

# Solution analytique d'une bifurcation col-nœud dynamique: application à la prédiction de la limite de fonctionnement d'un absorbeur non linéaire de type NES pour l'atténuation de cycles limites

B. Bergeot<sup>1</sup>, S. Berger<sup>1</sup>

<sup>1</sup> INSA CVL, Univ. Orléans, Univ. Tours, LaMé EA 7494, {baptiste.bergeot,sebastien.berger}@insa-cvl.fr

**Résumé** — Dans cette communication, qui reprend les résultats de [1], une description analytique de la dynamique lente d'un oscillateur de Van der Pol couplé à un absorbeur non linéaire de type NES est présentée. L'originalité de ce travail réside dans le fait que cette description prend en compte la valeur du paramètre de perturbation du système (c.-à-d. la rapport de masse entre le NES et l'oscillateur de Van der Pol). Pour cela, une réduction à la variété centrale de la dynamique lente au niveau de l'un de ses points-col est effectuée. Les résultats sont finalement validés numériquement et on observe en général une nette amélioration de leur pouvoir prédictif par rapport aux résultats précédents de la littérature.

**Mots clés** — Réduction passive de vibrations, Nonlinear energy sink, Réduction à la variété centrale.

## 1 Introduction

Le concept d'absorbeurs non linéaires (ou NES *Nonlinear Energy Sink*, traduction anglaise de « puits d'énergie non linéaire ») est relativement récent. Il a été proposé en 2001 [7] : son principe repose sur le couplage entre un système primaire - dont on souhaite limiter les vibrations - et un absorbeur non linéaire (i.e. un système masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire) et de placer l'ensemble sur l'un de ses modes non linéaires afin de produire des transferts quasi-irréversibles de l'énergie vibratoire ou acoustique du système à protéger vers l'absorbeur. Ce phénomène est appelé pompage énergétique. Ces absorbeurs non linéaires ont un avantage déterminant pour certaines applications car ils s'adaptent automatiquement à la fréquence du système à protéger et fonctionnent sur une large gamme fréquentielle. Les absorbeurs non linéaires apparaissent en particulier comme un moyen alternatif intéressant pour atténuer des cycles limites. On peut citer par exemple une série d'articles précurseurs [10, 11] qui montrent qu'un NES couplé à une aile d'avion peut être en mesure d'atténuer les cycles limites résultant d'une instabilité de flottement.

En général, lorsqu'un NES est attaché à une structure primaire, le modèle couplé résultant est analysé en introduisant un petit paramètre de perturbation lié au rapport de masse entre le NES et la structure primaire. Dans l'hypothèse d'une capture de résonance 1 : 1, le système est d'abord moyenné sur une période correspondant à une fréquence naturelle de la structure primaire. Le système moyenné résultant, appelé *dynamique lente*, est ensuite analysé au moyen de techniques de perturbations singulières. Le premier point clé de ces traitements analytiques est la partition de la dynamique lente en deux échelles de temps (une lente et une rapide). Dans cette représentation, l'évolution temporelle de la dynamique lente est ainsi décrite comme une succession de phase lentes et de phases rapides qui sont analysées indépendamment. Le deuxième point clé est la *variété critique* dont les trajectoires du système se rapprochent pendant les phase lentes. En général, l'analyse est effectuée dans une approximation d'ordre zéro [6, 2, 3], c'est-à-dire dans le cas limite où le paramètre de perturbation est égal à zéro. Par conséquent, les résultats qui en découlent se déprécient pour les plus grandes valeurs du paramètre de perturbation ce qui diminue leur pouvoir prédictif.

Dans cette communication, qui reprend les résultats de [1], une description analytique de la dynamique lente du système prenant en compte la valeur du paramètre de perturbation est proposée. L'objectif principal est d'obtenir une description analytique du système avec un pouvoir prédictif plus élevé par rapport à ce qui a été proposé dans le passé dans la littérature.

## 2 Équations du modèle

### 2.1 Équations du mouvement

On considère dans ce travail un oscillateur de Van der Pol (VdP), de masse égale à 1, de coefficient d'amortissement non linéaire  $\varepsilon\rho$  et de raideur égale à 1, couplé à un absorbeur dynamique non linéaire de type NES (*Nonlinear Energy Sink*), de masse  $\varepsilon$ , de coefficient d'amortissement  $\varepsilon\mu$  et de raideur non linéaire  $\varepsilon\alpha$ , dont les équations du mouvement sont :

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon\rho\dot{x}_1(x_1^2 - 1) + x_1 + \varepsilon\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \alpha(x_1 - x_2)^3 = 0 \quad (1a)$$

$$\varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha(x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (1b)$$

