

Amélioration de l'identification des paramètres de comportement à partir de mesure de champs par optimisation de la forme de l'éprouvette basée sur la méthode spline FFD.

M. Chapelier^{1,2}, R. Bouclier^{1,2}, J.C. Passieux¹

¹ ICA, INSA Toulouse/UPS/ISAE/Mines Albi/CNRS, Toulouse, Fr. {chapelie,bouclier,passieux}@insa-toulouse.fr

² IMT, UT1/UT2/UPS/INSA/CNRS, Toulouse, Fr.

Résumé — La mesure de champs permet d'identifier de nombreux paramètres mécaniques à partir d'un nombre limité d'essais à condition que ces mesures soient suffisamment sensibles aux paramètres. Nous présentons ici une méthodologie d'optimisation de forme de l'éprouvette visant à minimiser une grandeur modélisant l'incertitude des paramètres. Nous développons une procédure de résolution numérique efficace utilisant des splines et le concept de *Free-Form Deformation* (FFD). Cette stratégie d'optimisation de forme non-intrusive permet de réduire d'un ordre de grandeur l'incertitude sur les paramètres.

Mots clés — optimisation de forme, identification, corrélation d'images, B-Splines.

1 Contexte

La conception de matériaux manufacturés (composites, matériaux architecturés, structures en treillis...) ou le développement de procédés de fabrication avancés s'accompagne de la nécessité de développer des outils de simulation capables de prédire le comportement de pièces complexes. Bien que des outils de simulation pilotés par les données et purement exempts de modèles aient été proposés très récemment [1], la plupart des outils sont essentiellement basés sur des modèles constitutifs plus ou moins sophistiqués [2] avec une possible hybridation avec l'intelligence artificielle [3].

Parce qu'elle fournit des grandes quantités de données hétérogènes sur un même essai, la mesure de champs permet d'identifier plusieurs paramètres de comportement à partir d'un nombre très limité d'essais mécaniques [4]. Ceci est vrai seulement si l'essai (éprouvette+chargement+instrumentation) est conçu de telle sorte que les mesures soient suffisamment sensibles aux paramètres à identifier. Pour ce faire, des travaux ont été réalisés visant à percer des trous dans les éprouvettes, à usiner différentes formes d'entailles ou à concevoir des échantillons de forme plus ou moins complexes (cruciformes, dogbones...). Mais le choix de la géométrie de l'entaille, du rayon du trou et de la position est souvent fait de manière plus ou moins empirique et ne garantit aucune forme d'optimalité quant à l'identification des paramètres.

2 Méthode

Dans cette présentation, nous souhaitons proposer une méthode permettant d'aller plus loin dans l'optimisation de la forme de l'éprouvette. Pour améliorer l'identification des paramètres constitutifs, il faut définir un ou plusieurs critères d'optimalité et construire un algorithme d'optimisation de forme adapté.

2.1 Critère d'optimalité

De nombreux critères d'optimalité d'une éprouvette ont été proposés dans la littérature, qui peuvent être classés en deux grandes familles : La première famille ne considère aucun modèle constitutif spécifique. Elle repose sur une mesure de l'hétérogénéité du champs de déformation ou de façon générale des états des matériaux. Ces méthodes sont conçues pour garantir que le spécimen échantillonne correctement le comportement, ce qui est utile pour discriminer entre différents modèles de comportement. Bien que l'identification des paramètres constitutifs puisse être améliorée, cela n'est pas garanti, car la

fonction objectif ne mesure pas la précision avec laquelle les paramètres sont identifiés.

La seconde approche consiste à optimiser la forme de l'éprouvette par rapport à un modèle de comportement spécifique [5, 6, 7]. Elles se basent sur une analyse théorique *a priori* de la propagation de du bruit de mesure dans le processus d'identification.

Considérant que la principale contribution aux erreurs provienne du bruit de la caméra (bruit considéré comme blanc Gaussien de variance γ^2 dans chaque image I), il est possible de dériver la covariance des déplacements mesurés à chaque nœud éléments finis (EF) de manière très pratique en corrélation d'images basée sur éléments finis (CIN-EF) :

$$[\mathbf{Cov}^u] = 2\gamma^2 \mathbf{H}_{CIN}^{-1}.$$

L'opérateur $\mathbf{H}_{CIN}$ est une approximation de la Hessienne de la fonctionnelle de CIN qui est une sortie explicite et gratuite du problème de CIN et qui admet la forme suivante [8] :

$$\mathbf{H}_{CIN,ij} = \int_I N_i^T(x) \nabla I(x) \nabla I^T(x) N_j(x) dx, \quad (1)$$

$N_i(x)$ désignant les fonctions de forme élément finis.

