

# Une approche performante de recalage en dynamique vibratoire par erreur en relation de comportement modifiée et décomposition de domaine

Z. Samir<sup>1,2</sup>, L. Chamoin<sup>1</sup>, M. Abbas<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT

<sup>2</sup> EDF R&D - Dept. ERMES

<sup>3</sup> IMSIA - UMR 9219 /EDF/CNRS/CEA/ENSTA

**Résumé** — En dynamique vibratoire, l'erreur en relation de comportement modifiée est une fonctionnelle très utilisée pour le recalage de modèles. L'approche consiste à minimiser itérativement la fonctionnelle en deux étapes : les zones mal modélisées sont d'abord localisées ensuite leurs paramètres sont corrigés. La localisation revient à résoudre des systèmes linéaires de grande taille à chaque itération, ce qui rend la méthode moins adaptée aux modèles industriels. Dans ce travail, une formulation par décomposition de domaine est proposée, elle rend la méthode plus flexible et très efficace numériquement. Les résultats obtenus, très prometteurs, sont illustrés sur des applications académiques et industrielles.

**Mots clés** — Recalage, Erreur en relation de comportement, Décomposition de domaine, *FETI*.

## 1 Recalage en dynamique à base de l'ERC modifiée

### 1.1 Introduction

Avec le temps ou le manque d'information, la prédiction d'un modèle numérique établie par le passé peut devenir de plus en plus éloignée de la réponse réelle de la structure qu'il représente. Dans ce cas il est possible d'utiliser des informations expérimentales pour vérifier ou corriger le modèle, on parle alors de problème inverse ou de recalage de modèles. Ce type de problème est mal posé [1] et il y a deux familles de méthodes déterministes pour le résoudre : les méthodes non-paramétriques qui apportent des corrections directes aux matrices éléments finis du modèle, et les méthodes paramétriques qui ont un sens physique plus fort car la correction concerne les paramètres du modèle.

La méthode de recalage qui est considérée ici est une méthode paramétrique basée sur la notion d'erreur en relation de comportement (*ERC*) [11]. L'*ERC* est une fonctionnelle énergétique proposée d'abord comme estimateur d'erreur à posteriori, avant d'être étendue aux problèmes de recalage car elle a d'excellentes propriétés [2], à savoir la convexité de la fonctionnelle même pour des comportements complexes, la robustesse face aux mesures bruitées et la détection des sous-structures mal modélisées.

### 1.2 L'erreur en relation de comportement en dynamique linéaire

En dynamique, un problème est gouverné par des conditions initiales, des équations de liaison et d'équilibre ainsi qu'une relation de comportement. La résolution consiste alors à trouver le couple déplacement ( $u$ ) - contrainte ( $\sigma$ ) qui vérifie ces équations. L'erreur en relation de comportement permet de reformuler le problème en séparant les équations du problème en équations fiables (liaison + équilibre) et équations non fiables notamment la relation de comportement. Les équations fiables permettent d'introduire la notion d'admissibilité. On dit alors qu'un champ de déplacement est cinématiquement admissible lorsqu'il vérifie les équations de liaison. De même, un champ de contrainte est dit dynamiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre. Ainsi, une solution approchée  $(u, \sigma)$  doit d'abord être admissible, et c'est la manière dont elle vérifie la relation de comportement qui juge de sa qualité. C'est dans ce contexte que l'erreur en relation de comportement a été introduite, elle est formulée comme une mesure énergétique du résidu de la relation de comportement, nulle si celle-ci est vérifiée et positive sinon.

### 1.2.1 Les variantes de l'ERC en dynamique

Il y a deux variantes de l'ERC en dynamique vibratoire. La première est appelée erreur au sens de Drucker [12], elle est basée sur les deux principes de stabilité de Drucker [4] vérifiés par une large classe de matériaux et qui assurent la positivité de l'erreur. La deuxième variante est appelée erreur en dissipation [12], car elle met en évidence uniquement les phénomènes dissipatifs. Elle est basée sur la relation de comportement formulée par variables internes, la positivité de l'erreur est ainsi assurée par le deuxième principe de la thermodynamique. Dans la suite de ce document, seule l'erreur au sens de Drucker sera considérée (la même logique s'applique à l'erreur en dissipation). De plus, l'amortissement ne sera pas considéré sans perte de généralité.