On suppose un rapport de masse très petit entre le NES et le système primaire (c.-à-d.  $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Le coefficient d'amortissement de l'oscillateur de Van der Pol et le coefficient d'amortissement du NES sont supposés petits et notés  $\varepsilon\rho$  et  $\varepsilon\mu$  respectivement (avec  $\rho$  et  $\mu \sim O(1)$ ). Finalement, en posant  $\tilde{x}_1 = x_1/\sqrt{\varepsilon}$  et  $\tilde{x}_2 = x_2/\sqrt{\varepsilon}$  et en effectuant le changement de variable  $u_1 = \tilde{x}_1 + \varepsilon\tilde{x}_2$  et  $u_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ , l'Éq. (1) devient

$$\ddot{u}_1 + u_1 - \varepsilon[\rho\dot{u}_1 + u_1 - u_2] = 0 \quad (2a)$$

$$\ddot{u}_2 + \mu\dot{u}_2 + \alpha u_2^3 - \varepsilon[\rho\dot{u}_1 + u_1 - \mu\dot{u}_2 - u_2 - \alpha u_2^3] = 0 \quad (2b)$$

où un développement limité au premier ordre autour de  $\varepsilon = 0$  a été effectué.

### 2.2 Équations de la dynamique lente

La dynamique lente du système est obtenue par une méthode de moyennage. Pour cela les amplitudes complexes  $\phi_1 = (\dot{u}_1 + ju_1)e^{-jt}$  et  $\phi_2 = (\dot{u}_2 + ju_2)e^{-jt}$  sont introduites [12]. Après avoir exprimé les équations du mouvement en terme de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  puis en moyennant sur une période par application de l'approximation de Krylov-Bogolyubov les équations de la dynamique lente sont obtenues comme suit :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon[(\rho - j)\phi_1 + j\phi_2] \quad (3a)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{8}(-4\mu\phi_2 + j(3\alpha\phi_2|\phi_2|^2 + 4\phi_1 - 4\phi_2)) + \frac{1}{8}\varepsilon[3j\alpha\phi_2|\phi_2|^2 - 4\mu\phi_2 + 4\rho\phi_1 - 4j\phi_1 + 4j\phi_2] \quad (3b)$$

Afin d'obtenir une représentation réelle de la dynamique lente, les amplitudes complexes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont écrites sous les formes polaires suivante :  $\phi_1 = re^{j\theta_1}$  et  $\phi_2 = se^{j\theta_2}$ . En introduisant ces dernières dans (3), la dynamique lente exprimée en terme des variables réelles  $r_1$ ,  $r_2$  et  $\Delta = \theta_2 - \theta_1$  est obtenue :

$$\dot{r} = \varepsilon f(r, s, \Delta) \quad (4a)$$

$$\dot{s} = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \varepsilon) \quad (4b)$$

$$\dot{\Delta} = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \varepsilon) \quad (4c)$$

## 3 Analyse à l'ordre zéro de la dynamique lente

### 3.1 Variété critique et points fixes

L'Éq. (4) est écrite à l'échelle de temps lente en posant  $\tau = \varepsilon t$  ( $t$  représente donc l'échelle de temps rapide), cela donne

$$r' = f(r, s, \Delta) \quad (5a)$$

$$\varepsilon s' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \varepsilon) \quad (5b)$$

$$\varepsilon \Delta' = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \varepsilon) \quad (5c)$$

où  $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$ . En posant  $\varepsilon = 0$  on obtient le *sous-système lent* :

$$r' = f(r, s, \Delta) \quad (6a)$$

$$0 = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) \quad (6b)$$

$$0 = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) \quad (6c)$$

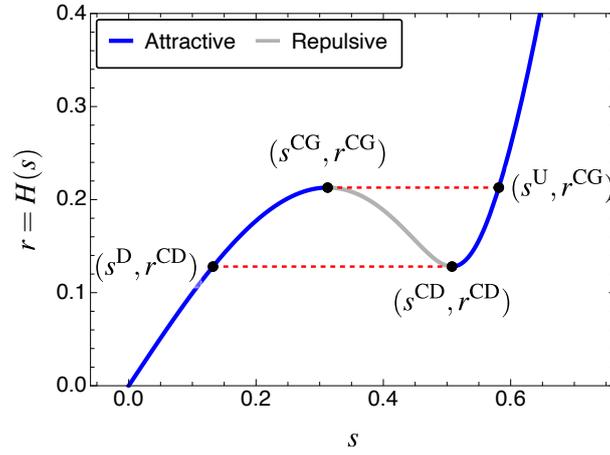


FIGURE 1 – Exemple typique de variété critique dans le plan  $(s, r)$ , c.-à-d. graphe de  $r = H(s)$  (voir Éq. (9)) pour  $\mu = 0.25$  et  $\alpha = 5$ .

et le sous-système rapide :

$$\dot{r} = 0 \quad (7a)$$

$$\dot{s} = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) \quad (7b)$$

$$\dot{\Delta} = \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) \quad (7c)$$

La variété critique de la dynamique lente est la solution de la partie algébrique de (6), soit

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \in \mathbb{R}^{+2} \times [-\pi, \pi] \mid \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = 0 \text{ et } \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}. \quad (8)$$

