la méthode de linéarisation présentée dans la partie suivante.

2.2 Méthode de linéarisation

Comme mentionné précédemment, l'idée principale de la méthodologie proposée est de linéariser le problème dynamique en utilisant le problème quasi-statique comme point de référence. Toutes les non-linéarités considérées sont alors traitées dans le calcul quasi-statique. La formulation mathématique de la méthode sera détaillée dans cette section. Toutes les grandeurs mathématiques présentées seront indexées par 1 (resp. 2) pour le problème quasi-statique (resp. dynamique).

Le problème variationnel à résoudre pour simuler la réponse quasi-statique est donné par :

Trouver $\mathbf{u}_1 \in \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u\}$

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}_1 : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_1^c \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

où $\mathbf{R}_e$ représente le terme variationnel des efforts extérieurs et $\mathbf{R}_1^c$ est le terme variationnel des efforts de contact.

Le problème variationnel à résoudre pour simuler la réponse dynamique est donné par :

Trouver $\mathbf{u}_2 \in \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u\}$

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P}_2 : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_2^c \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique. $\mathbf{R}_e$ représente le terme variationnel des efforts extérieurs qui est identique à celui du problème quasi-statique. $\mathbf{R}_2^c$ est le terme variationnel des efforts de contact.

L'expression mathématique de $\mathbf{R}_1^c$ et de $\mathbf{R}_2^c$ dépend du type de contact considéré (glissant, adhérent, frottant) et de la méthode numérique utilisée pour la gestion des conditions de contact (pénalisation, Lagrangien augmenté...) [9].

L'hypothèse principale de la méthode est que le déplacement dynamique $\mathbf{u}_2$ est la résultante du déplacement quasi-statique $\mathbf{u}_1$ et les vibrations $\mathbf{w}$. Les termes d'ordre supérieur sont négligés. Autrement dit, l'effet de l'inertie est pris en compte que dans le calcul des vibrations et un processus quasi-statique est suffisant pour décrire le roulage macroscopique de la structure.

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) + o(\mathbf{w}) \quad (3)$$

La condition aux limites de Dirichlet est la même pour les deux problèmes. Ainsi, un déplacement nul est imposé sur Γ_u :

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u$$

La zone active du contact et les termes variationnels des efforts de contact sont supposés invariants entre les deux problèmes.

$$\Gamma_{c,1}^t \approx \Gamma_{c,2}^t \approx \Gamma_c^t, \quad \mathbf{R}_2^c \approx \mathbf{R}_1^c$$

La position normale dans la zone active du contact est donnée par la position du sol rigide pour les deux problèmes. Ainsi, les vibrations normales sont nulles sur la zone active du contact Γ_c^t .

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^t \quad (4)$$

avec $\mathbf{n}$ la normale du sol rigide. Cette condition aux limites est une interprétation de conditions de contact comme une condition aux limites de Dirichlet. Celle-ci est problématique d'un point de vue mathématique vu que Γ_c^t n'est pas lié à un domaine matériel. Cependant, son implémentation numérique ne pose pas de difficulté particulière après une discrétisation par éléments finis.

En remplaçant l'équation (3) dans le problème variationnel dynamique (2) et en négligeant les termes d'ordre supérieur, le problème variationnel à résoudre pour calculer la réponse vibratoire est donné par :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_1 : \nabla^T \mathbf{w} \nabla \mathbf{v} + (C_1 : \mathbf{E}_{\mathbf{w}, \mathbf{u}_1}) : (\mathbf{F}_1^T \nabla \mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{E}_{\mathbf{w}, \mathbf{u}_1} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + \nabla^T \mathbf{w} + \nabla^T \mathbf{u}_1 \nabla \mathbf{w} + \nabla^T \mathbf{w} \nabla \mathbf{u}_1)$$

