

# Une méthode HHO explicite pour la dynamique des structures

M. Steins<sup>1,2</sup>, F. Drui<sup>1</sup>, A. Ern<sup>2</sup>, O. Jamond<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CEA, Université Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, [morgane.steins@cea.fr](mailto:morgane.steins@cea.fr), [florence.drui@cea.fr](mailto:florence.drui@cea.fr), [olivier.jamond@cea.fr](mailto:olivier.jamond@cea.fr)

<sup>2</sup> CERMICS, Ecole des Ponts, 77455 Marne-la-Vallée, et INRIA Paris, 75589 Paris, [alexandre.ern@enpc.fr](mailto:alexandre.ern@enpc.fr)

**Résumé** — La méthode HHO est une alternative aux éléments finis pour la discrétisation en espace des équations de la mécanique des milieux continus. Elle résout des difficultés comme l'apparition de verrouillage volumique lors de déformations incompressibles et la gestion naturelle du raffinement de maillage adaptatif par une approche polyédrique. Bien que son utilisation mène traditionnellement à des problèmes implicites, nous discuterons ici de techniques rendant la méthode HHO explicite pour la dynamique non linéaire des structures.

**Mots clés** — Dynamique des structures, méthode explicite, méthode HHO, solveur approché

## 1 Motivations

Beaucoup de simulations en mécanique des structures reposent sur deux outils : un schéma de discrétisation spatiale, très souvent les éléments finis, ainsi qu'un schéma d'intégration en temps. Dans le cadre de la dynamique rapide et fortement non linéaire, les schémas d'intégration explicites sont privilégiés. Leur utilisation est motivée par leur robustesse aux fortes non linéarités, ainsi que par la nécessité de résoudre finement des transitoires rapides, et donc d'utiliser un grand nombre de pas de temps.

Les méthodes numériques traditionnellement utilisées dans ce domaine sont les éléments finis avec un schéma des différences centrées pour l'intégration en temps. Pour la discrétisation en espace, la méthode *Hybrid High-Order* (HHO) possède a priori plusieurs avantages par rapport aux méthodes traditionnelles : d'une part l'absence de verrouillage volumique en présence de déformations incompressibles, d'autre part une utilisation "plus naturelle" pour le raffinement de maillage adaptatif (AMR), du fait du caractère non conforme de la méthode.

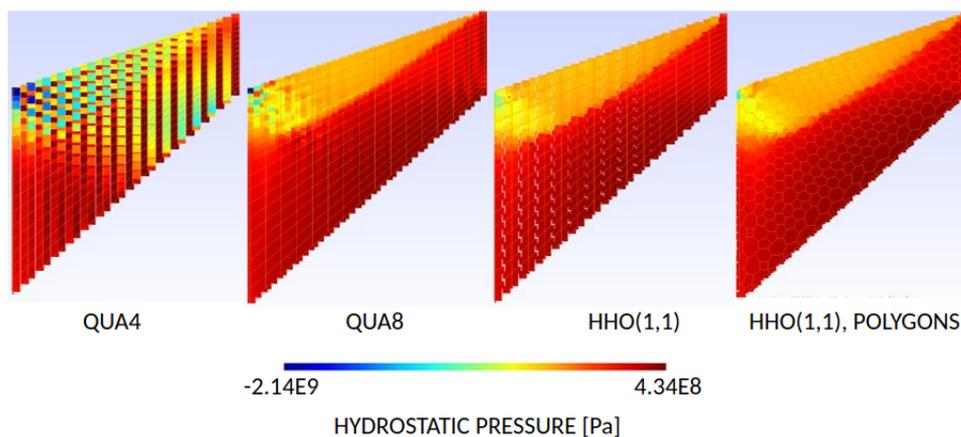


FIGURE 1 – Exemple de verrouillage volumique en éléments finis

La figure 1 montre un exemple de verrouillage volumique en mécanique. Le cas test présenté est celui de la membrane de Cook. Il consiste à simuler la traction sur la partie droite d'un panneau rectangulaire, dont la partie gauche est fixe. La figure 1 montre la trace du tenseur des déformations de Cauchy sur cette membrane et compare des solutions calculées par éléments finis (les deux premières figures) avec des solutions calculées par la méthode HHO (les deux dernières figures). Les figures issues des éléments finis montrent des instabilités numériques, sous la forme d'oscillations de la solution (zones bleues), qui sont absentes des simulations HHO.

