

# Assimilation de données variationnelle et hybride pour le contrôle thermique en temps réel du procédé de fabrication additive

W. Haik<sup>1,2</sup>, Y. Maday<sup>1,3</sup>, L. Chamoin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL), Sorbonne-Université, {willy.haik,yvon.maday}@sorbonne-universite.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT), ENS Paris-Saclay, {willy.haik,ludovic.chamoin}@ens-paris-saclay.fr

<sup>3</sup> Institut Universitaire de France (IUF)

**Résumé** — La surveillance en temps réel d'un système peut être difficile si les phénomènes qui se produisent sont multi-physiques et multi-échelles comme c'est le cas de la fabrication additive. L'utilisation d'un modèle paramétrique simplifié peut subvenir à diminuer la complexité numérique mais engendre une erreur de modèle. Nous étudions ici une méthode d'assimilation de données variationnelle hybride pour estimer rapidement la température au cours du procédé de fabrication additive tout en corrigeant le biais de modèle. Cette méthode permet d'intégrer la physique non modélisée à partir des données afin de prédire efficacement les états futurs du système.

**Mots clés** — assimilation de données, modélisation hybride, équations aux dérivées partielles paramétriques, réduction de modèle.

## 1 Introduction

On s'intéresse à l'estimation d'état qui est une tâche spécifique de l'assimilation de données pour laquelle la quantité d'intérêt est l'état  $u_{ref}$  du système physique observé sur un domaine d'intérêt espace-temps  $\Omega \times I$ , avec  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  et  $I = [0; T]$ . Pour cela, des capteurs permettent d'observer le système étudié en fonction de la fréquence d'échantillonnage des acquisitions des mesures, et on s'appuie sur un modèle mathématique paramétrique qui essaie de représenter au mieux toutes les évolutions possibles du comportement physique du système. Cependant, quelle que soit la qualité du modèle (description multi-physique, multi-échelle...) ce n'est qu'une représentation erronée de la réalité ; le modélisateur peut par exemple négliger un phénomène physique. Ainsi, l'utilisation d'un modèle dans le contexte de l'estimation d'état ou de recalage doit être couplé à un enrichissement du modèle par les données afin de rester fidèle à la réalité physique.

Le cas de la fabrication additive est particulièrement intéressant pour cette problématique, notamment le procédé SLM (*Selective Laser Melting*). En effet, il s'agit d'un procédé de fabrication rapide sur lit de poudre dans lequel des pièces sont construites par fusion sélective de couches de poudre métallique à l'aide d'une source laser. Lors de l'absorption du rayonnement laser, les particules de poudre s'échauffent et après fusion et solidification, la structure solide désirée se forme. Ce procédé est donc complexe puisque différents phénomènes physiques entrent en jeu : métallurgie, thermique, mécanique (solide et fluide). Par ailleurs, de par la taille macroscopique de la pièce (quelques *cm*) vis-à-vis du rayon de la source thermique (quelques  $\mu m$ ), le procédé est multi-échelle. La modélisation de ce procédé est donc complexe et sa résolution nécessite des coûts de calcul conséquents incompatibles avec une perspective de temps réel. C'est une difficulté vis-à-vis du paradigme *Dynamic Data Driven Application Systems* (DDDAS) introduit par Darema [1] et dans lequel on se place, qui vise à donner un cadre de simulation capable de résoudre des problèmes mathématiques complexes représentant un phénomène physique sous la contrainte du temps réel. Ce paradigme introduit une procédure capable de procéder à l'assimilation de données et la modélisation basée sur les données, et un mécanisme de contrôle pour adapter le modèle aux évolutions de l'environnement.

L'objectif du travail est de proposer une méthode variationnelle pour l'assimilation de données avec les caractéristiques suivantes :

- intégration d'une méthode de réduction de modèle (ROM) [2] afin d'avoir une phase *online* efficace permettant un traitement des données en temps réel et par conséquent une surveillance

rapide du procédé,

- correction de la physique non modélisée ou des incertitudes imprévues et non paramétriques à partir des mesures sur le système permettant d’enrichir le modèle mathématique déficient. Le modèle devient alors un jumeau hybride [3].

