

# Influence des imperfections géométriques et de la rotation sur la stabilité d'un système non linéaire rotor-stator avec frottement

A. Mercier<sup>1</sup>, L. Jézéquel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LTDS, Ecole Centrale Lyon, {alex.mercier,louis.jezequel}@ec-lyon.fr

**Résumé** — Les systèmes mécaniques tels que les freins qui présentent des instabilités vibratoires induites par le frottement, sont les objets d'étude de ces travaux. Généralement, lors des phases de conception des analyses de stabilité sont réalisées sur des modèles simplifiés. Lorsque des imperfections géométriques (jeux, problèmes de coaxialité et entraxes) sont pris en compte, les modèles sont complexifiés et des phénomènes supplémentaires importants apparaissent. Ces derniers induisent des différences notables dans les études de stabilité mais également dans le comportement dynamique global.

**Mots clés** — Vibrations induites par frottement, phénomènes non linéaires, imperfections géométriques, stabilité de points fixes, stabilité orbitale, intégrations temporelles.

## 1 Introduction

Les systèmes mécaniques dont la conception inclut une partie rotative en contact avec frottement avec une partie fixe, sont les objets d'étude de ces travaux. Il existe de nombreux exemples de systèmes présentant ce type de conception dont les plus connues sont les systèmes de freinage (automobile [1, 2, 3], aéronautique [4, 5, 6], ferroviaire [7]), et d'autres systèmes comme les embrayages [8, 9] ou des systèmes mécaniques associés aux procédés de fabrication [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Ces systèmes mécaniques présentent très souvent des instabilités vibratoires auto-entretenues induites par le frottement et il existe dans la littérature de nombreux travaux permettant d'expliquer leur comportement dynamique. Il ressort de ces études deux mécanismes principaux permettant d'expliquer leur apparition. Le premier, appelé stick-slip, est lié aux caractéristiques tribologiques des matériaux en contact. Les premiers travaux faisant référence au phénomène de stick-slip sont ceux de [17]. D'autres travaux de [18, 19, 20, 21] ont également contribué à analyser ce phénomène ainsi que des études plus appliquées menées avec des modèles associés à ce phénomène dans [10, 22, 23, 24]. Le deuxième mécanisme est nommé sprag-slip et est lié aux caractéristiques géométriques des pièces. Il a été introduit en premier par Spurr pour expliquer les bruits de crissement de frein [25].

Lors de la conception de tels systèmes, les concepteurs cherchent naturellement des informations sur leur comportement dynamique et la plupart du temps des analyses de stabilité classiques sont effectuées. Plus précisément, dans un premier temps et pour chaque jeu de paramètres, le point fixe (point d'équilibre statique) associé est recherché, puis sa stabilité est étudiée. Très souvent, la rotation des pièces n'est pas prise en compte dans les modélisations. Dans cette étude, l'influence sur la stabilité des imperfections géométriques des systèmes mécaniques, est étudiée. Il peut s'agir de jeux dans les liaisons, des problèmes de coaxialité ou d'entraxe entre les stators et rotors. Ces imperfections sont la plupart du temps non prises en compte alors que leur couplage avec la rotation relative des pièces induit des phénomènes dynamiques spécifiques. La maîtrise de ces derniers demande l'introduction de modèles plus complexes. En effet, l'analyse se porte sur la stabilité de solutions orbitales associées à la rotation de la partie tournante.

Dans les travaux présentés, trois imperfections géométriques du système mécanique sont étudiés avec et sans la prise en compte de la rotation. L'objectif principal est de montrer que la modélisation de ces imperfections géométriques couplées à la rotation, est particulièrement importante dans les études de stabilité et dans l'estimation des niveaux de vibrations atteints qui constituent un critère de dimensionnement important.

## 2 Description du modèle phénoménologique et principales hypothèses

Les travaux sont réalisés sur un modèle phénoménologique qui est représenté en figure (1). Il s'agit d'un système mécanique en mouvement dans l'espace physique Euclidien  $\mathbb{E}$  durant un intervalle de temps  $\mathbb{T} = [0, t_{max}] \subset \mathbb{R}$ . L'encastrement est choisi comme référentiel nommé  $R_0$  qui est supposé Galiléen. Le choix du point  $O$  auquel est ajouté la base  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  (direction de  $\mathbb{E}$ ) permet de définir le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2, e_3)$  avec lequel le mouvement peut être mesuré. Le système mécanique associé à ce modèle phénoménologique, est composé d'un poutre de *Bernoulli* nommée  $p$  encastree sur le plan contenant  $O$ , d'un disque rotor nommé  $r$  ainsi qu'un disque stator nommé  $s$  qui sont supposés indéformables. Chaque disque ( $r$  et  $s$ ) est constitué de deux sous-disques :  $r_1$  et  $r_2$  pour  $r$ , et  $s_1$  et  $s_2$  pour  $s$ . Cette division permet d'introduire un jeu radial ( $j_1$  pour  $s$  et  $j_2$  pour  $r$ ) existant dans de nombreux systèmes mécaniques ayant ce type de conception. Le disque  $r$  a un mouvement de rotation à la vitesse  $\omega_r$  suivant la direction  $x''$  de vecteur  $e_1^{r_1}$ . De plus, une force de serrage nommé  $F_{ext}$  lui est appliquée suivant la direction  $x$  de vecteur directeur  $e_1$  et il présente un angle d'inclinaison  $\beta$ . Enfin, un entraxe  $d$  peut également exister entre les axes de révolution des disques stator  $s$  et rotor  $r$ . Pour les besoins de l'étude, quatre référentiels supplémentaires sont définis, ce qui induit pour chacun le choix d'un repère. Les liste est la suivante : repère  $\mathcal{R}_1 = (O_1, e_1^{s_1}, e_2^{s_1}, e_3^{s_1})$  dans le référentiel  $R_1$  (disque  $s_1$ ), repère  $\mathcal{R}_2 = (O_2, e_1^{s_2}, e_2^{s_2}, e_3^{s_2})$  dans le référentiel  $R_2$  (disque  $s_2$ ), repère  $\mathcal{R}_3 = (O_3, e_1^{r_1}, e_2^{r_1}, e_3^{r_1})$  dans le référentiel  $R_3$  (disque  $r_1$ ) et repère  $\mathcal{R}_4 = (O_4, e_1^{r_2}, e_2^{r_2}, e_3^{r_2})$  dans le référentiel  $R_4$  (disque  $r_2$ ).