En se plaçant dans le cadre général des méthodes de recalage de modèles élément finis pondérés (P-RMEF), la variance des paramètres à identifier $\mathbf{q}$ s'écrit donc [9, 5] :

$$[\mathbf{Cov}^q] = 2\gamma^2 \mathbf{H}_{RMEF}^{-1}.$$

où $\mathbf{H}_{RMEF}$ désigne une approximation de la Hessienne de la fonctionnelle de RMEF et qui admet l'écriture suivante :

$$\mathbf{H}_{RMEF} = \nabla_q \mathbf{v} \mathbf{H} \nabla_q \mathbf{v}^T$$

$\mathbf{H}$ désigne l'opérateur de pondération de P-RMEF. Il doit être pris égal à l'inverse de la matrice de covariance des déplacements mesurés $[\mathbf{Cov}^u]^{-1}$ [10, 11] afin de donner à chaque mesure, dans l'identification, un poids inversement proportionnel à son incertitude. Ici $\mathbf{H} = \frac{1}{2\gamma^2} \mathbf{H}_{DIC}$. L'opérateur $\nabla_q \mathbf{v}$ est la matrice de sensibilité du champs de déplacement simulé par rapport aux paramètres. Ses colonnes sont constituées des dérivées du champ de déplacement simulé $\mathbf{v}$ par rapport à chacun des paramètres de comportement $\mathbf{q}$ à identifier.

Cette matrice de covariance contient les informations utiles pour construire un critère d'optimalité qui permet de quantifier ce qu'est une bonne identification des paramètres [5]. De façon assez classique, nous construisons la fonction objectif égale à la plus grande valeur propre de $[\mathbf{Cov}^q]$ que les variables de conception $\mathbf{s}$ doivent minimiser :

$$\mathbf{s}^* = \arg \min_{\mathbf{s}} \lambda_{\max} [\mathbf{Cov}^q]. \quad (2)$$

Par une analyse du problème et des modélisations que nous présenterons, nous arrivons au problème d'optimisation équivalent suivant :

$$\mathbf{s}^* = \arg \max_{\mathbf{s}} \lambda_{\min} \left(\frac{1}{S(\mathbf{s})} (\nabla_p \mathbf{v}(\mathbf{s}) \mathbf{M}(\mathbf{s}) \nabla_p \mathbf{v}^T(\mathbf{s})) \right), \quad (3)$$

dans lequel S désigne la surface de l'échantillon et $\mathbf{M}$ la matrice de mass éléments finis :

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} N^T N dX$$

Le problème (3) est assorti de plusieurs contraintes que nous détaillerons dans la présentation. En particulier, l'une d'elle limite la déformation maximale dans la pièce afin de découpler l'optimisation de l'intensité du chargement de celle de la forme.

2.2 Espace de conception et mise à jour efficace du maillage

Une fois la fonction objectif définie, il est nécessaire de (i) choisir un espace de conception approprié pour paramétrer les évolutions de la forme et (ii) construire une technique efficace pour mettre à jour le

maillage des éléments finis lorsque la géométrie évolue. Les positions des nœuds du maillage pourraient être directement utilisées comme variables de conception. La littérature montre que cela correspond à des espaces de conception excessivement grands qui peuvent conduire à des formes irrégulières qui héritent des propriétés C^0 des fonctions de base des éléments finis : [12].

Pour contourner ces problèmes, nous nous inspirons de la communauté de l'optimisation de formes et utilisons un espace spline plus régulier comme espace de recherche : [13, 14, 15]. Les fonctions splines sont évidemment bien adaptées à l'optimisation de forme puisqu'elles ont été construites pour la modélisation géométrique en CAO ; elles sont d'une plus grande régularité et impliquent donc peu de degrés de liberté (principalement associés aux positions des points de contrôle des entités splines) pour décrire une géométrie et, plus important encore, une mise à jour de la géométrie.