La méthode *Parameterized Background Data Weak* (PBDW) [4, 5, 6, 7] répond à la problématique précédente. L’originalité de cette méthode est la prise en compte des incertitudes paramétriques anticipées par le modèle mais aussi des incertitudes non anticipées avec un terme correctif. Cette méthode présente un algorithme non-intrusif en deux étapes : (1) une phase *offline* dans laquelle le modèle réduit est construit à partir d’un ensemble de solutions paramétriques générés par des calculs coûteux et (2) une phase *online* très rapide dans laquelle les données expérimentales acquises séquentiellement sont traitées pour reconstruire l’état du système sur le domaine d’intérêt  $\Omega$ .

Ainsi, l’utilisation de la PBDW pour le suivi du procédé de fabrication additive semble adaptée. En effet, deux points sont intéressants : (1) la possibilité d’utiliser un modèle simplifié pour décrire grossièrement le comportement thermique car celui-ci sera corrigé au cours du temps et (2) une estimation rapide du champ de température au cours du temps malgré des vitesses d’avance de la source thermique relativement élevées (de l’ordre de  $1\text{ m/s}$ ).

Pendant, la méthode PBDW a été développée dans un cadre stationnaire, il faut donc l’étendre aux problèmes avec évolution temporelle.

## 2 Extension de la PBDW pour des problèmes avec évolution temporelle

### 2.1 Hypothèses et notations

Le cadre de cette étude s’intéresse aux problèmes avec évolution temporelle. On considère l’espace lipschitzien  $\Omega \in \mathbb{R}$ , et on introduit l’espace Hilbertien  $\mathcal{U}$  défini sur  $\Omega$  tel que  $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{U} \subset H_1(\Omega)$  auquel on associe le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et la norme  $\|\cdot\|_{H_1(\Omega)}$ . On se munit d’un intervalle de temps fini  $I = [0; T]$  avec  $T > 0$  ainsi qu’une discrétisation temporelle uniforme :  $0 = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_K = T$ , avec  $(K + 1)$  points temporels distincts de  $I$  et  $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ .

On considère un ensemble de  $M$  mesures expérimentales à chaque acquisition. Au pas de temps  $t = t_k$ , le jeu de données est alors décrit par :

$$y_m^k = l_m(u_{ref}^k) + \epsilon_m^k \quad 1 \leq m \leq M$$

où  $l_m$  est la fonctionnelle d’observation des capteurs traduisant le comportement diffus de la mesure et  $\{\epsilon_m^k\}_{m=1}^M$  traduit le bruit de mesure.

On a à disposition un modèle mathématique paramétrique (mp) qui est capable de décrire la physique du système étudié :  $G^{mp, \mu}(u^{mp}(x, t, \mu)) = 0$ , avec  $\mu$  l’ensemble des paramètres incertains du modèle appartenant à  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$ . On suppose que  $u^{mp}(x, t, \mu) \in \mathcal{U}$ .

### 2.2 Formulation et procédure de calcul

#### 2.2.1 Formulation du problème

L’objectif est d’estimer l’état réel  $u_{ref}(\mu) \in \mathcal{U}$  du système physique étudié pour une configuration paramétrique  $\mu \in \mathcal{D}$  donnée. On dispose d’un modèle paramétrique qui ne décrit pas parfaitement tous les phénomènes physiques associés au système. Ainsi,  $u_{ref}(\mu) \in \mathcal{U}$  n’appartient pas à la variété des solutions paramétriques  $\mathcal{M}^{mp} = \{u^{mp}(\mu) | \mu \in \mathcal{D}\}$ .

L’idée est donc de chercher l’état  $u_{ref}$  comme une somme entre une estimation  $z$  obtenue par le modèle et une correction  $\eta$ . Cela amène la décomposition suivante :  $u_{N, M} = z_{N, M} + \eta_{N, M}$ . Le premier terme  $z_{N, M} \in \mathcal{Z}_N$  est l’approximation de rang  $N$  de la solution  $u_{ref}$ , tandis que le second terme  $\eta_{N, M} \in \mathcal{U}_M$  est le champ correctif associé aux  $M$  mesures expérimentales. On suppose avoir la relation  $N < M$ . Le cas idéal est donc l’accès à un grand nombre de données ce qui permet d’avoir une description fine du modèle et des phénomènes physiques négligés.