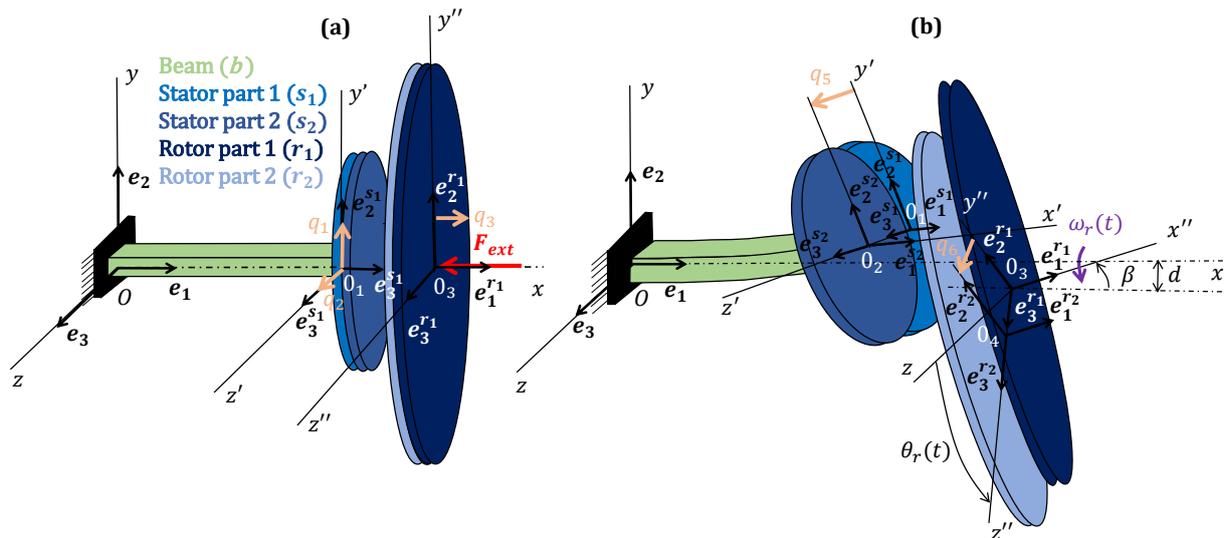


FIGURE 1 – Description du modèle phénoménologique. (a) Différentes pièces du modèle. (b) Mouvement du système en présence des jeux  $j_1$  et  $j_2$ , de l'angle d'inclinaison  $\beta$  et de l'entraxe  $d_1$ .

## 3 Équations du mouvement et système dynamique

Les équations du mouvement sont établies en utilisant le formalisme de *Lagrange*. Par conséquent, dans un premier temps, les énergies cinétiques et potentielles de la poutre ainsi que des disques sont établies. Il faut préciser que la méthode de *Rayleigh-Ritz* est utilisée pour approximer le champ de déplacement de la poutre. Ensuite, les efforts généralisés contenant des efforts de contact et de frottement à l'interface ( $s_2 - r_2$ ) sont exprimés. Enfin, l'utilisation des équations de *Lagrange* donne lieu au problème discret contenant un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre, énoncé comme suit :

Trouver  $\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^5$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{T}, \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}(t)} = \mathbf{Q}(t) & \text{(Equations de Lagrange)} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 & \text{(Conditions initiales en déplacements)} \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 & \text{(Conditions initiales en vitesses)} \end{cases} \quad (1)$$

avec :

- $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_5(t) \ q_6(t)]^T \in \mathbb{R}^5$  (respectivement  $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t) \ \dot{q}_3(t) \ \dot{q}_5(t) \ \dot{q}_6(t)]^T \in \mathbb{R}^5$ ), le vecteur contenant les coordonnées généralisées (respectivement les dérivées temporelles des coordonnées généralisées).
- $\mathcal{L} : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \mathcal{T}_{/R_0}^S(t) - \mathcal{V}_{/R_0}^S(t)$ , est le Lagrangien et où  $\mathcal{T}_{/R_0}^S(t) = \mathcal{T}_{/R_0}^b(t) + \mathcal{T}_{/R_0}^{s_1}(t) + \mathcal{T}_{/R_0}^{s_2}(t) + \mathcal{T}_{/R_0}^{r_1}(t) + \mathcal{T}_{/R_0}^{r_2}(t)$  est la somme de toutes les énergies cinétiques et  $\mathcal{V}_{/R_0}^S(t) = \mathcal{V}_{/R_0}^b(t)$  est la somme de toutes les énergies potentielles.
- $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^{s_2}(t) + \mathbf{Q}^{r_2}(t) + \mathbf{Q}^{s_1}(t) + \mathbf{Q}^{r_1}(t) \in \mathbb{R}^5$ , le vecteur contenant les efforts généralisés aux interfaces  $(s_2 - r_2)$ ,  $(s_1 - s_2)$  and  $(r_1 - r_2)$  où :