La résolution de (6b) et (6c) aboutit aux équations suivantes :

$$r = s \sqrt{\mu^2 + \left(1 - \frac{3\alpha s^2}{4}\right)^2} = H(s) \quad \text{et} \quad \tan \Delta = \frac{3\alpha s^2 - 4}{4\mu}. \quad (9)$$

À noter que chaque point de  $\mathcal{M}_0$  est un point fixe du sous-système rapide (7). On peut montrer que ces points fixes sont stables si  $d_s H(s) > 0$  (avec  $d_s(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{ds}$ ) et instables si  $d_s H(s) < 0$ . Ainsi, les branches de  $\mathcal{M}_0$  où  $d_s H(s) < 0$  (resp.  $d_s H(s) > 0$ ) forment la partie attractive (resp. repulsive) de la variété critique. Un exemple typique de cette dernière est représenté en Fig. 1.

La résolution de  $d_s H(s) = 0$  permet d'obtenir les expressions des points-col gauche et droit ( $s^{\text{CG}}$  et  $s^{\text{CD}}$  respectivement) de  $\mathcal{M}_0$ , soient :

$$s^{\text{CG}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}} \sqrt{2 - \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad \text{et} \quad s^{\text{CD}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}} \sqrt{2 + \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad (10)$$

si l'inégalité suivante est respectée

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

ce qui est supposé être le cas dans ce travail.

Les expressions des abscisses  $s^{\text{D}}$  et  $s^{\text{U}}$  (voir Fig. 1) sont obtenues en résolvant  $H(s^{\text{CD}}) = H(s^{\text{D}})$  et  $H(s^{\text{CG}}) = H(s^{\text{U}})$  ce qui donne :

$$s^{\text{D}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 3\mu^2}} \quad \text{et} \quad s^{\text{U}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 3\mu^2}}. \quad (12)$$

Il s'agit maintenant de calculer les points fixes de la dynamique lentes (4). Puisque  $0 < \varepsilon \ll 1$ , ces points fixes peuvent être approchés par ceux du sous-système lent (6). Notez que dans ce cas, celui de l'approximation d'ordre 0, les points fixes sont nécessairement situés sur la variété critique.

D'abord, en introduisant l'Éq. (9) de l'Éq. (6a) on obtient  $(H(s))' = f(H(s), s, \Delta)$  ou encore  $d_s H(s) s' = f_s(s)$  où l'expression de la fonction  $f_s$  n'est pas donnée ici. Les points fixes de (6) sont donc les racines de  $f_s(s)$  avec  $d_s H(s) \neq 0$ . En plus de la solution triviale, les solutions de  $f_s(s) = 0$  sont :

$$s_1^e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho - \sqrt{\mu\rho(1-\mu\rho)}}{\alpha\rho}} \quad \text{et} \quad s_2^e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho + \sqrt{\mu\rho(1-\mu\rho)}}{\alpha\rho}}, \quad (13)$$

avec  $s_1^e < s_2^e$ . La stabilité des points fixes est ensuite déterminée en examinant le signe de  $d_s \left( \frac{f_s(s)}{H'(s)} \right)$ . Notez que les points fixes  $s_1^e$  et  $s_2^e$  n'existent plus (physiquement) lorsqu'ils deviennent complexes. Cela se produit pour

$$\rho^S = \frac{1}{\mu}. \quad (14)$$

L'analyse précédente fournit une description qualitative de la dynamique lente dans le cas limite où  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire dans une approximation d'ordre zéro. Dans cette approximation, la dynamique lente évolue à deux échelles de temps : une échelle de temps lente dans laquelle la dynamique lente est décrite par le sous-système lent (6) et évolue sur la variété critique et une échelle de temps rapide où elle est décrite par le sous-système rapide (7) en dehors de la variété critique. La forme particulière en  $S$  de la variété critique ainsi que l'analyse de stabilité des points fixes de la dynamique lente nous permettent d'expliquer et de prédire ces différentes réponses et par conséquent celles du système initial (1). Quatre scénarii sont possible [6, 8]. Dans les travaux antérieurs des auteurs [2, 3] ces réponses sont classées en deux catégories. Dans la première catégorie, le NES agit, aboutissant aux trois réponses appelées *situations inoffensives*. Il y a tout d'abord, la *suppression complète* dans laquelle le point fixe trivial de la dynamique lente est stabilisé. En général, du fait de la masse légère et du faible amortissement du NES, cet effet de stabilisation est négligeable. Ensuite, on peut observer une *atténuation par réponse périodique*. Dans ce cas, un point fixe stable non trivial de la dynamique lente est atteint, cela correspond à un régime périodique pour le système initial. La dernière situation inoffensive correspondent à une *atténuation par un régime fortement modulé*, (SMR pour Strongly Modulated Response dans la littérature en anglais). Les SMR correspondent à des oscillations de relaxation de la dynamique lente, ce qui correspond à un régime quasi-périodique (modulé en amplitude et en phase) pour le système initial. Dans la seconde catégorie, appelée *situation dangereuse*, le NES n'est pas capable de produire des réponses de faible amplitude. Pour le système non linéaire initial, on observe dans ce cas un cycle limite avec une amplitude proche de celle du système sans NES. Notons que si la non-linéarité de la structure primaire est négligée, la situation dangereuse correspond à un régime non borné dans lequel la trajectoire du système trajectoire croît à l'infini. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement au passage d'un SMR à une situation dangereuse (c'est le cas le plus courant du passage d'une situation inoffensive à une situation dangereuse). On rappelle donc ici brièvement ce que sont les oscillations de relaxation de la dynamique lente. Notons que la description suivante est valable dans le cas limite pour lequel  $\varepsilon = 0$  (c.-à-d. l'approximation d'ordre 0). Dans le plan  $(s, r)$ , à partir d'une condition initiale proche de zéro et en dehors de la variété critique, la trajectoire de la dynamique lente évolue rapidement et horizontalement vers la branche attractive gauche de  $\mathcal{M}_0$  (ceci est décrit par le sous-système rapide (7)). Ensuite, la trajectoire évolue lentement sur cette branche (cette phase est décrite par le sous-système lent (6)) et, s'il n'y a pas de points fixes stables, la trajectoire atteint le point-col gauche  $(s^{CG}, r^{CG})$  où  $\mathcal{M}_0$  devient répulsive. A partir de ce point-col, la dynamique lente effectue un saut horizontal rapide vers  $(s^U, r^{CG})$ . Une deuxième phase lente se produit jusqu'à  $(s^{CD}, r^{CD})$  où un second saut se produit. Une troisième phase lente se produit sur  $\mathcal{M}_0$  jusqu'à  $(s^{CG}, r^{CG})$  et ainsi de suite.