En ce qui concerne l'AMR, une des méthodes de raffinement couramment utilisée est celle qui consiste à subdiviser itérativement les cellules d'un maillage initialement grossier. La figure 2 illustre l'exemple du raffinement d'une cellule en bas à gauche d'un maillage en 2D, créant quatre cellules filles plus petites. Les nœuds blancs, créés au milieu de faces, sont appelés *hanging nodes*. Ils demandent un traitement particulier en élément finis, ce qui n'est pas le cas pour HHO.

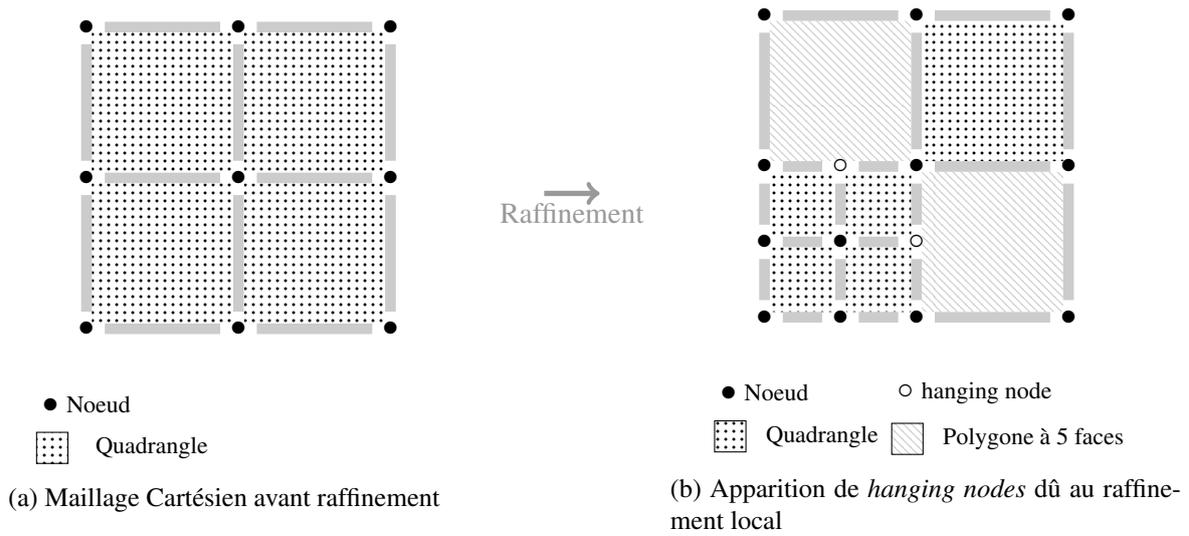


FIGURE 2 – Exemple de raffinement local

La méthode HHO a été introduite pour la diffusion linéaire et la diffusion à coefficients variables respectivement dans [1, 2], et pour l'élasticité linéaire dans [3]. Elle a ensuite été étendue à des domaines variés de la mécanique puis à l'équation des ondes acoustiques dans [4, 5]. La méthode HHO s'inscrit dans la classe des méthodes *Hybridizable Discontinuous Galerkin* (HDG) comme montré dans [6]. Enfin, deux livres sont récemment parus sur les méthodes HHO [7, 8].

## 2 La méthode HHO avec une intégration en temps implicite

Ce paragraphe présente la méthode HHO pour la discrétisation spatiale de l'équation des ondes acoustiques. Cet exemple permet de présenter les différents opérateurs HHO à l'oeuvre, ainsi que de présenter sur une équation simple les problèmes liés à l'intégration explicite en temps.