$$\forall t \in \mathbb{T} \ \forall j \in \{1; 2; 3; 4; 5\}, \begin{cases} \mathcal{Q}_j^{s_1}(t) = -\mathbf{F}_{s_1/s_2} \frac{\partial \mathbf{u}^{s_1}(\mathbf{x}_{O_1}, t)}{\partial q_j} \\ \mathcal{Q}_j^{s_2}(t) = \mathbf{F}_{s_1/s_2} \frac{\partial \mathbf{u}^{s_2}(\mathbf{x}_{O_2}, t)}{\partial q_j} \delta q_j(t) + \int_{\bar{\Gamma}_{s_2}^{cf}} \bar{\phi}_{r_2/s_2}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{u}^{s_2}(\mathbf{x}, t)}{\partial q_j} dS \\ \mathcal{Q}_j^{r_1}(t) = -(\mathbf{F}_{r_1/r_2} + \mathbf{F}_{ext}) \frac{\partial \mathbf{u}^{r_1}(\mathbf{x}_{O_3}, t)}{\partial q_j} \\ \mathcal{Q}_j^{r_2}(t) = \mathbf{F}_{r_1/r_2} \frac{\partial \mathbf{u}^{r_2}(\mathbf{x}_{O_4}, t)}{\partial q_j} \delta q_j(t) - \int_{\bar{\Gamma}_{s_2}^{cf}} \bar{\phi}_{r_2/s_2}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{u}^{r_2}(\mathbf{x}, t)}{\partial q_j} dS \end{cases} \quad (2)$$

- $\mathbf{F}_{ext} = -F_{ext} \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3$ , le vecteur des forces extérieures.
- $\bar{\phi}_{s_2/r_2}(\mathbf{x}, t) = -\bar{\phi}_{r_2/s_2}(\mathbf{x}, t) = \rho_c \Delta u_n(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_1^{r_1} + \mu_{s_2-r_2} \sigma_n(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_t^{cf}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ , le vecteur contrainte à l'interface  $(s_2 - r_2)$ .
- $\mathbf{F}_{s_1/s_2} = \begin{cases} k_1 q_5(t) & \text{if } |q_5(t)| < j_1 \\ \left( 1.5 \cdot 10^{21} (|q_5(t)| - 1.5 \cdot 10^{-3})^4 + 2 \cdot 10^6 \right) q_5(t) & \text{else} \end{cases} = -\mathbf{F}_{s_2/s_1}$ , la force simplifiée correspondant à la somme de deux contributions : les forces de frottement (si  $|q_5| < j_1$ ) et les forces de frottement (si  $|q_5| \geq j_1$ ). Pour  $\mathbf{F}_{s_1/s_2}$ , l'expression est la même, il suffit seulement de remplacer  $q_5(t)$  par  $q_6(t)$  et  $j_1$  par  $j_2$ .
- $\bar{\Gamma}_{s_2}^{cf}(t) = \left\{ \mathbf{x} \in \Gamma_{s_2}^{cf} \mid u_n(\mathbf{x}, t) > 0 \right\}$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$ , la zone en contact de l'interface. La recherche de cette zone est entièrement détaillée dans [26, 27].

Afin d'écrire le système dynamique sous forme standard, le système d'équations différentielles non linéaires du second ordre de dimension 4 (1) est mis sous forme d'état :

Trouver  $\mathbf{X} : \mathbb{T} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^{10}$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{T}, \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), t) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (3)$$

avec :

- $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{q}(t) \ \dot{\mathbf{q}}(t)]^T \in X \subset \mathbb{R}^{10}$ , le vecteur d'état composé des coordonnées généralisées ainsi que leurs dérivées temporelles.
- $\mathbf{G} : X \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ ,  $\mathbf{X}(t) \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)$ , une application non linéaire.
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{10,10}(\mathbb{R})$ , la matrice associée à la partie linéaire de  $\mathbf{G}$ .

- $B(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}Q(t) \end{bmatrix}$ , la partie non linéaire de  $G$ .
- $M \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{R})$  (respectivement  $K \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{R})$ ), la matrice de masse (respectivement de raideur).

Au final, la connaissance à chaque instant  $t \in \mathbb{T}$  de l'état du système mécanique contenu dans le vecteur  $X(t)$  est donnée au moyen d'une intégration temporelle du système d'équations différentielles (3). Mathématiquement, c'est un système dynamique non autonome nommé  $S^{pheno} = (X \subset \mathbb{R}^{10}, \mathbb{T}, \varphi_t^{pheno})$ .  $\varphi^{pheno} : X \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$  est le flot défini implicitement par le système d'équations différentielles (3).