### 3.2 Limite d'atténuation à l'ordre zéro

La limite d'atténuation (ou de fonctionnement) du NES se définit ainsi : en considérant un ensemble de conditions initiales pour la dynamique lente comme une petite perturbation de la solution triviale, la *limite d'atténuation* est définie comme la valeur du paramètre de bifurcation  $\rho$  qui sépare les situations inoffensives des situations dangereuses. Comme défini dans la littérature [6, 8, 2], dans le cadre de l'approximation d'ordre 0 la limite d'atténuation (notée  $\rho_0^*$ ) est soit la valeur de  $\rho$  pour laquelle le point fixe  $s_2^e$  devient plus petit que  $s^U$  (voir Éq. (12)) soit celle où  $s_2^e$  n'existe plus (voir Éq. (14)).

À partir des Éqs. (12) et (13) la solution de  $s_2^e = s^U$  est obtenue et s'écrit :

$$\rho_0^U = \frac{\mu \left( -3\mu^2 + 4\sqrt{1 - 3\mu^2 + 5} \right)}{(\mu^2 + 1)^2}. \quad (15)$$

L'expression (conditionnelle) de  $\rho_0^*$  est donc finalement :

$$\rho_0^* = \begin{cases} \rho_0^U \text{ (Éq. (15))}, & \text{si } \mu < \frac{1}{2} \\ \rho^S \text{ (Éq. (14))}, & \text{si } \mu > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (16a)$$

$$(16b)$$

avec  $\mu = \frac{1}{2}$  la valeur de  $\mu$  solution de  $\rho_0^U = \rho^S$ .

On peut remarquer que dans l'approximation d'ordre 0, la limite d'atténuation ne dépend pas de la raideur non linéaire  $\alpha$  du NES mais seulement de son coefficient d'amortissement  $\mu$  (et des paramètres du système primaire).

Pour des paramètres de l'oscillateur de Van der Pol, il existe une valeur optimale de  $\mu$ , notée  $\mu_0^{\text{opt}}$ , qui maximise la limite d'atténuation. En supposant que  $\mu_0^{\text{opt}} < \frac{1}{2}$ ,  $\mu_0^{\text{opt}}$  est la solution de  $d_\mu \rho_0^U = 0$ , soit

$$\mu_0^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}. \quad (17)$$

## 4 Analyse à l'ordre un de la dynamique lente

La théorie de Fenichel [5] garantit la persistance des oscillations de relaxation, décrite à la fin de la Sect. 3.1, pour  $0 < \varepsilon \ll 1$  en prouvant que l'Éq. (5) a une variété invariante  $\mathcal{M}_\varepsilon$  au voisinage  $O(\varepsilon)$  de  $\mathcal{M}_0$  et possédant les mêmes propriétés de stabilité que  $\mathcal{M}_0$  vis-à-vis des variables rapides. Dans ce cas, concernant le premier saut décrit précédemment, le point de saut à partir duquel la trajectoire quitte la branche attractive de  $\mathcal{M}_\varepsilon$  n'est plus le point-col  $(s^{\text{CG}}, r^{\text{CG}})$ . Le point d'arrivée sur lequel la trajectoire de la dynamique arrive après le saut n'est plus  $(s^U, r^{\text{CG}})$ . L'objectif de ce travail est de déterminer ces points de saut et d'arrivée afin d'obtenir une prédiction analytique de la limite d'atténuation qui, contrairement à (16), prenne en compte la valeur de  $\varepsilon$ . Pour cela, il faut tout d'abord déterminer la loi d'échelle de la dynamique lente au voisinage du point-col  $(s^{\text{CG}}, r^{\text{CG}})$ , c.-à-d. une loi qui décrit la dépendance  $\varepsilon$  de la distance entre  $\mathcal{M}_0$  et la trajectoire réelle. Les points de saut et d'arrivée sont alors déduits de cette loi d'échelle. La littérature sur les systèmes dynamiques montre que dans le cas d'une bifurcation col-nœud dynamique cette loi d'échelle est non triviale impliquant des exposants fractionnaires  $1/3$  et  $2/3$  de  $\varepsilon$  (voir par exemple [4]).