### 2.1 Discrétisation spatiale

**Formulation fonctionnelle.** Comme lors de la première introduction de la méthode HHO dans [1, 3], commençons par la diffusion linéaire. Sur un domaine  $\Omega$  et avec un paramètre de diffusion  $\mu$ , l'équation

continue considérée est la suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

de solution faible  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Le domaine  $\Omega$  est discrétisé par un maillage  $\mathcal{T}_h$  composé de cellules  $C$  et faces  $F$ . Les inconnues du problème discret HHO sont des polynômes multivariés d'ordre polynomial donné  $l$  sur les cellules et  $k$  sur les faces. Le choix habituel est  $l = k$  ou  $l = k + 1$  (dans ce cas on parle de méthodes HHO+). Dans la suite,  $u_C$  désignera l'ensemble des inconnues associées à une cellule  $C$  et  $u_F$  celles associées à une face  $F$ . Les lettres calligraphiques  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  dénoteront respectivement l'ensemble des cellules et des faces et  $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_{h,0}^{l,k}$  désignera la solution hybride (cellule et face) sur l'ensemble du domaine. Ici l'indice 0 fait référence au fait qu'on impose la condition homogène de Dirichlet sur les inconnues de face situées sur le bord  $\partial\Omega$ . Sur chacune des cellules  $C$  du maillage est défini un opérateur de reconstruction du gradient  $\hat{G}_C^k$ , fonction des degrés de liberté cellules et faces. Il permet de reconstruire un gradient dans un espace potentiellement plus riche que celui du gradient des degrés de liberté cellules seuls, en combinant les inconnues sur la cellule et les inconnues sur les faces par le biais d'une formule d'intégration par parties. Un opérateur de stabilisation  $s_C$  est également défini sur chaque cellule du maillage, assurant le lien entre la trace des inconnues cellule et les inconnues sur les faces. La formulation globale HHO s'écrit à partir de ces deux opérateurs,  $a_h$  désignant la forme bilinéaire associée au problème, définie par

$$a_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \mu_C \int_C \hat{G}_C^k(\hat{u}_C) \cdot \hat{G}_C^k(\hat{w}_C) + \mu_C s_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C). \quad (2)$$

Ceci mène au problème discret suivant : Trouver  $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_{h,0}^{l,k}$  tel que

$$a_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) = \int_{\Omega} f w_C, \quad \forall \hat{w}_h = (w_C, w_F) \in \hat{\mathcal{U}}_{h,0}^{l,k} \quad (3)$$

On montre [1, 3] que ce problème est bien posé et conduit à des estimations d'erreurs optimales en norme  $H^1$  et  $L^2$ .

**Formulation algébrique.** Pour écrire l'équation (3) sous forme algébrique, il faut tout d'abord définir  $\mathbb{K}$ , la matrice de rigidité HHO, comme la matrice associée à la forme bilinéaire  $a_h$ . Le problème (3) se réécrit sous forme matricielle par bloc, en considérant le vecteur solution comme la concaténation de tous les degrés de liberté cellule puis de tous les degrés de liberté face. Définissant également  $F_C$  le vecteur associé au second membre  $\int_{\Omega} f w_C$ , l'équation algébrique s'écrit comme suit

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{CC} & \mathbb{K}_{CF} \\ \mathbb{K}_{FC} & \mathbb{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C \\ U_F \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_C \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

## 2.2 Intégration en temps

Considérons maintenant l'équation des ondes acoustiques sur le domaine spatial  $\Omega$  et sur l'intervalle de temps  $J = [0, T]$ , d'inconnue  $u(x \in \Omega, t \in J)$  :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(\cdot, t) - \nabla \cdot (\mu \nabla u(\cdot, t)) = f & \forall t \in J, \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = v_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

La semi-discrétisation HHO en espace s'écrit comme suit, d'inconnue  $\hat{u}_h(t \in J)$  continue en temps :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_{tt} u_C(t), w_C)_\Omega + a_h(\hat{u}_h(t), \hat{w}_h) = \int_\Omega f(t) w_C & \text{pour tout } \hat{w}_h = (w_C, w_{\mathcal{F}}) \in \hat{U}_{h,0}^k, \\ u_{\mathcal{F}}(t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_C(0) = u_{h,0} & \text{dans } \Omega, \\ \partial_t u_C(0) = v_{h,0}, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (6)$$