## 4 Étude d'influence des imperfections géométriques

Comme expliqué précédemment, l'objectif principal de ces travaux est d'analyser l'influence de trois imperfections géométriques (jeux dans les liaisons représentés par les jeux  $j_1$  et  $j_2$ , entraxe associé au paramètre  $d$  et problème de coaxialité représenté par le paramètre  $\beta$ ) sur la stabilité et le comportement dynamique des types de systèmes mécaniques à l'aide du modèle phénoménologique. Pour cette étude d'influence, seuls trois paramètres sont étudiés : le coefficient de frottement à l'interface ( $s_2 - r_2$ ), l'angle de rotation  $\beta$  et l'entraxe  $d$ . La vitesse de rotation  $\omega_r$  est fixée à 100 rad/s et la force de serrage  $F_{ext}$  à 2000 N.

Cette étude est divisée en deux parties en raison de la prise en compte d'un jeu radial ( $j_2$ ) à l'interface ( $r_1 - r_2$ ). En effet, la rotation du disque rotor induit des frottements sur la zone d'interface ( $s_2 - r_2$ ) en contact. De plus, l'angle d'inclinaison  $\beta$  du disque rotor  $r$  accentue la distribution non homogène de la pression à cette interface. Par conséquent, lorsqu'il existe un jeu à l'interface ( $r_1 - r_2$ ), ces deux phénomènes (frottement et répartition de pression) induisent naturellement un glissement relatif périodique du disque rotor  $r_2$  par rapport à  $r_1$ . Cette périodicité est liée à la rotation du disque rotor  $r$ . En revanche, s'il n'y a pas de jeu ( $j_2 = 0$ ), ces glissements relatifs périodiques n'existent pas ( $q_6(t) = 0, \forall t \in \mathbb{T}$ ). De plus, s'il existe un jeu ( $j_1 \neq 0$ ) dans la liaison ( $s_1 - s_2$ ), un glissement relatif apparaît également et n'est périodique que si le jeu  $j_1$  liaison ( $r_1 - r_2$ ) est non nul. Ces imperfections géométriques et en particulier le jeu dans la liaison ( $r_1 - r_2$ ) ainsi que l'inclinaison  $\beta$  de la partie tournante sont rarement pris en compte dans les modèles. Sans ces imperfections, l'évolution de la position angulaire  $\theta_4(t)$  n'apparaît pas dans les équations et n'a donc aucun impact. Seule la vitesse de rotation apparaît avec une influence importante sur la stabilité et sur le comportement dynamique, comme le montre les travaux [26]. Il est essentiel de comprendre que la rotation  $\theta_4(t)$  est encore plus importante lorsque des imperfections sont présentes, ce qui est toujours le cas en réalité. Ce point constitue l'objectif principal des travaux de recherche présentés.

La première partie de cette étude contient les **cas 1** et **2** décrits dans le tableau (1) et pour lesquels la liaison ( $r_1 - r_2$ ) n'a pas de jeu ( $q_6(t) = 0, \forall t \in \mathbb{T}$ ). Par conséquent, l'angle de rotation  $\theta_r(t)$ ,  $t \in \mathbb{T}$  du disque rotor  $r_1$  n'apparaît pas dans les équations (3) (champ de vecteurs  $G$ ), ce qui implique que le système dynamique  $S^{pheno}$  est autonome. Afin d'étudier ces deux premiers cas, les méthodes associées au calcul du point fixe et à leur analyse de stabilité peuvent être utilisées. En effet, et étant donné que le système dynamique  $S^{pheno}$  est autonome, pour chaque ensemble de paramètres  $k \in I_p$ , il existe un point fixe associé noté  $X_e^k$ . Dans le **cas 1**, il n'y a pas de jeu la liaison ( $s_1 - s_2$ ) induisant que la raideur associée  $k_1$  tend vers l'infini. Dans **cas 2**, c'est l'inverse : il existe un jeu dans ( $s_1 - s_2$ ) et une raideur non linéaire  $k_1(q_5(t))$  est utilisée, ce qui permet de prendre en compte le jeu  $j_1$ , du contact (butée) et du frottement dans la liaison. Le type de liaison ( $s_1 - s_2$ ) n'a aucune influence sur le système dynamique  $S^{pheno}$ . En effet, le système reste autonome même si le jeu dans la liaison ( $s_1 - s_2$ ) est non nul.

La seconde partie de cette étude est constituée des **cas 3** et **4**, également décrits dans le tableau (1), pour lesquels il n'y a pas jeu dans ( $r_1 - r_2$ ) ( $q_6(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$ ). Par conséquent, le système dynamique  $S^{pheno}$  n'est plus autonome à cause de la présence de l'angle de rotation  $\theta_r(t)$  dans les équations. Cela implique qu'il n'existe plus de point fixe. En effet, il s'agit d'un système dynamique forcé où  $T_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$  est la période d'excitation associée à la rotation du rotor  $\theta_r(t)$ . Des méthodes incluant les calculs d'orbites périodiques ainsi que leur stabilité (construction de la matrice de Monodromie) doivent être utilisées. Comme pour la première partie, dans le **cas 3**, il n'y a pas jeu dans ( $s_1 - s_2$ ) et donc la raideur associée  $k_1$  tend vers l'infini. Dans **cas 4** c'est l'inverse, un jeu existe dans ( $r_1 - r_2$ ) et une raideur non linéaire  $k_2(q_6(t))$  est utilisée. Des comparaisons sont réalisées avec les **cas 1** et **2** pour lesquelles le jeu dans la