Le problème à résoudre pour obtenir la réponse vibratoire est par conséquent linéaire. Le terme de déformation représente naturellement la matrice tangente du problème quasi-statique [2]. Le signal d'excitation dépend de l'accélération quasi-statique. Un schéma de différences finies est utilisé pour approximer cette accélération. Ceci génère du bruit numérique en hautes fréquences. Un filtre passe-bas est alors utilisé pour filtrer ce dernier. Pour résumer, la méthodologie consiste à faire une première simulation quasi-statique qui traite toutes les non linéarités. Ensuite, la linéarisation développée dans cette partie permet de calculer la réponse vibratoire en intégrant un problème linéaire. La condition de contact est gérée en imposant un déplacement normal nul sur la zone active du contact qui est un résultat du calcul quasi-statique.

3 Application

Afin de valider la méthode de linéarisation explicitée dans la partie précédente, celle-ci est appliquée pour calculer les vibrations d'un cylindre rainuré présenté sur la figure 1.

3.1 Prototype

La géométrie simplifiée du prototype permet de calculer la réponse dynamique $\mathbf{u}_2$ du prototype qui servira par conséquent de référence afin de comparer la solution linéarisée $\mathbf{w}$ avec la solution de référence $\mathbf{w}_{\text{référence}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ résultat de la différence entre la réponse dynamique $\mathbf{u}_2$ et la réponse quasi-statique

$\mathbf{u}_1$. Ceci permet de valider la linéarisation et les hypothèses effectuées dans la mise en place du problème vibratoire. La méthode de pénalisation est utilisée pour gérer le contact non frottant entre le prototype et le sol rigide défini par l'équation ($z = 0$). La résolution du problème dynamique et quasi-statique est effectuée avec le solveur éléments finis MEF++ qui est développé par le Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis (GIREF) de l'Université Laval. Une intégration temporelle avec le schéma d'Euler implicite est utilisée pour résoudre le problème dynamique (2) et le problème vibratoire (5) discrétisés avec la méthode des éléments finis. Ce schéma implicite utilisé est inconditionnellement stable et le pas de temps choisi assure une convergence des résultats par rapport à cette intégration temporelle.

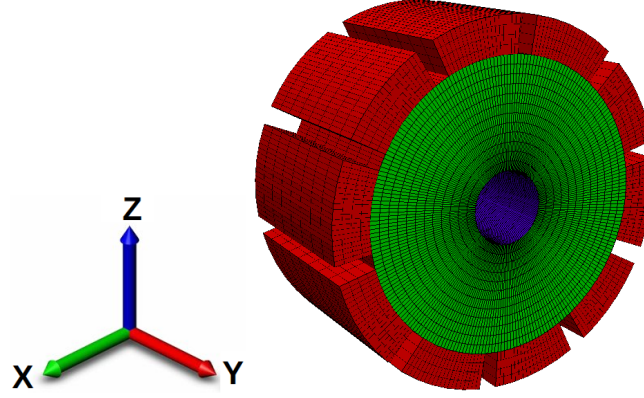


FIGURE 1 – Maillage du prototype

La zone potentielle de contact ou la bande de roulement (en rouge) est composée 10 rainures orientées dans la direction latérale. La zone bleue présente l'équivalent de la zone jante du pneu et est utilisée pour piloter le roulement de la structure en imposant le déplacement suivant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = [Vt \quad 0 \quad -d]^T + \mathbf{R}(\omega t)\mathbf{X} - \mathbf{X} \quad \text{sur } \Gamma_u$$

V est la vitesse de translation, $\mathbf{R}(\omega t)$ est la matrice de rotation associée à la vitesse de rotation ω et d est la flèche imposée pour simuler cinématiquement le chargement du prototype. La charge portée par le prototype peut alors être calculée en intégrant la pression de contact. Les vitesses de translation et de rotation sont reliées par le rayon de roulement r_ω . Une approximation au premier ordre de celui-ci est donnée en fonction du rayon géométrique R_e et la flèche d par [5] :

$$r_\omega \approx R_e - \frac{d}{3}$$

Le matériau hyperélastique du prototype est homogène et isotrope. Le modèle de Saint-Venant Kirchhoff est utilisé pour modéliser la loi de comportement.