avec  $a_h$  la forme bilinéaire issue de la discrétisation HHO de l'équation (3) et  $u_{h,0}, v_{h,0}$  la projection des conditions aux initiales continues sur la composante cellule de l'espace discret HHO. Il est primordial de noter que seules les cellules interviennent dans le terme d'accélération (et les conditions initiales). L'algorithme de discrétisation temporel choisi est celui des différences centrées avec un pas de temps constant  $\Delta t$ . Ceci permet de reformuler l'équation (6) comme suit, en notant d'un exposant  $n$  la solution au temps  $t^n = n\Delta t$ , pour  $0 \leq n \leq N$  (le pas de temps est pris constant pour simplifier) :

$$\frac{1}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C^{n+1} - 2U_C^n + U_C^{n-1} \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{CC} & \mathbb{K}_{C\mathcal{F}} \\ \mathbb{K}_{\mathcal{F}C} & \mathbb{K}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C^n \\ U_{\mathcal{F}}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_C^n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

en posant  $F_C^n := F_C(t^n)$ , et  $\mathbb{M}$  la matrice de masse des cellules. Le problème de cette formule est que la matrice de masse ne porte que sur la composante cellule. Les inconnues dans (7) sont  $U_{\mathcal{F}}^n$  et  $U_C^{n+1}$ . Le système d'équations associé à résoudre séquentiellement est

$$\mathbb{K}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^n = -\mathbb{K}_{\mathcal{F}C} U_C^n, \quad (8a)$$

$$\mathbb{M} U_C^{n+1} = \Delta t^2 F_C^n + \mathbb{M} (2U_C^n - U_C^{n-1}) - \Delta t^2 (\mathbb{K}_{CC} U_C^n + \mathbb{K}_{C\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^n). \quad (8b)$$

L'équation (8a) implique la résolution d'un système linéaire non-diagonal, ce qui est prohibitif dans le cas d'une approche explicite dont la stabilité est conditionnée par une condition CFL. En outre, ceci pose problème dans le cas de fortes non-linéarités.

L'objectif dans la suite de ce travail est de modifier le problème HHO discret afin de transformer le couplage statique et donc implicite dans (8a), en un couplage explicite. Il faut aussi que le problème explicite soit "facile" à résoudre, c'est-à-dire avec une matrice diagonale à inverser, même dans les cas non linéaires. Enfin, la modification appliquée à l'équation sur les faces (8a) doit être suffisamment "petite" pour conserver les propriétés de convergence et ne pas dégrader la condition de stabilité.

### 3 Explicitation de la marche en temps

#### 3.1 Explicitation par splitting itéré

La méthode présentée ici est inspirée des méthodes de splitting Jacobi, utilisées pour résoudre les systèmes linéaires. L'idée consiste à écrire la matrice  $\mathbb{K}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$  comme la somme de deux matrices, dont une est diagonale ou diagonale par bloc. La méthode HHO suggère un splitting *naturel*. En effet, en notant  $\mathbb{B}$  la matrice associée à la partie opérateur de reconstruction et  $\mathbb{S}$  la matrice de stabilisation, on a  $\mathbb{K} = \mathbb{B} + \mathbb{S}$ . Pour certains choix judicieux d'ordres polynomiaux ( $l = k + 1$ ), cette matrice  $\mathbb{S}$  est diagonale par blocs.

L'équation  $\mathbb{K}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^n = -\mathbb{K}_{\mathcal{F}C} U_C^n$  est réécrite sous une forme *splitte* et ce splitting est itéré. Connaissant  $U_C^n$  et  $U_{\mathcal{F}}^{n-1}$ , et définissant  $U_{\mathcal{F}}^{n-1,0} = U_{\mathcal{F}}^{n-1}$ , l'équation à résoudre est la suivante :

$$\mathbb{S}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^{n-1,m+1} = -\mathbb{K}_{\mathcal{F}C} U_C^n - \mathbb{B}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^{n-1,m}, \quad (9)$$

où  $m$  est l'indice d'itération. Il est facile de montrer que cet algorithme donne  $U_{\mathcal{F}}^n$  pour  $m \rightarrow +\infty$  s'il converge, et la convergence a lieu si et seulement si le rayon spectral de  $\mathbb{S}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{B}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$  est strictement plus petit que 1. Afin d'assurer cette condition, l'idée est de multiplier la stabilisation par un paramètre  $\alpha$ . Ce paramètre ne peut pas être trop petit ni trop grand sous peine de dégrader le conditionnement du système. Il modifie également la condition de stabilité sur le pas de temps critique. Il permet néanmoins d'assurer la condition  $\rho(\mathbb{S}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{B}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}) < 1$ , une fois une étude spectrale menée pour  $\alpha = 1$ .