liaison n'est pas pris en compte. Il s'agit notamment de comparer les valeurs des paramètres pour lesquels le système dynamique présente une bifurcation de *Hopf*. Un des résultats majeurs de ces travaux concerne des différences importantes du coefficient de frottement critique pour lequel le système devient instable. Les **cas 3 et 4** sont également comparés avec le cas où la rotation est fixée à zéro pour tout instant  $t \in \mathbb{T}$ , ce qui est souvent le cas dans les modèles pour des raisons de simplification. Un exemple de ces comparaisons est présenté sur les figures (2) et (5) et concerne l'étude de stabilité. Sur la figure (2), il s'agit des parties réelles et imaginaires des valeurs propres  $\lambda$  de la matrice de l'opérateur linéaire associé au développement limité au premier ordre du champ  $\mathbf{G}$ . Sur la figure (5), il s'agit également des valeurs propres, représentées dans la plan complexe  $\mathbb{C}$ , de l'opérateur périodique à l'instant  $t = T$  qui correspond à la période de rotation du rotor. Une différence importante du coefficient de frottement critique peut être observée en entre les cas avec et sans rotation. D'autres comparaisons sont réalisées sur les intégrations temporelles avec et sans la prise en compte de la rotation pour trois valeurs de l'angle d'inclinaison  $\beta$ . Les figures (3)(respectivement (4)) présentent les évolutions temporelles des coordonnées généralisées sans (respectivement avec) la rotation. Il est possible d'observer les conséquences du décalage du point de bifurcation. En effet, il n'y a pas d'instabilité pour  $\beta = 1.75$  lorsque la rotation  $\theta(t)$  est prise en compte. Enfin, les niveaux maximums (cycles limites) sont plus faibles avec la rotation et le mouvement périodique est bien visible sur les évolutions temporelles des coordonnées généralisées.

Cas	$k_1$ [N/m <sup>3</sup> ]	$k_2$ [N/m <sup>3</sup> ]	$\mu_{s_2-r_2}$	$\omega_r$ [rad/s]	$\beta$ [°]	$d$ [m]	$F_{ext}$ [N]
<b>1</b>	$+\infty$ (0)	$+\infty$ (0)	[0, 1]	100	{0;1;1.75}	{0;5;10}.10 <sup>-3</sup>	2000
<b>2</b>	$k_1(q_5(t))$	$+\infty$ (0)	[0, 1]	100	{0;1;1.75}	{0;5;10}.10 <sup>-3</sup>	2000
<b>3</b>	$k_1(q_5(t))$	$k_2(q_6(t))$	[0, 1]	100	{0;1;1.75}	{0;5;10}.10 <sup>-3</sup>	2000
<b>4</b>	$+\infty$ (0)	$k_2(q_6(t))$	[0, 1]	100	{0;1;1.75}	{0;5;10}.10 <sup>-3</sup>	2000

TABLE 1 – Différents cas testés allant de 1 à 4

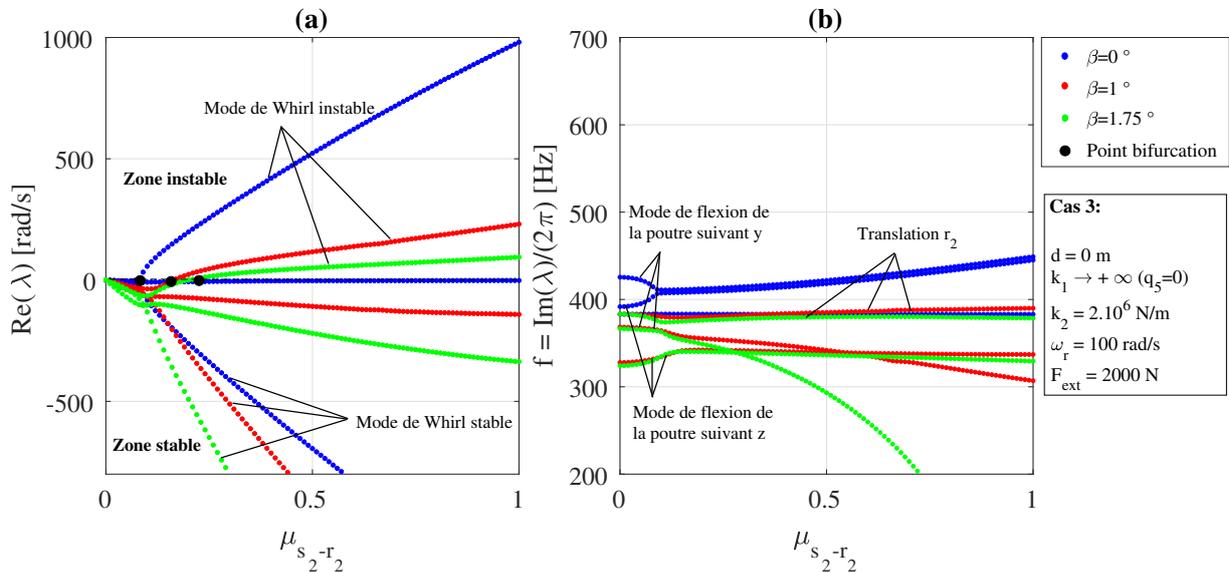


FIGURE 2 – Évolution des valeurs propres  $\lambda$  par rapport au coefficient de frottement  $\mu_{s_2-r_2}$  pour le **cas 3** ( $k_1 \rightarrow +\infty$ ,  $k_2 \rightarrow +\infty$ ,  $\omega_r = 100$  rad/s,  $F_{ext} = 2000$ N), un entraxe  $d_1 = 0$  et 3 valeurs d'angle  $\beta$  ( $\beta = 0, 1$  et  $1.75$  °). (a) Partie réelle des valeurs propres  $Re(\lambda)$ . (b) Fréquences propres  $f = \frac{Im(\lambda)}{2\pi}$ .

