

Homogénéisation découplée d'une nappe fibrée à matrice caoutchouteuse en grandes déformations

Karoui S.^{1,2}, Mansouri K.², Renard Y.¹, Arfaoui M.², Bussetta P.³

¹ Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS UMR 5259, LaMCoS, F-69621, France, {yves.renard,sarra.karoui}@insa-lyon.fr

² Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LR-11-ES19, Laboratoire de Mécanique Appliquée et Ingénierie, Tunis 1002, Tunisie, {makrem.arfaoui,khalil.mansouri,sarra.karoui}@enit.utm.tn

³ Michelin, Technology centre, Ladoux, France, philippe.bussetta@michelin.com

Résumé —

Nous proposons une procédure pour approcher le comportement des nappes composites à matrice caoutchouteuse par une méthode d'homogénéisation à deux échelles. Cette méthode est dérivée de celle proposée par Terada et al.[1] qui consiste en un découplage des échelles micro et macro en considérant des problèmes aux limites (PL) séparés. Les PL micro- et macroscopiques non linéaires à deux échelles sont fortement couplés dans la plupart des méthodes d'homogénéisation. La méthode considérée nous permet de les découpler sans perdre les caractéristiques distinctes du PL à deux échelles. En d'autres termes, avec cette méthode, la solution du problème macroscopique reflète le comportement mécanique du problème microscopique, et vice versa. Nous effectuons des études numériques représentatives pour une nappe avec un matériau hétérogène hyperélastique afin de démontrer la capacité et la fiabilité de la méthode proposée.

Mots clés — hyperélasticité, méthode d'homogénéisation, découplage.

1 Introduction

Selon la méthode d'analyse couplée micro-macro basée sur la méthode d'homogénéisation, il est possible d'évaluer la loi de comportement macroscopique reflétant la géométrie et le comportement du matériau à l'échelle microscopique et de considérer le mécanisme de déformation à l'échelle microscopique reflétant l'état de déformation à l'échelle supérieure simultanément. Puisque cette méthode de modélisation maintient toujours la cohérence mathématique entre les échelles, elle est particulièrement adaptée à l'analyse du comportement non linéaire des matériaux hétérogènes.

Fish et al.[2] ont proposé une méthode pour résoudre séparément les échelles micro et macro en utilisant le cadre d'homogénéisation afin d'effectuer le même calcul à un coût plus faible. Cependant, il a été souligné que cette méthode peut ne pas être capable d'évaluer des états strictement non linéaires. La méthode est basée sur une formulation d'homogénéisation qui suppose un champ de vitesse sous forme de développement asymptotique direct pour une équation d'équilibre linéarisée.

Dans cette étude, nous proposons une méthode de solution approximative micro-macro-découplée basée sur la formulation mathématique de l'équation d'équilibre du problème aux limites dérivé de l'homogénéisation non linéaire et de l'algorithme d'analyse micro-macro-couplée basée sur les travaux de Terada et al.[1]. La méthode proposée est appliquée aux problèmes aux limites de matériaux composites hyperélastiques en particulier de nappes fibrées.

Nous présenterons la procédure utilisée ainsi qu'une étude numérique approfondie qui illustrera la capacité de notre méthode à approcher correctement le comportement des nappes composites.

2 La méthode de découplage micro-macro

La méthode d'homogénéisation est basée sur les travaux de Terada et al.[1] et peut se décomposer selon les étapes suivantes :

1. Sélectionner une loi de comportement macroscopique anisotrope (Potentiel Homogénéisé)
2. Conduire des tests numériques sur un volume élémentaire représentatif (VER) hétérogène (Matrice/Fibre) approchés par éléments finis (EF) :

- Choisir aléatoirement un ensemble de déformations macroscopiques H .
 - Calculer le 2^{nd} tenseur de Piola-Kirchhoff (S_{heter}) en résolvant le problème aux limites correspondant par intégration sur le VER hétérogène (avec des conditions aux limites périodiques).
3. Identification macroscopique des coefficients du potentiel choisi :
- Exprimer le 2^{nd} tenseur de Piola-Kirchhoff en fonction du potentiel homogénéisé choisi et des coefficients $p^{[k]}$ du matériau. Dans le cas d'un potentiel linéaire par rapport à ses coefficients, on a

$$S_{homog}(p) = \sum_k^{n_{para}} p^{[k]} g^{[k]} \quad \text{où } g^{[k]} \text{ sont les dérivées des différents termes du potentiel.} \quad (1)$$