Notre objectif est de tirer parti des propriétés des splines mais aussi de les utiliser de manière non-intrusive afin que les logiciels de simulation EF habituels puissent être utilisés sans remaillage. Pour ce faire, nous proposons de nous appuyer sur la technique de *Free Form Deformation* (FFD) qui construit l'espace spline comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel EF : [16, 17]. La FFD consiste à immerger la géométrie EF initiale dans une boîte de morphing spline. La position de chaque nœud EF est définie comme une combinaison linéaire de la position des points de contrôle de la boîte de morphing, et le déplacement d'un point de contrôle déforme le maillage EF en conséquence. Dans ce travail, nous proposons de créer une boîte de morphing de dimension topologique 1 pour chaque bord d'élément géométrique (cercle, encoche, ligne...) que nous voulons optimiser. Par conséquent, la boîte de morphing, qui est une courbe 1D, doit être conforme à la géométrie initiale du bord de l'élément qu'elle contrôle. Cette combinaison linéaire peut être écrite sous forme de matrice :

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{C}_{FFD}^T \mathbf{x}_{cp}, \quad (4)$$

où $\mathbf{x}_f$ est un vecteur rassemblant toutes les positions des nœuds éléments finis du bord à optimiser et $\mathbf{x}_{cp}$ les coordonnées des points de contrôle. $\mathbf{C}_{FFD}$ est l'opérateur FFD, voir [16, 17]. Ensuite, la boîte de morphing peut être déformée en déplaçant les points de contrôle de la boîte de morphing, et le maillage EF est déformé en conséquence. Cette méthode est intéressante car elle découple l'espace de conception (splines) de celui de la description géométrique (EF).

Au final, nous définissons l'opérateur $\mathbf{C}_{update}$ qui couple les variables de design $\mathbf{s}$ à la position de tous les nœuds du maillage élément fini $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_{update} \mathbf{s} \quad \text{with} \quad \mathbf{C}_{update} = \mathbf{C}_m \mathbf{C}_{FFD}^T \mathbf{C}_s \quad (5)$$

$\mathbf{C}_{FFD}$ est l'opérateur FFD qui couple les points de contrôle aux nœuds de bord du maillage élément finis. $\mathbf{C}_s$ est un opérateur de restriction qui permet de ne considérer que quelques degrés de libertés parmi les degrés de libertés splines (on garde par exemple seulement le déplacement des points de contrôle selon la normale au bord à optimiser). $\mathbf{C}_m$ est un opérateur de morphing élastique qui relie le déplacement des nœuds EF de bord $\mathbf{x}_f$ aux nœuds en volume $\mathbf{x}$. Cette composition d'opérateurs permet un lien explicite entre les variables de conception et les coordonnées des nœuds du maillage. Elle permet, à partir de n'importe quel maillage EF, de définir un sous-espace de *design* réduit, similaire aux méthodes de base réduite qui fonctionnent, de manière analogue, par projection sur un sous-espace *approximation* réduit.

3 Exemples

En termes exemples, la méthode sera appliquée, en particulier, pour optimiser la forme des trous dans une poutre de traction pour l'identification de tous les paramètres constitutifs élastiques linéaires orthotropes (voir Fig. 1). Une boîte de morphing 1D B-spline est créée pour piloter le mouvement des nœuds EF le long du bord d'un des trous (voir le contour rouge de la Fig. 1(bas)). En partant de la géométrie de la Fig. 1(haut), l'optimisation conduit à la géométrie présentée dans la Fig. 1(bas). Nous verrons qu'il est possible d'améliorer la valeur de la fonction de coût d'un facteur 30 tout en maintenant une valeur de contrainte maximale équivalente. Cela signifie que l'incertitude sur le paramètre le plus dur à identifier est réduite de près d'un facteur 6 et que le même dispositif expérimental que celui utilisé pour l'éprouvette initiale peut être utilisé.