## 5 Conclusions

Cette étude a permis d'analyser l'influence de trois imperfections géométriques sur la stabilité et le comportement dynamique d'un système rotor-stator avec frottement. Dans la première partie, les cas où la liaison au niveau du rotor ne présente pas de jeu, ont été étudiés. Dans ce cas, le système dynamique

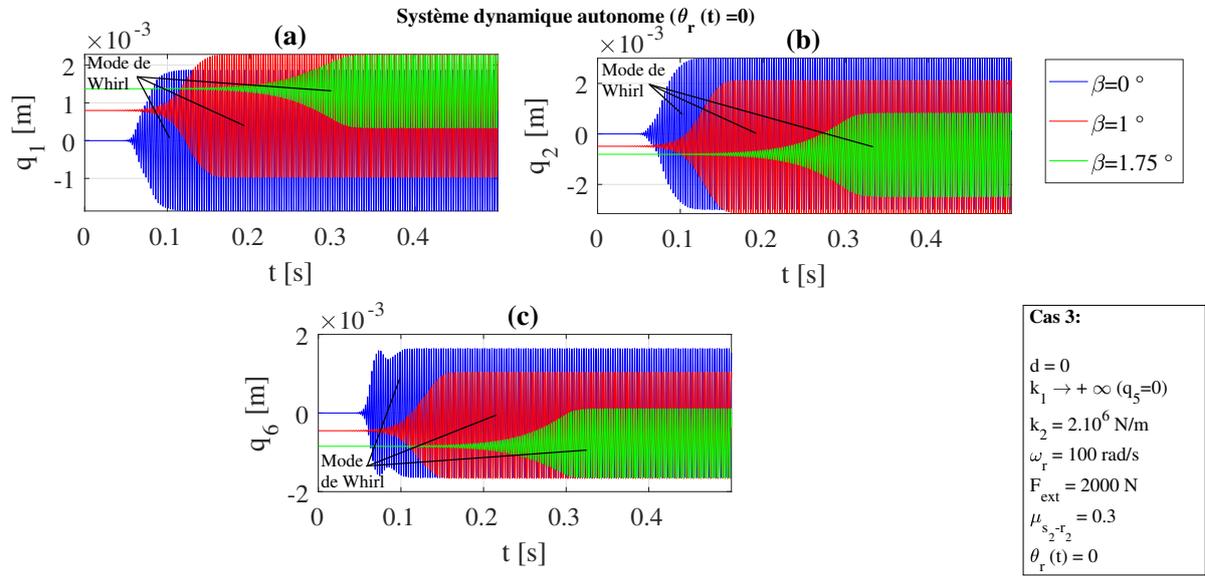


FIGURE 3 – Évolution temporelle de l'état dynamique du système  $X$  pour le **cas 3** ( $k_1 \rightarrow +\infty, k_2 \rightarrow +\infty, \omega_r = 100$  rad/s,  $F_{ext} = 2000$ N), un entraxe  $d_1 = 0$  et 3 valeurs d'angle  $\beta$  ( $\beta = 0, 1$  et  $1.75^\circ$ ) et avec rotation du disque rotor ( $\theta_r(t) = 0 \forall t \in \mathbb{T}$ ). (a) Coordonnée généralisée  $q_1(t)$ . (b) Coordonnée généralisée  $q_2(t)$ . (c) Coordonnée généralisée  $q_6(t)$ .