La résolution de l'équation des ondes discrétisée avec la méthode HHO, les différences centrées et ce splitting itéré se présente donc comme suit, à chaque itération en temps :

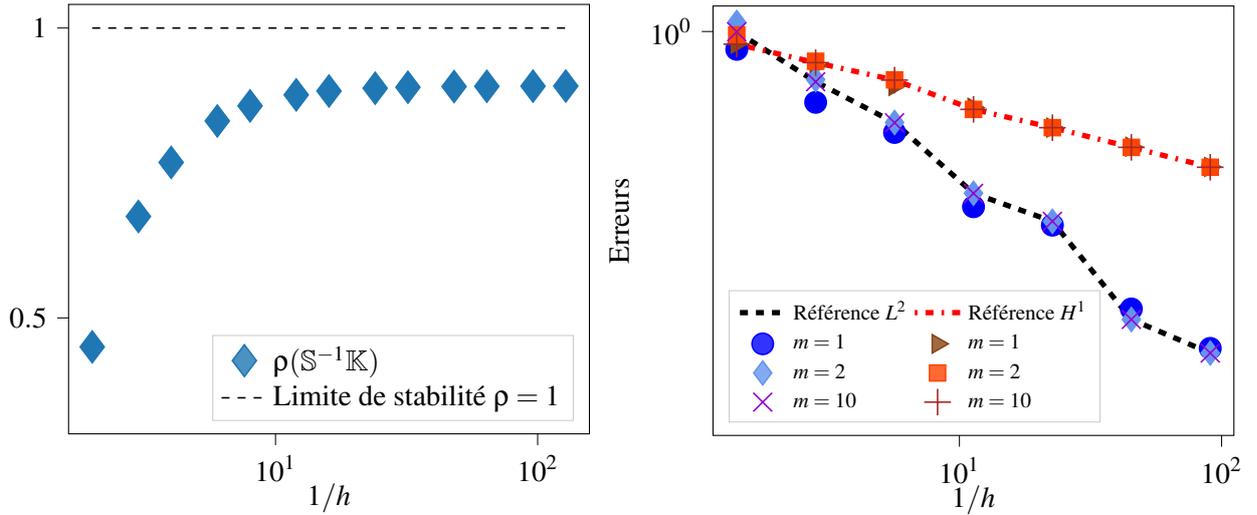
1.  $U_C^n$  et  $U_{\mathcal{F}}^{n-1}$  sont connus, l'équation (9) est itérée pour trouver une bonne approximation de  $U_{\mathcal{F}}^n$ . Ces itérations sont peu chères car n'impliquant que la résolution d'un système diagonal par bloc.
2. L'équation d'évolution (8b) permet d'obtenir  $U_C^{n+1}$ . Ce problème est peu cher car  $\mathbb{M}$  est diagonale par bloc.

### 3.2 Résultats pour l'équation des ondes

La méthode de splitting est multi-paramétrique : il faut déterminer le paramètre  $\alpha$  permettant d'itérer le splitting, la condition de stabilité sur le pas de temps associée, ainsi qu'un critère d'arrêt sur les itérations. Cette méthode est testée à l'aide d'une solution manufacturée, dans le cas d'ordre polynomial le plus bas ( $l = 1, k = 0$ ), sur un domaine bidimensionnel  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $T = 1$  et la solution théorique  $u_{\text{th}}$  vérifiant

$$u_{\text{th}}(x, t) = t^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (10)$$

ce qui donne  $u_0 = v_0 = 0$  et  $f(x, t) = 2(\pi^2 t^2 + 1) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .



(a) Rayon spectral de  $\mathbb{S}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{B}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$

(b) Erreurs  $L^2$  et  $H^1$  -  $m \in \{1, 2, 10\}$

FIGURE 3 – Étude du splitting pour  $k = 0$ ,  $\alpha = 2.2$

Les figures 3a et 3b montrent respectivement le rayon spectral de la matrice  $\mathbb{S}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{B}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$  avec  $\alpha = 2.2$  et les courbes d'erreurs en norme  $L^2$  et  $H^1$  avec et sans splitting, pour différents nombres d'itérations du splitting. Les résultats montrent que seulement 2 itérations suffisent à obtenir une solution très proche du cas non splitté. La méthode proposée permet donc de remplacer la résolution d'un système linéaire par

quelques produits matrice vecteur (3 par itération), ce qui en réduit drastiquement le coût pour des gros problèmes. Des études de comparaisons de temps de calculs plus approfondies sont en cours.

### 3.3 Utilisation pour des problèmes non linéaires

La méthode proposée est d'autant plus prometteuse qu'elle s'adapte sans difficultés au cas non linéaire. En effet, la stabilisation reste linéaire, même dans des problèmes de physique non linéaire. On considère maintenant l'opérateur de rigidité non linéaire portant sur les inconnues discrètes comme suit

$$b_h((u_C^n, u_{\mathcal{F}}^{n-1,m}), (w_C, w_{\mathcal{F}})) = \sum_C \int_C \phi(\hat{G}_C^k(u_C^n, u_{\partial C}^{n-1,m})) \cdot \hat{G}_C^k(w_C, w_{\partial C}), \quad (11)$$

avec  $\phi$  une fonction non linéaire du gradient reconstruit. On note  $\mathbb{B}(U_C, U_{\mathcal{F}})$  le vecteur associé à cet opérateur non linéaire discret. Alors, la version non linéaire de l'équation (9) s'écrit

$$\mathbb{S}_{\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^{n-1,m+1} = -\mathbb{B}(U_C^n, U_{\mathcal{F}}^{n-1,m})_{\mathcal{F}} - \mathbb{S}_{\mathcal{F}C} U_C^n \quad (12)$$

Ce calcul demande uniquement l'évaluation d'une fonction non linéaire, et non la résolution d'un problème non linéaire. En l'occurrence, il n'y a pas besoin de calculer de matrice tangente pour cet algorithme explicite.

Nos premiers résultats montrent que le splitting pour une équation des ondes scalaires conserve ses bonnes propriétés de convergence rapide en quelques itérations sur le cas du p-Laplacien. Des adaptations à la mécanique non-linéaire (grandes transformations, plasticité...) sont en cours.

## Références

- [1] Daniele A. Di Pietro, Alexandre Ern, and Simon Lemaire. An arbitrary-order and compact-stencil discretization of diffusion on general meshes based on local reconstruction operators. *Computational Methods in Applied Mathematics*, pages 461–472, 2014.
- [2] Daniele A. Di Pietro and Alexandre Ern. Hybrid high-order methods for variable-diffusion problems on general meshes. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(1) :31–34, 2015.
- [3] Daniele A. Di Pietro and Alexandre Ern. A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :1–21, 2015.
- [4] Erik Burman, Omar Duran, Alexandre Ern, and Morgane Steins. Convergence Analysis of Hybrid High-Order Methods for the Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, 87(3) :91, 2021.
- [5] Erik Burman, Omar Duran, and Alexandre Ern. Hybrid high-order methods for the acoustic wave equation in the time domain. To appear in *Commun. Appl. Math. Comput. (CAMC)*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02922702>, 2021.
- [6] Bernardo Cockburn, Daniele A. Di Pietro, and Alexandre Ern. Bridging the hybrid high-order and hybridizable discontinuous Galerkin methods. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(3) :635–650, 2016.
- [7] Daniele Antonio Di Pietro and Jerome Droniou. *The Hybrid High-Order Method for Polytopal Meshes*. Modeling, Simulation and Applications series. Springer International Publishing, 2020.
- [8] Matteo Cicuttin, Alexandre Ern, and Nicolas Pignet. *Hybrid high-order methods. A primer with application to solid mechanics*. 2021. SpringerBRIEfs in Mathematics.