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé. La loi de Saint-Venant Kirchhoff est une généralisation de la loi de Hooke utilisée dans le cadre de l'élasticité linéaire. La loi de comportement considérée pour l'application est linéaire. Cependant, la méthode proposée reste applicable pour des lois de comportement non linéaires (comme par exemple l'utilisation d'une modélisation de type Mooney-Rivlin ou d'Ogden).

Les dimensions géométriques et les paramètres matériaux utilisés pour obtenir les résultats présentés ultérieurement sont donnés dans le tableau 1.

Rayon géométrique	$R_e = 0.1 \text{ m}$
Épaisseur	$w = 0.1 \text{ m}$
Module de Young	$E = 2.10^8 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 900 \text{ kg/m}^3$

TABLE 1 – Propriétés mécaniques du prototype.

Les conditions de roulage et les paramètres numériques de simulation sont donnés dans le tableau 2.

Flèche	$d = 0.01 \text{ m}$
Vitesse de rotation	$\omega = 150 \text{ rad/s}$
Pénalisation normale	$\varepsilon_n = 10^{12}$
Pas de temps	$\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$

TABLE 2 – Paramètres de simulation.

La pénalisation normale ε_n utilisée dans le traitement de la condition de non interpénétration [9] est le résultat d'une étude de convergence du résultat du problème quasi-statique par rapport à cette pénalisation.

3.2 Résultats numériques

Les résultats de simulation sont maintenant présentés. Dans un premier temps, le déplacement quasi-statique, solution du problème (1), est analysé pour valider la modélisation. Ensuite, le spectre de l'accélération quasi-statique, obtenue par une dérivation numérique avec un schéma de différences finies, est étudié puisque le signal d'excitation du problème vibratoire est défini par cette accélération. Finalement, la réponse vibratoire, solution du problème (5), est comparée à la solution de référence définie auparavant afin de statuer sur la validité de la méthodologie proposée.

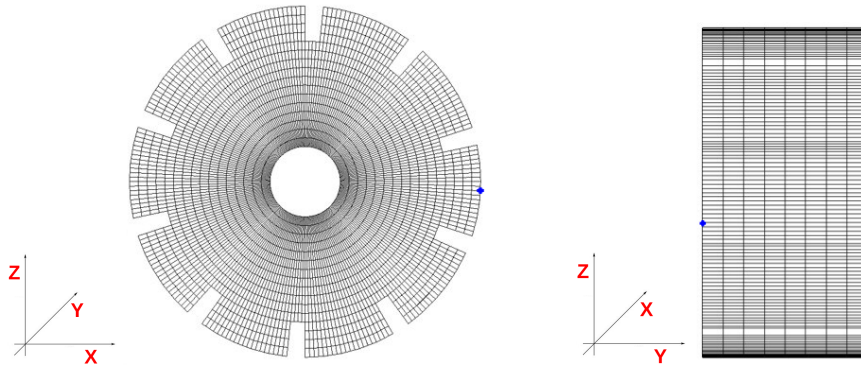


FIGURE 2 – Position du point de mesure.

Le point sélectionné pour afficher les différents résultats présentés dans cette partie est localisé sur la bande de roulement et sa position est illustrée sur la figure 2.