### 1.2.2 Discrétisation par éléments finis

En mécanique, la résolution numérique des problèmes passent par leur discrétisation notamment par éléments finis. Cela conduit à la construction des matrices de rigidité, de masse et d'amortissement qui seront notées respectivement  $K$ ,  $M$  et  $C$ . Afin de présenter la forme discrétisée de l'erreur au sens de Drucker, il faut introduire trois champs de déplacements discrétisés notés  $\{U\}$ ,  $\{V\}$  et  $\{W\}$ .  $\{U\}$  représente le champ cinématiquement admissible,  $\{V\}$  et  $\{W\}$  sont des champs adjoints qui vérifient respectivement la relation de comportement et le terme inertiel de l'équation d'équilibre, ils ne sont donc plus supposés vérifiés par  $\{U\}$ . L'erreur au sens de Drucker permet de mesurer de manière énergétique l'écart entre  $\{U\}$  et les champs  $\{V\}$  et  $\{W\}$ ; après passage en fréquentiel elle s'écrit :

$$\xi_{\omega}^2(U, V, W) = \frac{\gamma}{2} \{U - V\}^T [K] \{U - V\} + \frac{1 - \gamma}{2} \omega^2 \{U - W\}^T [M] \{U - W\} \quad (1)$$

$\gamma \in [0, 1]$  est un scalaire qui permet de pondérer relativement les deux termes de l'erreur<sup>1</sup>. Les champs  $\{V\}$  et  $\{W\}$  sont admissibles s'ils vérifient la relation de comportement discrétisée donnée par :

$$[K] \{V\} - \omega^2 [M] \{W\} = \{F\} \quad (2)$$

$\{F\}$  désigne le vecteur de forces généralisées.

### 1.3 L'erreur en relation de comportement modifiée (ERCM)

L'ERCM est la fonctionnelle utilisée en recalage, elle permet de mesurer l'écart calcul/essai en fonction des paramètres du modèle. Elle est construite sur la base de l'ERC (3), en rajoutant un terme qui permet de prendre en compte les informations expérimentales. Ces dernières sont la référence dans les problèmes de recalage. L'ERCM peut être vue comme une approche de Tikhonov avec une régularisation par la physique. Pour une fréquence donnée, l'ERCM s'écrit en fonction des paramètres  $p$  du modèle comme<sup>2</sup> :

$$e_{\omega}^2(p) = \xi_{\omega}^2(p) + \frac{r}{1 - r} \{\Pi U - \tilde{U}_{\omega}\}^T [G_r] \{\Pi U - \tilde{U}_{\omega}\} \quad (3)$$

$\tilde{U}_{\omega}$  est le vecteur de déplacements mesurés à la fréquence  $\omega$  et  $r \in [0, 1]$  un coefficient ajustable, ce dernier permettant choisir la confiance apportée aux mesures car elles sont souvent entachées d'erreurs. Comme il est impossible d'instrumenter toute la structure, l'opérateur de projection  $\Pi$  est utilisé pour extraire la partie mesurée du champ de déplacement. Finalement,  $[G_r]$  est une matrice symétrique définie positive utilisée comme norme pour mesurer l'écart calcul/essai.

La réponse des structure est généralement étudiée sur une bande de fréquences  $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ . Cette bande peut être discrète ou continue, dans ce cas l'ERCM s'écrit :

$$e^2(p) = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} k(\omega) e_{\omega}^2(p) d\omega \quad (4)$$

avec  $k(\omega)$  un paramètre de pondération qui permet de privilégier des fréquences considérées importantes (e.g. les fréquences propres de la structure).

1. Chaque terme est issu de l'un des deux principes de Drucker

2.  $\xi_{\omega}$  dépend implicitement des paramètres  $p$  du modèle à travers les champs  $\{U\}$ ,  $\{V\}$  et  $\{W\}$

## 1.4 Méthode de recalage

La méthode de recalage est formulée comme un problème de minimisation de l'*ERCM*. L'objectif est de trouver le jeu de paramètres qui minimise (3) sous la contrainte d'admissibilité (2). Le nombre de paramètres peut être très important pour des modèles industriels, il est possible dans ce cas de le réduire à l'aide d'une étude de sensibilité par exemple. L'approche utilisée dans le recalage par l'*ERCM* [2] est différente, elle exploite la capacité de la fonctionnelle à localiser spatialement les erreurs de modélisation, seuls les paramètres des zones mal modélisées sont ainsi corrigés. La méthode de recalage est donc itérative et composée de deux étapes : une étape de localisation suivie d'une étape de correction.