### 4.1 Réduction à la variété centrale

Dans cette section, le théorème de la variété centrale (voir par exemple [9, 4]) est utilisé pour réduire la dynamique lente (5), au voisinage du point-col  $(r^{\text{CG}}, s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}})$ , à la forme normale d'une bifurcation col-nœud dynamique.

Dans un premier temps on pose  $\varepsilon = 0$  dans les membres de droite des Éqs. (5b) et (5c), ce qui donne :

$$r' = f(r, s, \Delta) \quad (18a)$$

$$\varepsilon s' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = g_1(r, s, \Delta), \quad (18b)$$

$$\varepsilon \Delta' = \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = g_2(r, s, \Delta). \quad (18c)$$

Le but est de réduire la dimension de la dynamique lente par rapport aux variables rapides  $s$  et  $\Delta$ , c'est-à-dire d'obtenir un système équivalent qui ne dépend que d'une seule variable. Pour y parvenir, la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_g$  de (18b-18c), évaluée au point-col  $(r^{\text{CG}}, s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}})$ , est calculée. Cette dernière a deux valeurs propres réelles  $\lambda_a = 0$  et  $\lambda_b = -\mu$ .

Pour continuer il faut obtenir des non-linéarités polynomiales. En effet, la réduction à la variété centrale nécessite d'isoler les termes linéaires. Un développement limité des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  est donc

effectué, jusqu'à l'ordre 2 pour les variables  $s$  et  $\Delta$  et jusqu'à l'ordre 1 pour la variable  $r$ . En notant  $\mathbf{t} = (s, \Delta)^T$  et  $\mathbf{t}^{\text{CG}} = (s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}})^T$ , les Éqs. (18b) et (18c) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon \mathbf{t}' = (\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\text{CG}}) \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\text{CG}}, \mathbf{t}^{\text{CG}}) + \tilde{\mathbf{G}}(r - r^{\text{CG}}, \mathbf{t} - \mathbf{t}^{\text{CG}}) \quad (19)$$

avec  $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)^T$  où les fonctions  $\tilde{G}_1$  et  $\tilde{G}_2$  contiennent des termes quadratiques en  $(s - s^{\text{CG}})$  et  $(\Delta - \Delta^{\text{CG}})$  et linéaires en  $(r - r^{\text{CG}})$ .

La partie linéaire de l'Éq. (19) est diagonalisée par une transformation bi-orthogonale. Pour cela les matrices  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_a \ \mathbf{r}_b]$  et  $\mathbf{L} = [\mathbf{l}_a \ \mathbf{l}_b]$  des vecteurs propres droite et gauche de  $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\text{CG}}, \mathbf{t}^{\text{CG}})$  respectivement sont calculées. La transformation bi-orthogonale consiste à définir les variables  $q_a$  et  $q_b$  telles que :  $\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\text{CG}} = \mathbf{R}\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{q} = \mathbf{L}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\text{CG}})$  et  $\mathbf{q} = (q_a, q_b)^T$ . Les variables  $q_a$  et  $q_b$  sont associées aux valeurs propres  $\lambda_a = 0$  et  $\lambda_b = -\mu$  respectivement. De plus les vecteurs propres sont normalisés tels que  $\mathbf{L}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{L}^T \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\text{CG}}, \mathbf{t}^{\text{CG}}) \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$  avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_a, \lambda_b) = \text{diag}(0, -\mu)$ .

Exprimée en fonction de  $q_a$  et  $q_b$ , l'Éq. (19) devient :

$$\varepsilon \mathbf{q}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} + \mathbf{G}(u, \mathbf{q}) \quad (20)$$

avec  $\mathbf{G}(u, \mathbf{q}) = \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{G}}(r - r^{\text{CG}}, \mathbf{R}\mathbf{q})$  et  $u = r - r^{\text{CG}}$ . Ce dernier changement de variable implique l'annulation des termes linéaires en  $q_a$  et  $q_b$  dans  $\mathbf{G}$ .