- Identifier les coefficients macroscopiques en utilisant une méthode d'optimisation par moindres carrés.

$$\text{Il s'agit de minimiser } \chi(p) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n_{test}} \left(\frac{\|S_{homog}^{[\alpha]}(p) - S_{heter}^{[\alpha]}\|^2}{\|S_{heter}^{[\alpha]}\|^2} \right). \quad (2)$$

3 Méthode de correction

Afin d'augmenter la précision de la méthode d'homogénéisation micro-macro-découplée et la rapprocher d'une méthode d'homogénéisation couplée, nous proposons les étapes de correction suivantes :

1. Conduire des tests sur une nappe fibrée complète
 - Calculer une liste de gradients de déplacements sur des volumes représentatifs de la nappe homogénéisée.
 - Calculer l'erreur entre 2^{nd} tenseur de Piola-Kirchhoff homogénéisé résultant du potentiel et celui hétérogène résultant des caractéristiques Fibre/Matrice.

$$Erreur = \frac{\|S_{homog} - S_{heter}\|}{\|S_{heter}\|} \quad (3)$$

2. Construire une méthode de correction pour ré-estimer les coefficients macro. afin de minimiser le gap d'erreur.

4 Etude numérique

Dans cette étude, on va comparer les résultats de l'erreur de déformation entre un modèle homogénéisé et un autre hétérogène dans le cas micro (représenté par un volume élémentaire représentatif (VER)) (**Fig.2.**) et le cas macro (représenté par une nappe fibrée caractérisée par des fibres métalliques et une matrice caoutchouteuse) (**Fig.1.**). On a choisi ici pour les deux types de structures, un maillage tétraédrique.