### 1.4.1 Étape de localisation

Étant donné un jeu de paramètres du modèle, l'étape de localisation consiste à calculer l'*ERCM* pour chaque sous-structure pour détecter celles mal modélisées. Pour cela, il faut d'abord calculer les champs  $\{U\}$ ,  $\{V\}$  et  $\{W\}$  qui minimisent l'*ERCM* (3) pour le jeu de paramètres considéré sous la contrainte d'admissibilité (2). Cela introduit naturellement la fonctionnelle de Lagrange suivante :

$$E_{\omega}(U, V, W, \chi) = e_{\omega}^2(U, V, W) + \{\chi\}^T ([K]\{V\} - \omega^2[M]\{W\} - \{F\}) \quad (5)$$

avec  $\{\chi\}$  le multiplicateur de Lagrange qui impose la contrainte d'admissibilité. Exprimer la stationnarité de la fonctionnelle (5) conduit à la résolution du système linéaire :

$$NX = b \quad (6)$$

avec :

$$N = \begin{bmatrix} \gamma[K - \omega^2 M] & \frac{2r}{1-r} \Pi^T [G_r] \Pi \\ -[K + \frac{\gamma}{1-\gamma} \omega^2 M] & [K - \omega^2 M] \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} \{U - V\} \\ \{U\} \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} \frac{2r}{1-r} \Pi^T [G_r] \tilde{U}_{\omega} \\ \{F\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

tel que :

$$\{U - W\} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \{U - V\} \quad ; \quad \{\chi\} = \gamma \{U - V\} \quad (8)$$

La localisation revient alors à résoudre (6) pour chaque fréquence à chaque itération. Cela peut être très coûteux pour des modèles de taille industrielle, surtout qu'il faudra assembler la matrice après chaque variation de paramètres et la factoriser lorsqu'une méthode directe est utilisée. Cela peut être amélioré grâce aux méthodes de décomposition de domaine ; ceci est l'objet de la partie 3.

### 1.4.2 Étape de correction

Cette étape vient juste après la localisation spatiale de l'erreur, elle consiste à mettre à jour les paramètres des zones mal modélisées. Cela est assez simple car l'expression analytique du gradient de l'erreur est obtenue directement grâce à la méthode de l'état adjoint<sup>3</sup>. Il suffit alors d'effectuer une simple descente de gradient, ou tout autre algorithme d'optimisation qui post-traite les gradients (e.g. Gauss-Newton, BFGS, Levenberg-Marquardt...).

## 2 Méthodes de décomposition de domaine - *FETI*

Les méthodes de décomposition de domaine sont des méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires et non-linéaires. Elles sont équipées d'excellents préconditionneurs et problèmes grossiers qui les rendent très scalables. En mécanique des structures, la méthode primale *BDD* [10] et la méthode duale *FETI* [10] sont les plus connues. Seule *FETI* sera considérée pour la suite car elle est moins intrusive.

Afin de présenter la méthode *FETI*, considérons le système linéaire  $K U = F$  issu de la discrétisation d'un problème d'élasticité linéaire défini sur un domaine  $\Omega$ . *FETI* consiste à séparer  $\Omega$  en  $\mathcal{N}$  sous-domaines  $\Omega^{(s)}$  sans recouvrement, des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  sont ensuite utilisés pour connecter

3. Le problème adjoint est résolu lors de l'étape de localisation

les sous-domaines et assurer ainsi la continuité du déplacement à l'interface duale. Cette dernière est contrairement à l'interface géométrique redondante pour les nœuds multiples. Le champ  $\lambda$  peut s'interpréter comme des inter-efforts entre les sous-domaines. Cela permet de reformuler le problème global :

$$K^{(s)}U^{(s)} = F^{(s)} + t_b^{(s)T} B^{(s)T} \lambda \quad (9a)$$

$$\sum_s B^{(s)} t_b^{(s)} U^{(s)} = 0 \quad (9b)$$

L'exposant  $^{(s)}$  représente les grandeurs locales. Les équations (9a) et (9b) sont respectivement l'équilibre local d'un sous-domaine et la condition de continuité du déplacement à l'interface.  $t_b^{(s)}$  est l'opérateur de trace discrétisé entre les *dofs* d'un sous-domaine et ceux de son interface géométrique. Les opérateurs booléens signés  $B^{(s)}$  permettent d'assembler les *dofs* de l'interface duale globale depuis les interfaces géométriques des sous-domaines [10].