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(r^{\text{CG}}, \mathbf{t}^{\text{CG}})$  possédant une valeur propre nulle et une valeur propre négative, le théorème de la variété centrale stipule qu'au voisinage du point-col  $(r^{\text{CG}}, s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}})$  le système (20) est topologiquement équivalent à  $\varepsilon q'_a = G_1(q_a, \ell(q_a), u)$ . La fonction  $\ell$  ne peut pas être obtenue explicitement et doit donc être approchée. Par souci de simplicité on choisit  $q_b = \ell(q_a) = 0$ .

Nous supposons finalement que  $f(r, s, \Delta) = f(r^{\text{CG}}, s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}}) = f^{\text{CG}}$ . De plus, seuls les termes d'ordre 2 en  $q_a$  et d'ordre 1 en  $u$  sont conservés dans  $G_1$  conduisant à  $G_1 \approx a_1 q_a^2 + a_2 u$  où  $a_1$  et  $a_2$  sont donnés par des expressions simples qui dépendent des coefficients  $\mu$  et  $\alpha$  du NES. On obtient ainsi la forme normale de la bifurcation col-nœud dynamique<sup>1</sup> :

$$\hat{\varepsilon} q'_a = h(q_a, v) = q_a^2 + v, \quad (21a)$$

$$v' = 1 \quad (21b)$$

avec  $v = \frac{a_2}{a_1} u$ ,  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon f^{\text{CG}} \frac{a_2}{a_1}$  et où le changement d'échelle de temps  $\tau \rightarrow \frac{a_2 f^{\text{CG}}}{a_1} \tau$  a été effectué.

La variété critique de (21) consiste en une branche attractive  $\mathcal{M}_{0,a} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \mid x = -\sqrt{-y}\}$  et une branche répulsive  $\mathcal{M}_{0,r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \mid x = \sqrt{-y}\}$ . La variété critique est hyperbolique excepté en  $(0, 0)$ .

Pour résoudre analytiquement l'Éq. (21) (voir par exemple [4]) on commence par diviser (21a) par (21b) :

$$\hat{\varepsilon} \frac{dq_a}{dv} = q_a^2 + v. \quad (22)$$

On définit ensuite les variables  $z$  et  $s$  telles que  $q_a = \hat{\varepsilon}^{1/3} z$  et  $v = -\hat{\varepsilon}^{2/3} s$ , ce qui conduit à  $\frac{dz}{ds} = -z^2 + s$ . En posant  $z(s) = \varphi'(s)/\varphi(s)$  dans l'équation précédente on obtient  $\varphi''(s) = s\varphi(s)$ , dont la solution s'exprime à l'aide des fonctions d'Airy. Par conséquent, la solution par rapport à la variable originale  $q_a$ , notée  $q_a^*(v)$ , est donnée par

$$q_a^*(v) = \hat{\varepsilon}^{1/3} \frac{\text{Ai}'(-\hat{\varepsilon}^{-2/3} v)}{\text{Ai}(-\hat{\varepsilon}^{-2/3} v)}. \quad (23)$$

Finalement l'expression analytique approchée de la solution de (18) au voisinage de  $(r^{\text{CG}}, s^{\text{CG}}, \Delta^{\text{CG}})$  est

$$s^*(r) = s^{\text{CG}} + \mathbf{r}_{a,1} \hat{\varepsilon}^{1/3} \frac{\text{Ai}'\left(-\hat{\varepsilon}^{-2/3} \frac{a_2}{a_1} (r - r^{\text{CG}})\right)}{\text{Ai}\left(-\hat{\varepsilon}^{-2/3} \frac{a_2}{a_1} (r - r^{\text{CG}})\right)} \quad (24)$$

où  $\mathbf{r}_{a,1}$  est la première coordonnée du vecteur  $\mathbf{r}_a$ .

Une valeur particulière de  $r$  peut être déduite de Éq. (24) : la valeur pour laquelle  $s^*(r)$  tend vers l'infini, notée  $r^\infty$ . Cette valeur de  $r$  correspond aux premiers zéros de Ai. On a donc  $r^\infty = r^{\text{CG}} + K^\infty \varepsilon^{2/3}$  où  $K^\infty = 2.33810 \times \frac{a_1}{a_2} \left(f^{\text{CG}} \frac{a_2}{a_1}\right)^{2/3}$ .

1. La bifurcation est dite *dynamique* car contrairement à la bifurcation en col-nœud *statique*, le paramètre de bifurcation  $v$  n'est pas constant mais varie lentement dans le temps (du fait de (21b)).