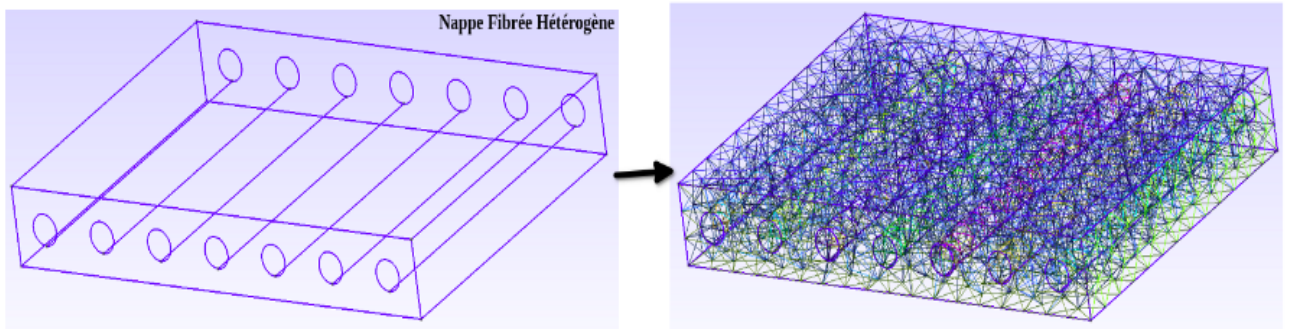


Fig.1. Maillage d'une nappe fibrée

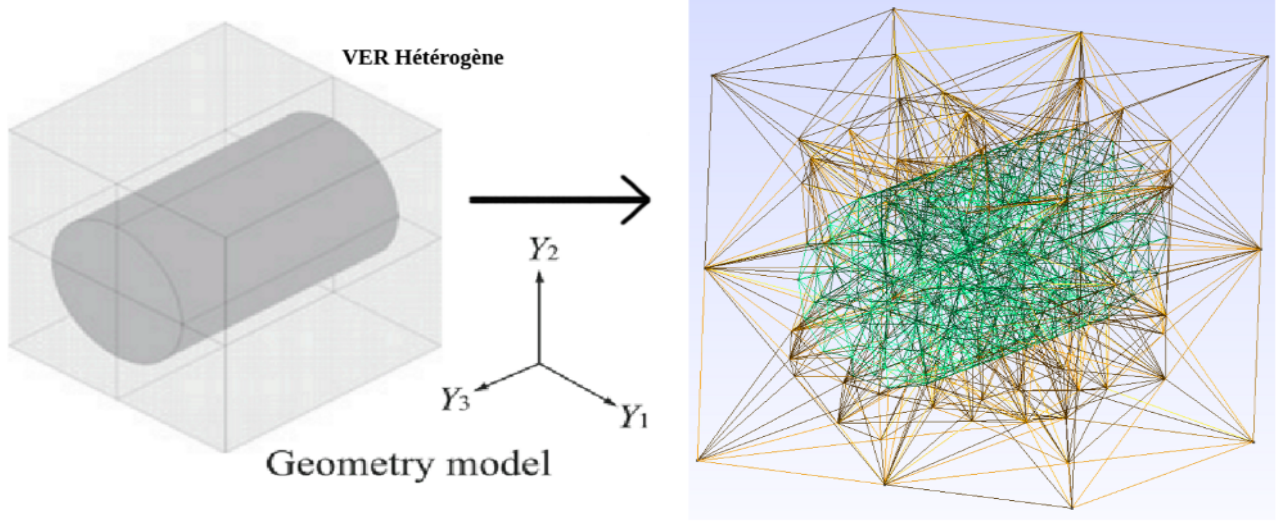


Fig.2. Maillage d'un VER fibré

4.1 Vérification de la méthode de l'homogénéisation dans le cas NéoHookéen

Pour cette partie, on considère le cas d'une nappe fibrée avec pour caractéristique des fibres métalliques de module de Young $E_f = 203 \text{ GPa}$ et coefficient de Poisson ν_f proche de 0.5 et une matrice caoutchouteuse tels que $E_m = E_f / \text{Contraste}$ et ν_m proche également de 0.5. Ces deux composants sont représentée par la loi de Mooney Rivlin sous sa forme Néohookéenne introduite par l'équation (4). On va étudier la différence entre deux cas de coefficient de Poisson que ce soit pour la fibre ou pour la matrice avec $\nu = 0.49$ ou $\nu = 0.4999$.

Les travaux de deBotton et al.[3], qui présentent des résultats analytiques dans le cadre d'une loi néohookéenne incompressible pour la fibre et la matrice, nous permettent une vérification de notre procédure numérique d'homogénéisation. Pour une loi néohookéenne quasi-incompressible, le potentiel hyperélastique se décompose en une partie isochore et une autre volumique

$$W = W_{iso} + W_{vol} \quad \text{avec} \quad W_{iso} = C_{01}(I_1 - 3) \quad \text{et} \quad W_{vol} = D_1(J - 1)^2 \quad (4)$$

où les coefficients C_{01} et D_1 s'expriment en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν de la matrice (m) et des fibres (f) comme suit :

$$C_{01} = \frac{E_i}{4(1 + \nu_i)}, \quad D_1 = \frac{E_i}{6(1 - 2\nu_i)} \quad \text{avec} \quad i = m, f \quad (5)$$

L'invariant J du modèle hyperélastique (4), qui exprime la variation volumique, est une fonction scalaire du gradient microscopique de la transformation F tel que $J = \det(F)$ où $\det(\cdot)$ désigne l'opérateur déterminant. L'invariant réduit I_1 de la partie isochore s'écrit $I_1 = \text{tr}(\bar{F}^T \bar{F})$ avec $\bar{F} = J^{-1/3} F$. Cette loi (4) est utilisée à la fois pour les fibres et la matrice.

Les résultats présentés dans [3] font état d'un potentiel homogénéisé analytique

$$W = \frac{\tilde{\mu}}{2}(I_1 - 3) + \frac{\bar{\mu} - \tilde{\mu}}{2}(I_4 + \frac{2}{\sqrt{I_4}} - 3) + D(J - 1)^2 \quad (6)$$

avec $\tilde{\mu} = \mu_m \frac{(1+c^f)\mu_f + (1-c^f)\mu_m}{(1-c^f)\mu_f + (1+c^f)\mu_m}$ et $\bar{\mu} = \mu_f c^f + \mu_m c^m$ tels que μ_m et μ_f sont respectivement les coefficients de Lamé de la matrice et des fibres et c^m et c^f les fractions volumiques avec $c^m + c^f = 1$ dans le cas où ν tend vers 0.5, l'invariant $I_4 = A \cdot \bar{C} A$ et A est le vecteur de direction des fibres.