## 2.1 Le problème d'interface

Afin de formuler le problème d'interface, il faut extraire l'expression de  $U^{(s)}$  à partir de l'équation d'équilibre (9a) et la remplacer dans l'équation (9b). Pour cela, notons  $K^{(s)+}$  et  $R^{(s)}$  l'inverse généralisée de la matrice  $K^{(s)}$  et son noyau. La matrice inverse  $K^{(s)-1}$  n'est pas utilisée car elle n'est pas définie si un sous-domaine est flottant. L'équation (9a) devient :

$$U^{(s)} = K^{(s)+} \left( F^{(s)} + t_b^{(s)T} B^{(s)T} \lambda \right) + R^{(s)} \alpha^{(s)} \quad (10)$$

L'équation (10) est soumise à la condition de compatibilité suivante :

$$R^{(s)T} \left( F^{(s)} + t_b^{(s)T} B^{(s)T} \lambda \right) = 0 \quad (11)$$

Le problème d'interface s'obtient finalement en remplaçant (10) dans (9b) tout en tenant compte de la condition (11). Il s'écrit :

$$\begin{bmatrix} S_d & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad (12)$$

tel que :

$$S_d^{(s)} = t_b^{(s)} K^{(s)+} t_b^{(s)T} \quad ; \quad S_d = \sum_s B^{(s)} S_d^{(s)} B^{(s)T} \quad ; \quad d = - \sum_s B^{(s)} t_b^{(s)} K^{(s)+} F^{(s)}$$

$$e = - \left( \dots, F^{(s)T} R^{(s)}, \dots \right)^T \quad ; \quad G = \left( \dots, B^{(s)} t_b^{(s)} R^{(s)}, \dots \right) \quad ; \quad \alpha = \left( \dots, \alpha^{(s)T}, \dots \right)^T$$

$S_d^{(s)}$  et  $S_d$  sont respectivement les opérateurs de Schur local et global. Le problème d'interface (12) est résolu par une méthode de Krylov sous contrainte [10] (e.g. le gradient conjugué). Pour cela, une estimation initiale (13a) vérifiant la contrainte  $G^T \lambda = e$  est d'abord calculée, ensuite un projecteur (13b) permet d'imposer le respect de la contrainte lors de chaque itération.

$$\lambda_0 = AG (G^T AG)^{-1} e \quad (13a)$$

$$P = I - AG (G^T AG)^{-1} G^T \quad (13b)$$

$A$  est une matrice symétrique définie positive utilisée pour que l'inverse de  $G^T AG$  soit bien défini.

## 2.2 Le préconditionnement

L'opérateur d'interface de *FETI* s'écrit comme assemblage des opérateurs de Schur locaux  $S_d^{(s)}$ , cela est avantageux car les produits matrice-vecteur s'effectuent en parallèle sans besoin d'assembler explicitement l'opérateur d'interface  $S_d$ . Le préconditionneur doit donc suivre la même logique pour garder cet avantage, il s'écrit ainsi comme assemblage des inverses des opérateurs  $S_d^{(s)}$  :

$$\tilde{S}_d^{-1} = \sum_s M^{(s)} B^{(s)} S_d^{(s)+} B^{(s)T} M^{(s)T}$$

$M^{(s)}$  sont des matrices de pondération qui doivent vérifier  $\sum_s M^{(s)} = I_n$  pour des raisons de convergence [10]. D'autre part, l'opérateur  $S_d^{(s)+}$  n'est rien d'autre que le complément de Schur primal du sous-domaine  $\Omega^{(s)}$ . Il est donné par :

$$S_p^{(s)} = K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \quad (14)$$

avec  $i$  et  $b$  désignant respectivement les *ddl*s internes et ceux d'interface du sous-domaine.  $\tilde{S}_d^{-1}$  s'appelle le préconditionneur de Dirichlet, il y a également les préconditionneurs *lumped* et *superlumped* basés sur l'approximation de (14) respectivement par  $K_{bb}^{(s)}$  et  $\text{diag}(K_{bb}^{(s)})$ .