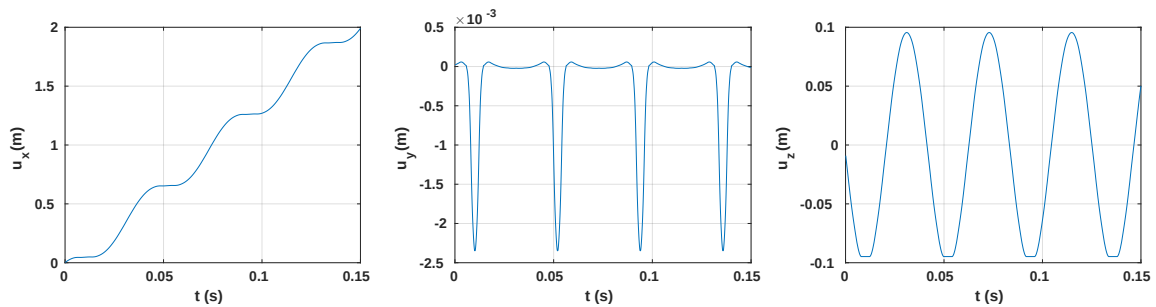


FIGURE 3 – Évolution temporelle du déplacement quasi-statique du point de mesure.

La figure 3 illustre l'évolution temporelle des composantes du déplacement quasi-statique qui est périodique. L'évolution du déplacement longitudinal u_x montre que le passage dans l'aire de contact engendre le ralentissement de l'avancement du prototype dans la direction longitudinale ($0.045s \leq t \leq 0.057s$). En effet, cette cinématique est expliquée par la variation de la distance entre la bande de roulement et l'axe de rotation. Cette distance est minimale au centre de l'aire de contact (AdC) et maximale à

l'opposée de l'AdC. La vitesse locale d'avancement suit la même variation puisqu'elle est définie comme le produit de cette distance par la vitesse de rotation [5]. Le maximum de l'amplitude du déplacement latéral u_y , conséquence de l'effet de Poisson, est localisé au centre l'AdC ($t \approx 0.052s$) et s'annule à l'opposée de l'AdC ($t \approx 0.07s$). D'une autre part, l'évolution du déplacement latéral est symétrique ; la même déformation latérale est observée à l'entrée et à la sortie de l'AdC. Le déplacement vertical u_z montre que la condition de non-interpénétration est bien respectée dans l'AdC ($0.05s \leq t \leq 0.055s$).

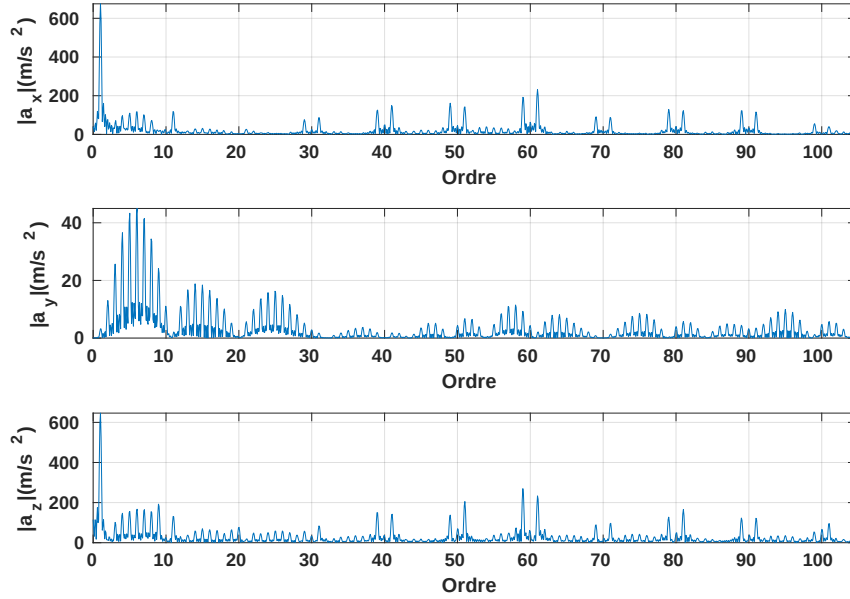


FIGURE 4 – Spectre fréquentiel de l'accélération quasi-statique du point de mesure.