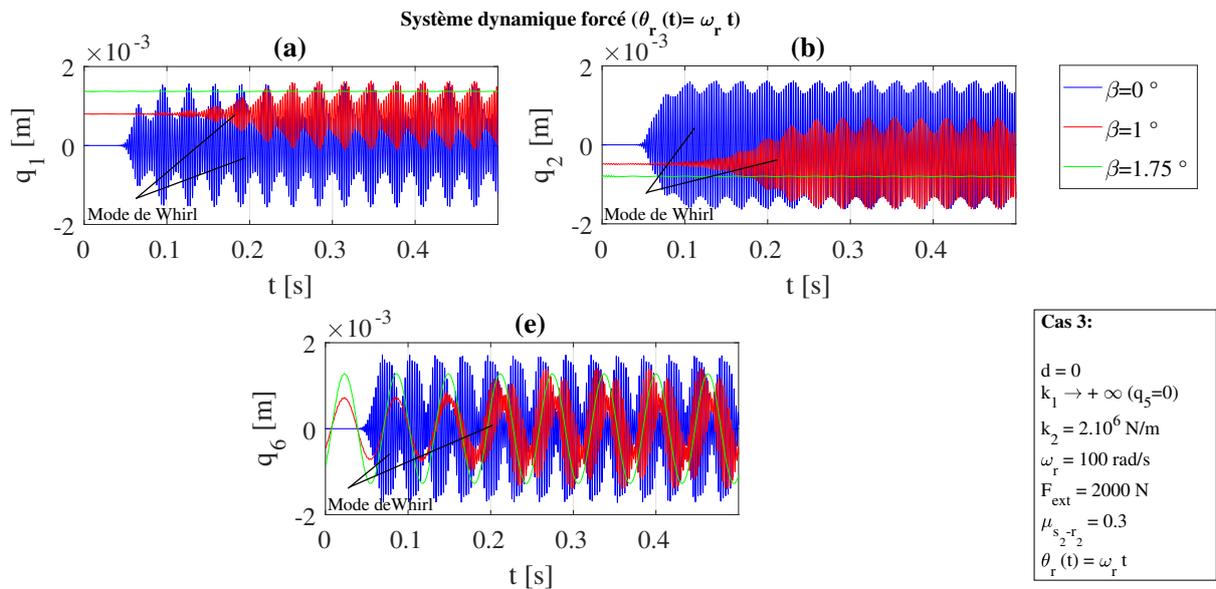


FIGURE 4 – Évolution temporelle de l'état dynamique du système  $X$  pour le **cas 3** ( $k_1 \rightarrow +\infty, k_2 \rightarrow +\infty, \omega_r = 100$  rad/s,  $F_{ext} = 2000$ N), un entraxe  $d_1 = 0$ , 3 valeurs d'angle  $\beta$  ( $\beta = 0, 1$  et  $1.75^\circ$ ) et avec rotation du disque rotor ( $\theta_r(t) = \omega_r t$ ). (a) Coordonnée généralisée  $q_1(t)$ . (b) Coordonnée généralisée  $q_2(t)$ . (c) Coordonnée généralisée  $q_6(t)$ .

n'est pas forcé et les analyses de stabilité peuvent se faire en analysant les points fixes. En conclusion de cette première partie de l'étude, l'entraxe des axes rotor-stator s'avère avoir peu influence sur la stabilité des points fixes. Les intégrations temporelles initiées à partir de ces points fixes ont également montré une très faible influence de l'entraxe sur le comportement dynamique, en particulier les amplitudes des cycles limites. En revanche, l'angle d'inclinaison a une forte influence sur les points fixes et leur stabilité. Les valeurs du coefficient de frottement pour lesquelles le système dynamique présente une bifurcation de *Hopf* sont globalement plus faibles lorsque la liaison au niveau du stator est bloquée. Enfin, les amplitudes des cycles limites sont plus faibles avec une augmentation de l'angle d'inclinaison. Dans la seconde partie, les cas où il existe un jeu dans la liaison au niveau du rotor sont étudiés. Il s'avère que ce jeu se traduit par une forte influence de la partie tournante sur la stabilité et sur le comportement du

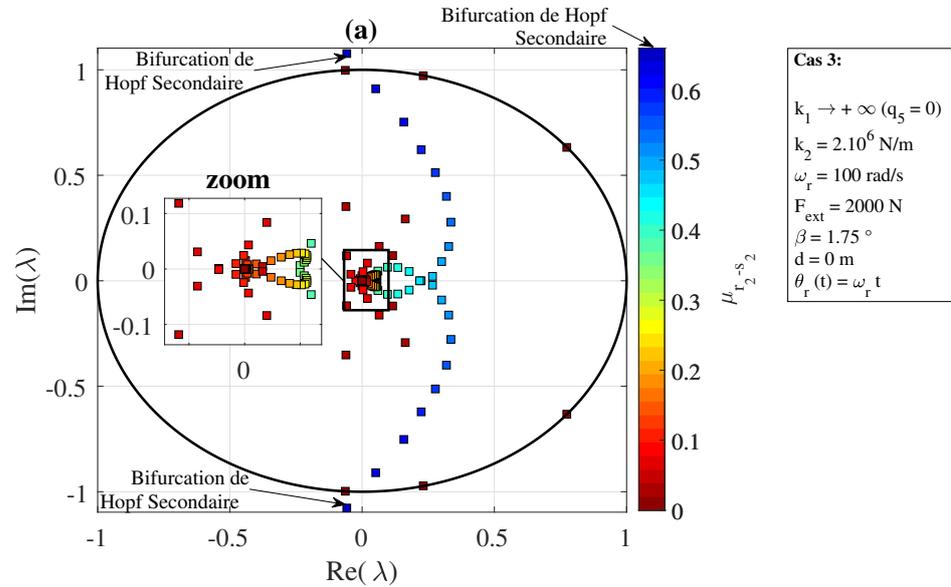


FIGURE 5 – Évolution des valeurs propres de la matrice de monodromie dans le plan complexe par rapport au coefficient de frottement ( $\mu_{s_2-r_2} \in \{0; 0.02; \dots; 1\}$ ) pour le **cas 3** ( $k_1 \rightarrow +\infty, k_2 \rightarrow +\infty, \omega_r = 100$  rad/s,  $F_{ext} = 2000N$ ), un entraxe  $d_1 = 0$ , un angle  $\beta = 1.75^\circ$ . (a) Valeurs propres de  $M_{cycle}$ . (b) Période  $T_r$  de la coordonnée généralisée  $q_1(t)$ . (c) Période  $T_r$  de coordonnée généralisée  $q_2(t)$ . (d) Période  $T_r$  de la coordonnée généralisée  $q_6(t)$ .