### 2.3 Le problème grossier

Lors de la résolution du problème d'interface, les produits matrice-vecteur n'entraînent que des communications entre les sous-domaines voisins. Cela est problématique lorsque le nombre de sous-domaines est grand, car l'échange d'informations entre ceux éloignés demandera plusieurs itérations. Ainsi, plus il y a de sous-domaines, moins la convergence de la méthode est rapide, elle n'est donc pas scalable. Le problème grossier permet de résoudre cela. Il s'agit d'un système linéaire de petite taille résolu à chaque itération et faisant intervenir tous les sous-domaines, cela permet aux sous-domaines éloignés de communiquer. En conséquence, l'erreur est propagée à l'échelle globale la structure ce qui rend les méthodes de décomposition de domaine plus scalables.

La contrainte  $G^T \lambda = e$  est le problème grossier de la méthode *FETI*, car le projecteur (13b) qui l'impose à chaque itération nécessite la résolution d'un système linéaire associé à la matrice  $(G^T A G)$ . Cette dernière est la matrice du problème grossier, sa construction implique tous les sous-domaines et donc ils interviennent tous lors de la résolution. Ce problème grossier est dit naturel car il est construit à base des noyaux des matrices locales  $K^{(s)}$ . D'autres types de problèmes grossiers existent ; *GenEO* [8, 9] est sans doute l'un des plus performants, il est basé sur la résolution de problèmes aux valeurs propres au niveau des sous-domaines pour approcher les modes problématiques de convergence. Ainsi, en imposant l'orthogonalité du résidu par rapport à ces modes [3], la méthode devient encore plus scalable. *GenEO* a déjà été appliqué avec succès à la méthode *FETI* [8].

## 3 L'ERCM par décomposition de domaine

Le recalage par l'*ERCM* est très bien adapté aux méthodes de décomposition de domaine. Puisque ces méthodes sont itératives, il est possible d'utiliser le résultat de la phase de localisation d'une itération comme initialisation à l'itération suivante. Cela permet de résoudre le système linéaire de cette phase en moins d'itérations. De plus, moins la variation de paramètres entre deux itérations du recalage est grande, plus la réduction du nombre d'itérations est importante. Cet avantage n'existe pas évidemment pour des méthodes directes, mais il l'est pour toute autre méthode itérative.

Par rapport aux autres méthodes itératives parallèles, les méthodes de décomposition de domaine se distinguent par leur robustesse et faible complexité en terme de communications [10], sans oublier la possibilité de traiter des assemblages de structures avec des conditions complexes à l'interface. D'autre part, elles ont un avantage numérique majeur dans le cadre du recalage par l'*ERCM*. À la fin de chaque itération du recalage, les paramètres du modèles changent. Cela nécessite au début de l'itération suivante de réassembler les matrices éléments finis concernées ainsi que la matrice de la phase de localisation. Cette opération peut être très coûteuse puisqu'il s'agit de matrices creuses. De plus, lorsque ces matrices sont parallèles (i.e. stockées sur plusieurs nœuds de calcul), la problématique des communications nécessaires à leurs assemblages s'ajoute. Dans les méthode de décomposition de domaine, l'opérateur global d'interface n'est pas assemblé, aucune communication n'est donc nécessaire. D'autre part, cet opérateur est défini en terme d'opérateurs locaux. Ainsi, après chaque variation de paramètres lors du recalage, seules les sous-domaines dont les paramètres ont changé auront à réassembler leur partie du problème.

Ces méthodes ont déjà été appliquées à la phase de localisation du recalage par l'*ERCM* [2]. Cependant, elles sont utilisées uniquement comme boîte noire pour résoudre les systèmes linéaires issus de la méthode *SOR*. Ce qui va être présenté dans cette partie est une reformulation complète de la phase de localisation par décomposition de domaine. Finalement, il faut noter qu'il y a plusieurs travaux concernant l'application des méthodes de décomposition de domaine aux problèmes inverses, notamment pour

l'identification des coefficients de Robin dans les systèmes elliptiques et paraboliques [5], et l'identification de la transmissivité dans les problèmes d'écoulements en milieu poreux [7].