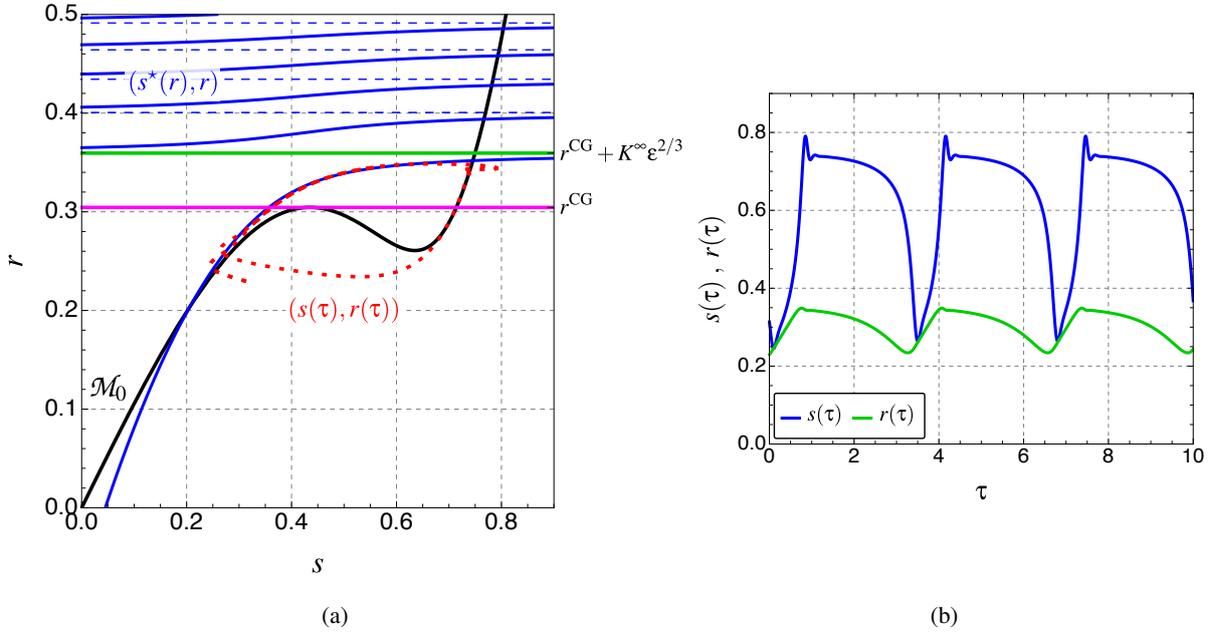


FIGURE 2 – (a) Variété critique  $\mathcal{M}_0$  (8) (ligne noire), intégration numérique de la dynamique lente (18) (ligne rouge pointillée) et Éq. (24) (ligne bleue) et ses asymptotes horizontales (ligne bleue pointillée). Les valeurs de  $r^{\text{CG}} = H(s^{\text{CG}})$  et de  $r^\infty = r^{\text{CG}} + K^\infty \varepsilon^{2/3}$  sont représentées par des lignes horizontale magenta et verte respectivement. (b) Série temporelles de  $r(\tau)$  (ligne verte) issue de l'intégration numérique de (18). Paramètres :  $\varepsilon = 0.015$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha = 3$  et  $\rho = 1.8$ .

## 4.2 Limite d'atténuation à l'ordre un

Comme nous l'avons vu précédemment, la limite d'atténuation est la valeur de  $\rho$  pour laquelle le point fixe  $s_2^\varepsilon$  devient inférieur à  $s^A$  (l'abscisse du point d'arrivée de la trajectoire sur la variété critique) ou pour lequel  $s_2^\varepsilon$  n'existe plus (voir Éq. (14)). Dans l'approximation d'ordre 0, le point d'arrivée est  $s^A = s^U$  défini par (12). Il n'est pas facile d'obtenir une nouvelle expression de  $s^A$  à partir de (24). Cependant, on peut supposer que lorsque la trajectoire atteint la branche attractive droite de  $\mathcal{M}_0$ , la valeur limite  $r^\infty$  est déjà atteinte. Par conséquent, la solution de  $s_2^\varepsilon = s^A$ , notée  $\rho_\varepsilon^U$ , est aussi la solution de

$$H(s_2^\varepsilon(\rho_\varepsilon^U)) = r^\infty = r^{\text{CG}} + K^\infty (\rho_\varepsilon^U) \varepsilon^{2/3} = H(s^{\text{CG}}) + K^\infty (\rho_\varepsilon^U) \varepsilon^{2/3}. \quad (25)$$

À l'exception des très petites valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles l'approximation d'ordre zéro est suffisante, la valeur particulière de  $\mu$ , solution de  $\rho_\varepsilon^U = \rho^S$ , est en général supérieure à  $1/\sqrt{3}$  (voir Éq. (11)). Par conséquent, nous considérons ici que la limite d'atténuation est directement  $\rho_\varepsilon^U$  notée  $\rho_\varepsilon^*$ .

À partir de (25) une nouvelle expression de la valeur optimale de  $\mu$  peut être obtenue. En effet, en notant  $H(s_2^\varepsilon(\rho)) = f_1(\rho, \mu)$ ,  $H(s^{\text{LF}}) = f_2(\mu)$  et  $K^\infty(\rho)\varepsilon^{2/3} = f_3(\rho, \mu)$  on a :

$$d\rho_\mu = \frac{d_\mu f_2 + \partial_\mu f_3 - \partial_\mu f_1}{\partial_\mu f_1 - \partial_\mu f_3}. \quad (26)$$

Par conséquent, en résolvant  $d_\mu \rho = 0$  avec (25), on obtient la valeur maximale  $\rho_\varepsilon^U(\mu)$  et la valeur de  $\mu$  correspondante (c.-à-d. la valeur optimale) notée  $\mu_\varepsilon^{\text{opt}}$ .