système dynamique. En effet, étant donné que ce dernier devient non autonome, des analyses de stabilité doivent être réalisées sur des orbites périodiques en construisant, pour plusieurs valeurs du coefficient de frottement, la matrice de Monodromie associée. La période de ces orbites correspond à celle du disque rotor. Cependant, afin de comparer ces analyses de stabilité orbitale, des études de points fixes, ne prenant pas en compte l'effet de rotation, comme c'est souvent le cas, ont également été réalisées. Le principal résultats réside dans les grandes différences des valeurs du coefficient de frottement critique entre les analyses de point fixe et de stabilité orbitale. En particulier, il apparaît clairement que le jeu dans les liaisons couplé à l'inclinaison de la partie tournante est responsable de ces différences. Ainsi les travaux présentés démontrent l'importance d'introduire les imperfections géométriques ainsi que la rotation même si les analyses de stabilité sont plus complexes à réaliser et plus coûteuses en temps de calcul. L'influence des imperfections géométriques sur la stabilité des systèmes étudiés peut aussi expliquer le caractère non répétitif des comportements dynamiques souvent observés lors des études expérimentales malgré le grand nombre de modélisation effectués depuis de nombreuses années.

## Références

- [1] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, and P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of sound and vibration*, 267(1) :105–166, 2003. Publisher : Elsevier.
- [2] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, and F. Chen. Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1(3-4) :207–231, 2005. Publisher : Inderscience Publishers.
- [3] A. Renault, F. Massa, B. Lallemand, and T. Tison. Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 367 :37–55, 2016. Publisher : Elsevier.
- [4] F. Chevillot, J-J. Sinou, N. Hardouin, and L. Jézéquel. Effects of damping on the speed of increase and amplitude of limit cycle for an aircraft braking system subjected to mode-coupling instability. *Archive of Applied Mechanics*, 80(9) :1045–1054, 2010. Publisher : Springer.
- [5] S.Y. Liu, J.T. Gordon, and M. Ozbek. Nonlinear Model for Aircraft Brake Squeal Analysis : Model Description and Solution Methodology. 1996.
- [6] S.Y. Liu, J.T. Gordon, and M. Ozbek. Nonlinear Model for Aircraft Brake Squeal Analysis : Model Description and Solution Methodology. *Journal of Aircraft*, 35(4) :623–630, July 1998.
- [7] X. Lorang, F. Foy-Margiocchi, and P-E. Nguyen, Q.S. and Gautier. TGV disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5) :735–746, 2006. Publisher : Elsevier.

- [8] B. Hervé, J. Sinou, H. Mahé, and L. Jézéquel. Analysis of friction-induced self-generated vibrations originated from mode-coupling in clutches. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 42(3) :369, 2008. Publisher : Citeseer.
- [9] B. Hervé, J.-J. Sinou, H. Mahé, and L. Jézéquel. Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(2) :141–160, 2008. Publisher : Elsevier.
- [10] P. Chambrette and L. Jézéquel. Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(1) :107–138, 1992.
- [11] L. Jézéquel and C-H. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of sound and vibration*, 149(3) :429–459, 1991. Publisher : Elsevier.
- [12] J. Didier, J.-J. Sinou, and B. Faverjon. Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 331(3) :671–703, 2012. Publisher : Elsevier.
- [13] J.-J. Sinou and L. Jézéquel. Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(1) :106–122, 2007. Publisher : Elsevier.
- [14] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5) :591–609, 2007. Publisher : Elsevier.
- [15] D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, and P. Hagedorn. Friction Induced Vibrations in Moving Continua and Their Application to Brake Squeal. *Journal of Applied Mechanics*, 74(3) :542–549, May 2007.
- [16] U. von Wagner, D. Hochlenert, and P. Hagedorn. Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3) :527–539, 2007. Publisher : Elsevier.
- [17] D. Sinclair and N.J. Manville. Frictional Vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, pages 207–213, 1955.
- [18] R. A. Ibrahim. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos—Part II : Dynamics and Modeling. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7) :227–253, July 1994.
- [19] R. A. Ibrahim. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos—Part I : Mechanics of Contact and Friction. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7) :209–226, July 1994.
- [20] J.T. Oden and J.A.C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1-3) :527–634, September 1985.
- [21] C. Gao, D. Kuhlmann-Wilsdorf, and D.D. Makel. Fundamentals of stick-slip. *Wear*, 162-164 :1139–1149, April 1993.
- [22] S.S. Antoniou, A. Cameron, and C.R. Gentle. The friction-speed relation from stick-slip data. *Wear*, 36(2) :235–254, February 1976.
- [23] E Rabinowicz. The Intrinsic Variables affecting the Stick-Slip Process. *Proc. Phys. Soc.*, 71(4) :668–675, April 1958.
- [24] A.K. Banerjee. Influence of kinetic friction on the critical velocity of stick-slip motion. *Wear*, 12(2) :107–116, August 1968.
- [25] R. T. Spurr. A Theory of Brake Squeal. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers : Automobile Division*, 15(1) :33–52, January 1961.
- [26] A. Mercier, L. Jézéquel, S. Besset, A. Hamdi, and J-F. Diebold. Nonlinear analysis of the friction-induced vibrations of a rotor-stator system. *Journal of Sound and Vibration*, 443 :483–501, March 2019.
- [27] A. Mercier, L. Jézéquel, S. Besset, A. Hamdi, and J-F. Diebold. Studies on detachment non-linearity at the rotor-stator interface. *Journal of Sound and Vibration*, 468 :115084, March 2020.