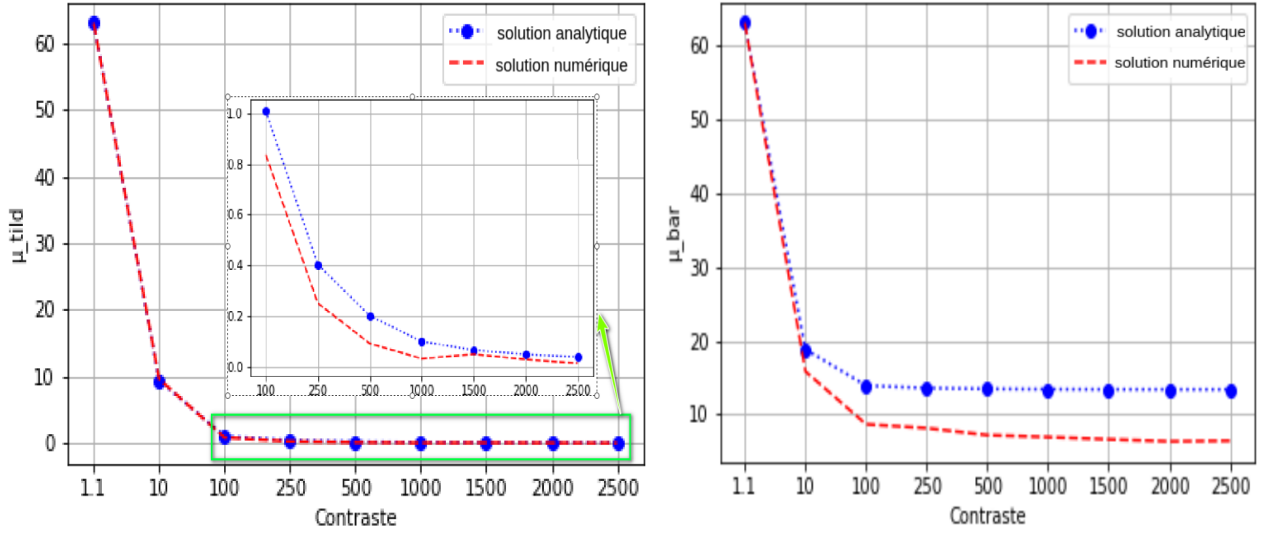


Fig.3. Résultat de l'erreur entre les coefficients numériques et analytiques pour $v = 0.49$

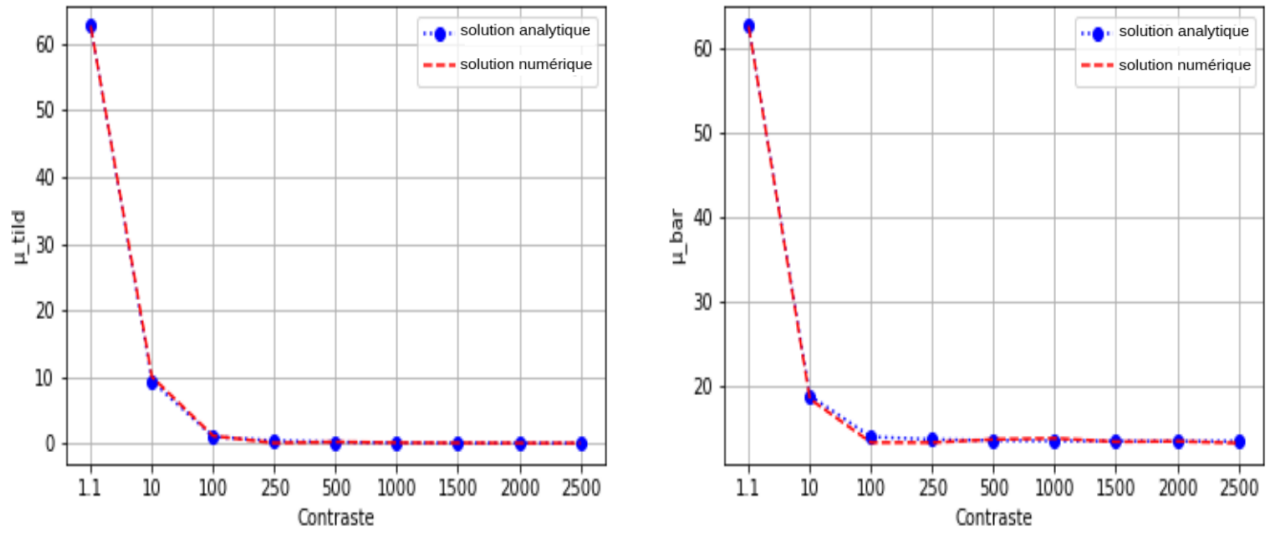


Fig.4. Résultat de l'erreur entre les coefficients numériques et analytiques pour $v = 0.4999$

Les (Fig.3.) et (Fig.4.) présentent une comparaison entre des coefficients obtenus par homogénéisation numériques et des coefficients analytiques de (6) pour des contrastes allant de 1.1 à 2500.