### 3.1 Reformulation de l'étape de localisation

Pour écrire la phase de localisation par décomposition de domaine, une formulation lagrangienne est utilisée [6]. Elle consiste à écrire le lagrangien (5) comme contributions locales de tous les sous-domaines  $\Omega^{(s)}$ . Pour cela, il faut d'abord remplacer le champ  $\{U - W\}$  et la variable duale  $\{\chi\}$  par leurs expressions (8) données en fonction de  $\{U - V\}$ . Le problème devient donc un simple problème de minimisation sans contrainte associé à la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega(U, V) = & \frac{\gamma}{2} \{U - V\}^T \left[ K + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \omega^2 M \right] \{U - V\} + \frac{r}{1 - r} \{\Pi U - \tilde{U}_\omega\}^T [G_r] \{\Pi U - \tilde{U}_\omega\} \\ & + \gamma \{U - V\}^T \left( \left[ K + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \omega^2 M \right] \{V\} - \frac{\omega^2}{1 - \gamma} [M] \{U\} - \{F\} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

La fonctionnelle (15) peut s'écrire comme contributions locales des sous-domaines si deux conditions sont vérifiées. La première est qu'il n'y a aucune information expérimentale à l'interface. La deuxième concerne la matrice norme  $[G_r]$ , cette dernière s'écrit comme une projection d'une combinaison linéaire des matrices éléments finis (16). La projection est effectuée sur une base de modes liée aux mesures expérimentales représentée par une matrice  $Q$ .

$$G_r = Q^T [a_K K + a_M M] Q \quad (16)$$

La deuxième condition est liée à  $Q$ , cette matrice doit avoir la même structure creuse par bloc que l'opérateur de projection  $\Pi$ . Cela est particulièrement vrai lorsque  $Q = \Pi$ , c'est donc le choix naturel.

$$\mathcal{L}_\omega(U, V) = \sum_s \mathcal{L}_\omega^{(s)}(U^{(s)}, V^{(s)}) \quad (17)$$

Sous l'hypothèse que ces deux conditions sont vérifiées, il est possible d'écrire (15) sous forme de contributions locales (17).  $\mathcal{L}_\omega^{(s)}(U^{(s)}, V^{(s)})$  est l'équivalent de  $\mathcal{L}_\omega(U, V)$  pour un sous-domaine, il s'agit de la même fonctionnelle écrite en terme d'opérateurs locaux  $K^{(s)}$ ,  $M^{(s)}$ ,  $G_r^{(s)}$  et  $\Pi^{(s)}$ . L'idée consiste maintenant à considérer les champs  $U^{(s)}$  et  $V^{(s)}$  indépendants entre sous-domaines, le lien est recréé par une contrainte de continuité à l'interface donnée par :

$$\sum_s \underline{B}^{(s)} \underline{t}_b^{(s)} X^{(s)} = 0 \quad (18)$$

$X^{(s)}$  est l'équivalent local de  $X$  (7), les opérateurs soulignés sont des répétitions diagonales (e.g.  $\underline{B}^{(s)} = \text{diag}(B^{(s)}, B^{(s)})$ ). La contrainte (18) est intégrée à la fonctionnelle (17) grâce à des multiplicateurs de Lagrange  $\mu$ . Exprimer la stationnarité de la fonctionnelle obtenue conduit au système d'équations :

$$N^{(s)} X^{(s)} = b^{(s)} + \underline{t}_b^{(s)T} \underline{B}^{(s)T} \mu \quad (19a)$$

$$\sum_s \underline{B}^{(s)} \underline{t}_b^{(s)} X^{(s)} = 0 \quad (19b)$$

avec  $N^{(s)}$  et  $b^{(s)}$  les versions locales de  $N$  et  $b$  (7). A noter que le système d'équations (19) est équivalent à celui de départ de la méthode *FETI* dans le cas de l'élasticité (9). Il suffit alors de suivre les mêmes étapes que la partie 2 pour obtenir la formulation duale du problème d'interface de la phase de localisation.

La seule différence avec *FETI* est l'absence du problème grossier naturel, car les matrices de la phase de localisation ne possèdent pas de noyaux. Cela est problématique puisque c'est le problème grossier qui rend ces méthodes scalables. Une alternative consiste à utiliser *GenEO* ou des solveurs multipréconditionnés (travail en cours).

### 3.2 Résultats et discussions

Pour tester la méthode, considérons le cas très simple d'une poutre 3D partitionnée en trois sous-domaines (Figure 1), sous l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire isotrope. Le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  valent respectivement  $210 \text{ GPa}$  et  $0,3$ . D'autre part, un déplacement nul et un effort surfacique sont appliqués de part et d'autre de la poutre sur les surfaces externes transversales.