L'équation (5) montre que l'accélération quasi-statique apparaît comme le signal d'excitation du problème vibratoire. Son spectre fréquentiel nous permettra d'avoir une idée sur les fréquences excitées. La figure 4 représente le spectre de l'amplitude de l'accélération quasi-statique tracé en fonction de l'ordre qui est le rapport entre la fréquence et la vitesse de rotation. Deux séries d'harmoniques apparaissent vu que plusieurs non-linéarités sont prises en compte. La fréquence fondamentale est la fréquence de rotation (Ordre = 1). La première série d'harmoniques est localisée autour des multiples de la fréquence de rotation. La deuxième série d'harmoniques est observée autour de 10 fois l'ordre avec un effet de modulation. Cette fréquence représente le passage des rainures dans l'aire de contact par tour de roue et correspond alors à la fréquence des forces de contact. L'effet de modulation est expliqué par le calcul du déplacement dans le repère fixe alors que les forces de contact sont associées au repère tournant [1].

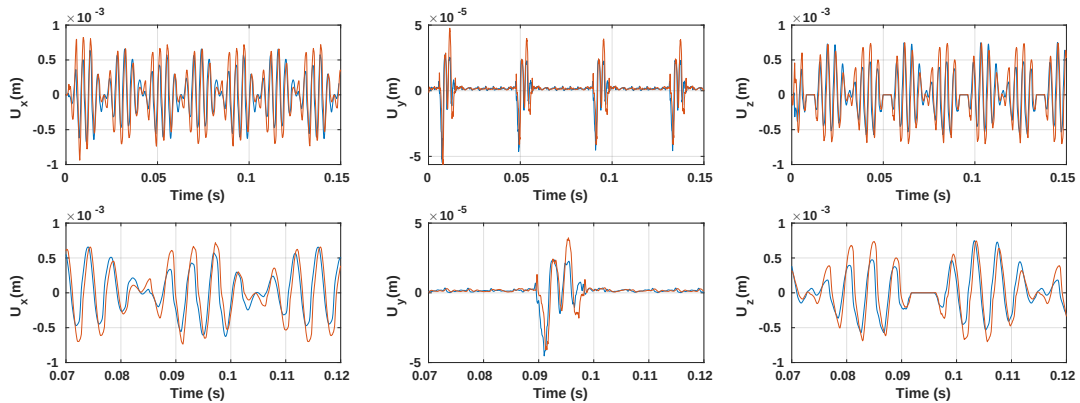


FIGURE 5 – Évolution temporelle des vibrations du point de mesure de la solution linéarisée (—) et de la solution de référence (—) – Intégralité de la simulation (haut) et zoom sur une période (bas).

La figure 5 représente les vibrations du prototype pour la solution de référence et celle de la stratégie mise en place. Les deux solutions vibratoires apparaissent très similaires. Une légère différence est constatée au niveau des amplitudes. Les vibrations sont nulles dans l'aire de contact ($t \approx 0.091s$) pour

les deux solutions. Ainsi, le traitement de la condition de contact en imposant un déplacement normal nul dans l'aire de contact, donnée par la résolution du problème quasi-statique, semble un choix judicieux. Les vibrations verticales et longitudinales ont la même amplitude qui est supérieure à celle des vibrations latérales. L'essentiel des vibrations latérales est observé dans l'aire de contact.