La Fig. 3 montre la comparaison entre les résultats théoriques proposés ici et des résultats issus de l'intégration temporelle de la dynamique lente (18) et du système initial (1) : en terme de limite d'atténuation (Fig. 2(a)) et en terme de valeur optimale de  $\mu$  (Fig. 2(b)). On observe une nette amélioration de la prédiction de la limite d'atténuation par rapport à la prédiction d'ordre zéro. La valeur optimale est également mieux prédite pour les plus faibles valeurs de  $\varepsilon$  (jusqu'à environ 0.01). Ensuite la prédiction se détériore mais il faut préciser que pour ces plus grandes valeurs de  $\varepsilon$  (les courbes ne sont pas représentées ici) la concavité de la courbe  $\rho_\varepsilon^U(\mu)$  est très faible. En d'autres termes, sur une large plage de  $\mu$  autour de la valeur optimale, la limite d'atténuation varie peu.

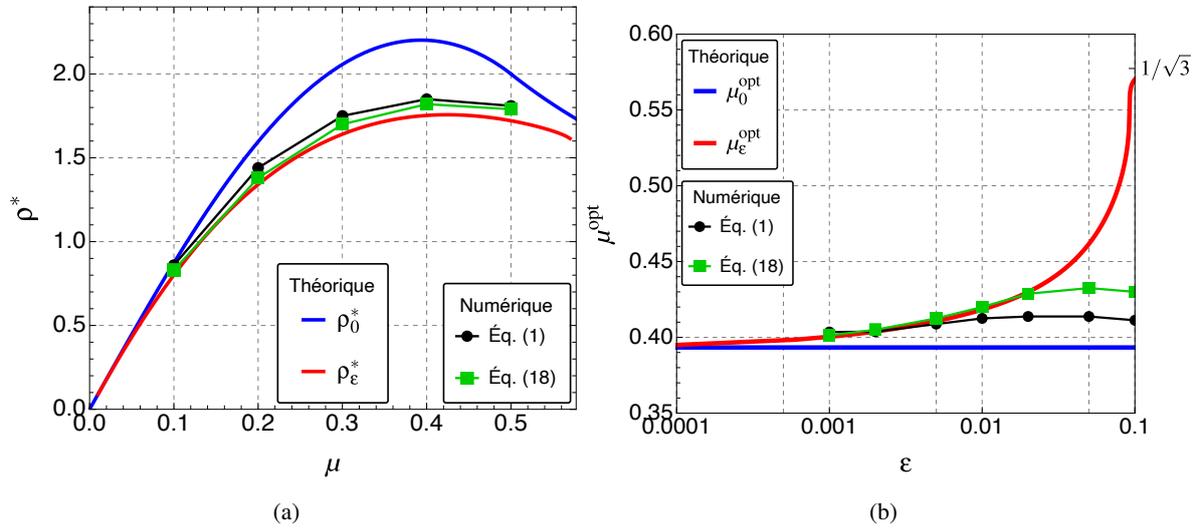


FIGURE 3 – Comparaison entre les résultats théoriques proposés ici et des résultats issus de l’intégration temporelle de la dynamique lente (18) et du système initial (1) : (a) en terme de limite d’atténuation en fonction de  $\mu$  pour  $\varepsilon = 0.015$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha = 3$  et (b) en terme de valeur optimale de  $\mu$  en fonction de  $\varepsilon$  pour  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ .

## Références

- [1] B. BERGEOT : Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 503:116109, 2021.
- [2] B. BERGEOT et S. BELLIZZI : Asymptotic analysis of passive mitigation of dynamic instability using a nonlinear energy sink network. *Nonlinear Dynamics*, 94(2):1501–1522, 2018.
- [3] B. BERGEOT et S. BELLIZZI : Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 131:728–750, 2019.
- [4] N. BERLUND et B. GENTZ : *Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems*. Probability and Its Applications. Springer-Verlag, 2006.
- [5] N. FENICHEL : Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 98:53–98, 1979.
- [6] O. V. GENDELMAN et T. BAR : Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink. *Physica D*, 239(3-4):220–229, février 2010.
- [7] O. V. GENDELMAN, L.I. MANEVITCH, A. F. VAKAKIS et R. M’CLOSKEY : Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part I - Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1):34, 2001.
- [8] O. V. GENDELMAN, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN et D. M. MCFARLAND : Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(5):1655–1677, 2010.
- [9] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, chapitre 3. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1983.
- [10] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND et G. KERSCHEN : Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1 : Theory. *AIAA Journal*, 45(3):693–711, mars 2007.
- [11] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND et G. KERSCHEN : Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2 : Experiments. *AIAA Journal*, 45(3): 2391–2400, mars 2007.
- [12] L. I. MANEVITCH : Complex representation of dynamics of coupled nonlinear oscillators. *In Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media*, pages 269–300. Springer US, 1999.