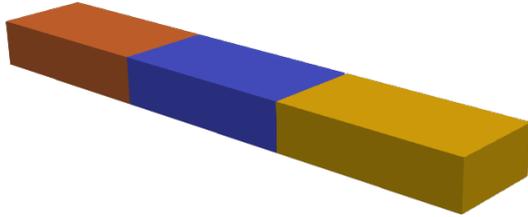


FIGURE 1 – Sous-domaines

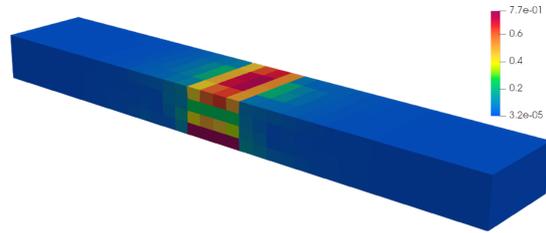


FIGURE 2 – Cartographie de l'erreur

Ce modèle est supposé représenter la structure réelle, il est donc utilisé pour simuler les mesures expérimentales. Le modèle erroné est presque le même que le modèle "réel", la seule différence est qu'un module de Young et un coefficient de Poisson différents sont affectés au milieu du deuxième sous-domaine ( $E = 190 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.15$ ). La phase de localisation de l'ERCM appliquée à ce modèle mène à des résultats cohérents, la cartographie d'erreur (Figure 2) montre que la formulation par décomposition de domaine arrive bien à localiser l'erreur.

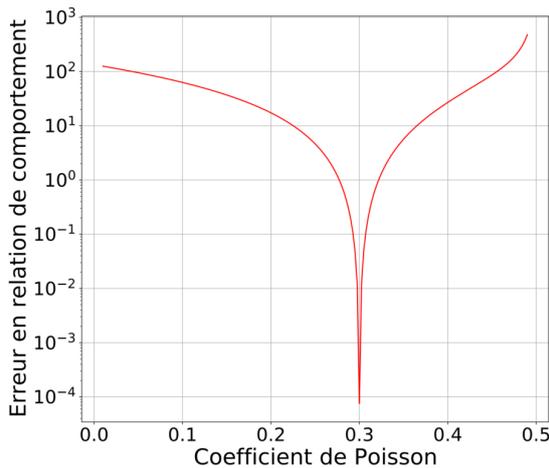


FIGURE 3 – Convexité de l'ERC

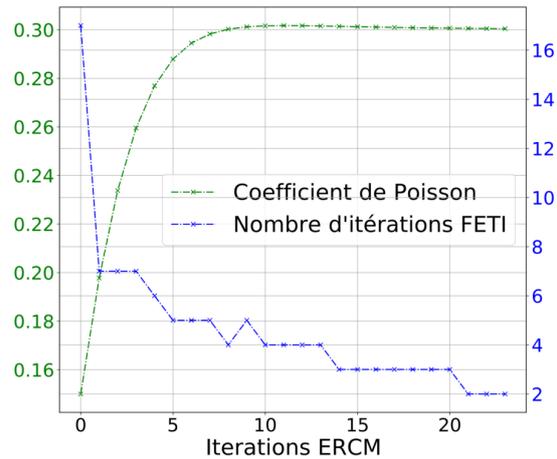


FIGURE 4 – Évolution de l'ERC

La nouvelle formulation de la phase de localisation a été également testée dans le cadre global du recalage. Les résultats obtenus sont très prometteurs comme le montre la Figure 4. D'abord, grâce à la convexité de la fonctionnelle (Figure 3), la méthode arrive bien à trouver les bonnes valeurs des paramètres, cela n'est pas nouveau mais valide au moins cette nouvelle formulation.

Le résultat important concerne la résolution du système linéaire de la phase de localisation, à noter que plus l'algorithme avance moins d'itérations sont nécessaires pour résoudre ce système (Figure 4). Cela est atteint grâce à l'initialisation de la méthode itérative par la solution à l'itération précédente. Puisque la seule chose qui change entre deux itérations est la valeur du jeu de paramètres, une corrélation est remarquée entre le taux de ce changement et le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système linéaire. Plus ce taux est petit, moins d'itérations sont nécessaires. Cela est particulièrement le cas quand la méthode de recalage approche du minimum, les pas de la méthode de descente deviennent de plus en plus petits et parfois une à deux itérations sont suffisantes pour résoudre le système linéaire. Cela peut être également utilisé dans chaque itération du recalage pour optimiser la phase de localisation pour une bande de fréquences.