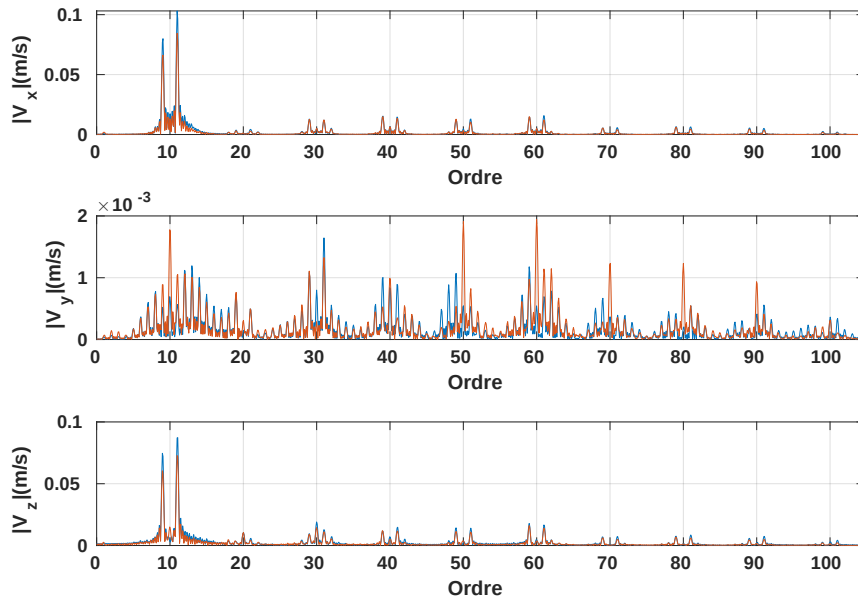


FIGURE 6 – Spectre fréquentiel de la vitesse de vibration du point de mesure de la solution linéarisée (—) et de la solution de référence (—).

La figure 6 représente le spectre fréquentiel de l'amplitude des vitesses des vibrations. Les spectres des deux solutions sont plus ou moins similaires. Le plus grand écart est observé dans la direction latérale. Les harmoniques observées sont localisées autour des multiples de la fréquence de passage des rainures dans l'aire de contact avec le même effet de modulation observé pour l'accélération quasi-statique. Les harmoniques autour des multiples de la fréquence de rotation ont disparu. Par conséquent, la méthode permet d'extraire la réponse vibratoire des blocs de la bande de roulement. L'amplitude de la vitesse des vibrations verticales est similaire à celle des vibrations longitudinales. Cette amplitude est largement supérieure à celle de la vitesse latérale. Ce constat est observé dans l'analyse du spectre de l'accélération quasi-statique.

4 Conclusion

Ce travail présente une méthode de calcul des vibrations non-linéaires d'un solide hyperélastique en roulement sur un sol rigide. Les non-linéarités prises en compte sont identiques à celles traitées dans la simulation de la réponse dynamique des pneumatiques. L'application de la méthodologie sur un prototype démontre la validité de l'hypothèse de linéarisation. Les résultats montrent aussi la capacité de la méthode à extraire la réponse vibratoire de la bande de roulement qui opère dans une échelle différente de celle du roulement de la structure.

Références

- [1] E.T Chipato, A. D.Shaw, M.I. Friswell. Nonlinear rotordynamics of a MDOF rotor–stator contactsystem subjected to frictional and gravitational effects. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 159 (2021) 1077762.
- [2] A. Fortin, A. Garon. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. GIREF. 1997-2020.
- [3] O. Gonzalez. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, 2000, 190 (13-14), pp.1763-1783.
- [4] P. Hauret. *Méthodes numériques pour la dynamique des structures non-linéaires incompressibles à deux échelles*. PhD Thesis. Ecole polytechnique. 2004.
- [5] R.N. Jazar. *Vehicle Dynamics : Theory and Application*, Springer Science+Business Media New York 2014.
- [6] P. Le Tallec. *Handbook of Numerical Analysis*, volume 3. North Holland, 1994. Part 2 : Numerical methods for solids.
- [7] S. Ling, F. Yu, D. Sun et al. A comprehensive review of tire-pavement noise : Generation mechanism, measurement methods, and quiet asphalt pavement. *Journal of Cleaner Production* 287 (2021) 1250562.
- [8] U. Sandberg, J.A. Ejsmont. *Tyre/Road Noise Reference Book*, 1st edition, INFORMEX Ejsmont and Sandberg Handelsbolag Harg, Sweden, 2002.
- [9] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*. *Computational Mechanics* 32, 141 (2003).