On remarque que pour $v = 0.49$ (Fig.3.), en augmentant le contraste, la marge d'erreur entre les coefficients $\tilde{\mu}$ et $\bar{\mu}$ de l'homogénéisation numérique et analytique augmente et que pour $v = 0.4999$ (Fig.4.) la marge d'erreur entre les coefficients $\tilde{\mu}$ et $\bar{\mu}$ de l'homogénéisation numérique et analytique est faible, ce qui permet de valider la méthode.

4.2 Comparaison de potentiels

Nous présenterons une comparaison de l'approximation avec différents potentiels : Bonet[4], Kaliske[1], Holzapfel[5] .. en calculant l'erreur (VER) entre 2^{nd} tenseur de Piola-Kirchhoff homogène (potentiel) et celui hétérogène (des caractéristiques Fibre/Matrice).

4.3 Tests sur une nappe fibrée complète

On calcule l'erreur de déplacement entre une nappe homogénéisée (en utilisant les coefficients macro. identifiés par optimisation) et une nappe hétérogène (en utilisant les caractéristiques Fibre/Matrice).

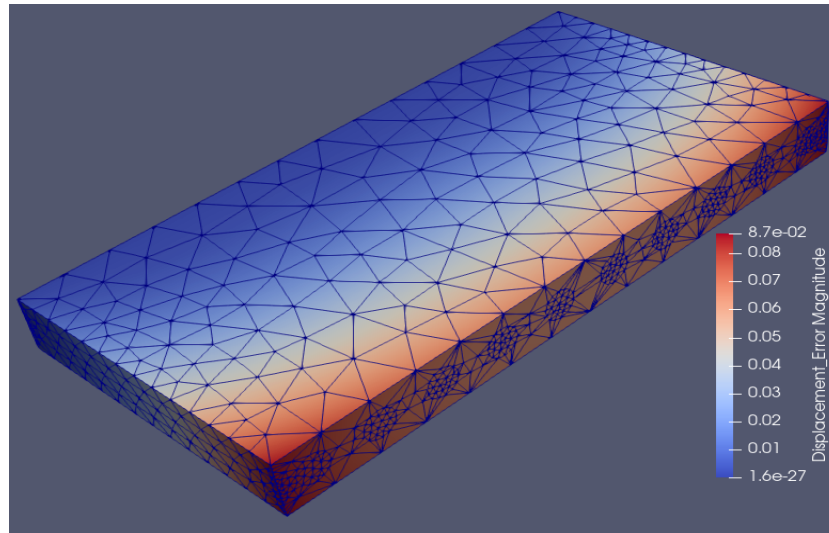


Fig.5. Résultat de l'erreur entre une nappe homogénéisée et une hétérogène pour $\nu = 0.4999$

Cette figure montre que la marge d'erreur est entre $[8.7 \cdot 10^{-2}, 1.6 \cdot 10^{-27}]$ donc très faible en se rapprochant de l'incompressibilité (cas $\nu = 0.4999$) ce qui permet de valider la pertinence de la méthode proposée.

5 Conclusion et perspectives

Dans cette communication, nous avons présenté une méthode d'homogénéisation micro-macro-découplée optimisée par une partie correction ayant comme but de la rapprocher à une méthode d'homogénéisation couplée. Un travail en cours vise à comparer les potentiels et identifier les caractéristiques du matériau homogénéisé pour chaque loi de comportement afin d'éprouver la robustesse de cette procédure pour des potentiels et des géométries complexes.

Références

- [1] Terada K. , Kato J. , Hirayama N. , Inugai T. , Yamamoto. K. *A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme : application to hyperelastic composite materials*, Computational Mechanics, Vol.52, pp.1199-1219, 2013.
- [2] Fish S., Lee K. , Raghavan P. *Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice*, Comput. Methods Appl.Mech. Engrg., Vol.148, pp.53–73, 1997.
- [3] deBotton G., Oren T., *Analytical and numerical analyses of the micromechanics of soft fibrous connective tissues*, Biomech. Model. Mechanobiol., Vol.12, pp.151–166, 2013.
- [4] Nishi S., Terada K., Temizer I. *Isogeometric analysis for numerical plate testing of dry woven fabrics involving frictional contact at meso-scale*, Comput. Mech., Vol.64, pp.211–229, 2019.
- [5] Holzapfel, G. *Nonlinear Solid Mechanics a Continuum Approach for Engineering*, Wiley, Chichester, 2000.