## 4 Conclusion

Une amélioration du recalage en dynamique par l'erreur en relation de comportement a été présentée dans ce travail. Elle consiste à reformuler la phase de localisation très coûteuse de cette méthode par décomposition de domaine. La technique apporte beaucoup d'efficacité à l'algorithme du recalage, car en plus de ses avantages classiques, elle permet de se passer de l'assemblage global du système linéaire de la phase de localisation, seules les sous-domaines dont les paramètres ont changé doivent le faire localement. De plus, grâce à la stratégie d'initialisation proposée, la résolution itérative de ce système est remarquablement améliorée. À noter que cette formulation n'est pas encore équipée de problème grossier, d'où le choix de ne pas présenter des résultats de scalabilité. Des recherches sont en cours pour utiliser *GenEO* ou des solveurs multipréconditionnés, cela permettra de rendre la méthode très efficace numériquement. La décomposition de domaine apporte également une grande flexibilité au recalage. Il est possible par exemple de changer le modèle au niveau d'un sous-domaine sans surcoût.

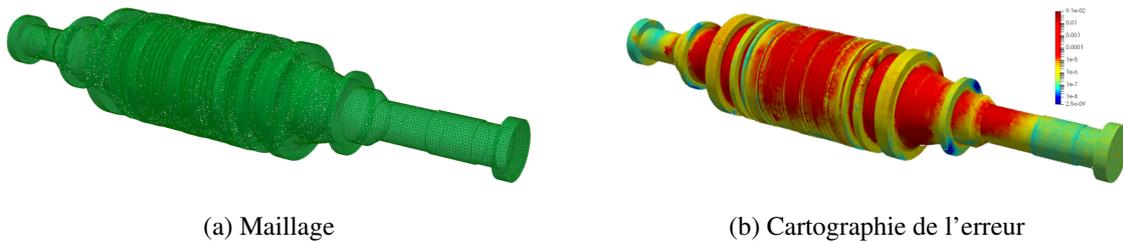


FIGURE 5 – Turbine d'alternateur de centrale nucléaire

La nouvelle formulation rend la méthode plus adaptée aux problèmes industriels, c'est dans ce cadre qu'il faudra donc la tester. Pour cela, une implémentation est en cours dans *Code\_Aster* qui est un solveur éléments finis développé par *EDF R&D*; les résultats correspondants seront montrés dans la présentation en prenant l'exemple du recalage du modèle dynamique d'une turbine d'alternateur (Figure 5).

## Références

- [1] A. Tarantola. *Inverse problems theory and methods for model parameter estimation*. SIAM, 2005
- [2] B. Banerjee, T. F. Walsh, W. Aquino, and M. Bonnet. *Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013
- [3] C. Farhat, J. Mandel. *The two-level FETI method for static and dynamic plate problems. I. An optimal iterative solver for biharmonic systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1998; 155(1-2) :129–151
- [4] D. Drucker. *On the postulate of stability of material in the mechanics of continua*. Journal de Mécanique, 1964
- [5] D. Jiang and H. Feng. *Domain decomposition methods for recovering robin coefficients in elliptic and parabolic systems*. Computational Methods in Applied Mathematics, 2017
- [6] F. Magoulès and F.-X. Roux. *Lagrangian formulation of domain decomposition methods : A unified theory*. Applied Mathematical Modelling, 2006.
- [7] J.E. Dennis and R.M. Lewis. *A comparison of nonlinear programming approaches to an elliptic inverse problem and a new domain decomposition approach*. Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, 1994.
- [8] N. Spillane and D.J. Rixen. *Automatic spectral coarse spaces for robust FETI and BDD algorithms*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 95(11) :953–990, 2013
- [9] N. Spillane, V. Dolean, P. Hauret, F. Nataf, C. Pechstein, R. Scheichl. *Abstract robust coarse spaces for systems of PDEs via generalized eigenproblems in the overlaps*. Numerische Mathematik 2014; 126(4) :741–770
- [10] P. Gosselet and C. Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2006.
- [11] P. Ladevèze and D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and applications*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1983
- [12] P. Ladevèze and J.-P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Mechanical Engineering Series, 2005