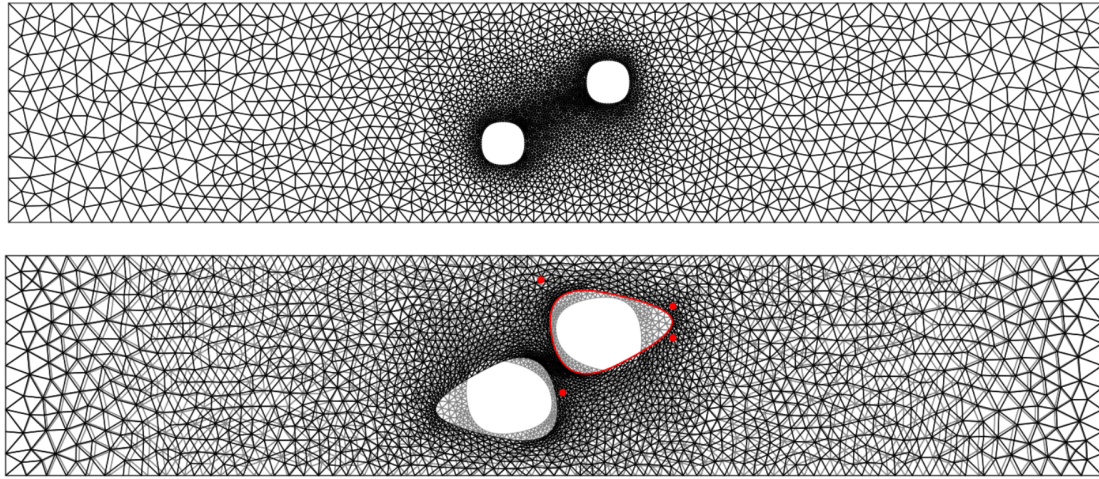


FIGURE 1 – En haut : Géométrie initiale avec description B-spline de la géométrie des trous. En bas : Géométrie améliorée (en noir) comparée à la géométrie initiale (en gris), et boîte de morphing 1D FFD et position de ses points de contrôle à la fin (en rouge).

4 Conclusion

En utilisant une modélisation fine du problème d’optimisation de la minimisation de l’incertitude des paramètres constitutifs, et des outils numériques avancés provenant de la communauté d’optimisation de forme en mécanique numérique, nous avons été en mesure de concevoir une méthodologie numérique complète qui améliore de façon significative les formes des éprouvettes pour la caractérisation mécanique, avec un cout de calcul raisonnable et des évolutions de forme très limitées. L’extension d’une telle technologie aux paramètres constitutifs non linéaires, avec les difficultés attendues en termes d’implémentation et de complexité numérique, peut représenter une voie très intéressante dans un futur proche.

5 Références bibliographiques

Références

- [1] T. Kirchdoerfer and M. Ortiz. Data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304 :81–101, 2016.
- [2] J.T. Oden, T. Belytschko, J. Fish, T.J.R. Hughes, C. Johnson, D. Keyes, A. Laub, L. Petzold, D. Srolovitz, and S. Yip. Simulation-based engineering sciences. Technical report, 2006.
- [3] Francisco Chinesta, Elias Cueto, Emmanuelle Abisset-Chavanne, Jean Louis Duval, and Fouad El Khaldi. Virtual, digital and hybrid twins : A new paradigm in data-based engineering and engineered data. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27 :105–134, 2020.
- [4] M. Grédiac and F. Hild. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Wiley, 2012. ISBN 9781848212947.
- [5] Morgan B.R. Bertin, François Hild, and Stéphane Roux. Optimization of a cruciform specimen geometry for the identification of constitutive parameters based upon full-field measurements. *Strain*, 52(4) :307–323, 2016.
- [6] Nicolas Feld, Hortense Laeuffer, and Stéphane Roux. Mesure de champs hétérogènes pour l’identification du comportement de matériaux composites stratifiés. In *Comptes-Rendus des JNC 19*, 2015.
- [7] Ludovic Chamoin, Clément Jailin, Matthieu Diaz, and Lucas Quesada. Coupling between topology optimization and digital image correlation for the design of specimen dedicated to selected material parameters identification. *International Journal of Solids and Structures*, 193 :270–286, 2020.
- [8] Jean-Charles Passieux and Robin Bouclier. Classic and Inverse Compositional Gauss-Newton in Global DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119(6) :453–468, 2019.
- [9] J. Réthoré. A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 84(6) :631–660, 2010.

- [10] P.C. Mahalanobis. On the generalised distance in statistics. *Proceedings National Institute of Science*, 2 :49–55, 1936.
- [11] Stéphane Roux and François Hild. Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement fields. *International Journal of Solids and Structures*, 184 :14–23, 2020.
- [12] Vincent Braibant and Claude Fleury. Shape optimal design using B-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44(3) :247–267, 1984.
- [13] Wolfgang A Wall, Moritz A Frenzel, and Christian Cyron. Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40) :2976–2988, 2008.
- [14] J Kiendl, R Schmidt, R Wüchner, and K-U Bletzinger. Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 274 :148–167, 2014.
- [15] Thibaut Hirschler, Robin Bouclier, Arnaud Duval, Thomas Elguedj, and Joseph Morlier. Isogeometric sizing and shape optimization of thin structures with a solid-shell approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(3) :767–785, 2019.
- [16] Thomas W Sederberg and Scott R Parry. Free-form deformation of solid geometric models. In *Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 151–160, 1986.
- [17] Morgane Chapelier, Robin Bouclier, and Jean-Charles Passieux. Free-Form Deformation Digital Image Correlation (FFD-DIC) : a non-invasive spline regularization for arbitrary finite element measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384 :113992, 2021.