La formulation de la PBDW pour un nombre limité d’observations bruitées passe par la minimisation d’une fonction coût qui comprend l’écart aux mesures et l’erreur de modèle. Elle consiste, pour tout

$k \in \mathcal{K}$ , à trouver  $(z_{N,M}^k, \eta_{N,M}^k) \in \mathcal{Z}_N \times \mathcal{U}_M$  tel que :

$$\begin{cases} (z_{N,M}^k, \eta_{N,M}^k) = \underset{\substack{z \in \mathcal{Z}_N \\ \eta \in \mathcal{U}_M}}{\operatorname{arginf}} \left( \xi \|\eta\|^2 + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \|l_m(z + \eta) - y_m^k\|_2^2 \right) \\ u_{N,M}^k = z_{N,M}^k + \eta_{N,M}^k \end{cases} \quad (1)$$

avec le paramètre de régularisation déterminé par  $\xi = \underset{\xi \in \mathbb{R}}{\operatorname{arginf}} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( y_m^k - l_m(u_{N,M}^{k,\xi}) \right)^2$ .

### 2.2.2 Construction de l'espace lié au modèle

L'estimation par le modèle  $z_{N,M}^k$  au pas de temps  $t = t_k$  appartient à l'espace  $\mathcal{Z}_N$  qui peut être généré par un substitut linéaire de la variété des solutions paramétriques  $\mathcal{M}^{mp} = \{u_{mp}(t)(\mu) | \mu \in D, \forall t \in I\}$ , dans une phase *offline*. L'objectif est de chercher  $N$  modes réduits  $\zeta_n$  de sorte que  $\mathcal{Z}_N = \operatorname{span} \{\zeta_n\}_{n=1}^N$ . Cet espace est construit de façon à être indépendant du temps.

On s'appuie sur une décomposition tensorielle basée sur la méthode *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [8]. Cette technique de réduction de modèle est basée sur une séparation de variables de manière à représenter le champ comme une somme de contributions espace/temps/paramètres :

$$T(x, t, \mu) \sim T_N(x, t, \mu) = \sum_{n=1}^N \left( \sum_{p=1}^P \lambda_n^p(t) \alpha_n^p(\mu) \right) \bar{\zeta}_n(x) \quad (2)$$

avec  $\mathcal{Z}_N = \left\{ \bar{\zeta}_n \right\}_{n=1}^N$  l'espace lié au modèle souhaité qui est une base orthonormale.

Cette décomposition est obtenue par un double algorithme glouton du point fixe associé à une ortho-normalisation de Gram-Schmidt.

### 2.2.3 Construction de l'espace de correction

L'espace de correction  $\mathcal{U}_M$  est construit à partir des informations données par les fonctionnelles d'observation des capteurs ainsi que les représentants de Riesz associés :  $\mathcal{U}_M = \{q_m = \mathcal{R}_{\mathcal{U}} l_m\}_{m=1}^M$ . Pour rappel, le représentant de Riesz est défini tel que pour chaque fonctionnelle linéaire  $l \in \mathcal{U}'$  ( $\mathcal{U}'$  est le dual de  $\mathcal{U}$ ) on a  $(\mathcal{R}_{\mathcal{U}} l, v) = l(v) \forall v \in \mathcal{U}$ . La construction de cet espace est illustrée dans la Section 3.2.2.

### 2.2.4 Formulation algébrique de la PBDW

Pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , à partir des champs  $z_{N,M}^k$  et  $\eta_{N,M}^k$  qui appartiennent respectivement à  $\mathcal{Z}_N = \operatorname{span} \{\zeta_n\}_{n=1}^N$  et  $\mathcal{U}_M = \operatorname{span} \{q_m\}_{m=1}^M$ , on introduit les vecteurs  $a^k \in \mathbb{R}^N$  and  $b^k \in \mathbb{R}^M$  tels que :

$$z_{N,M}^k = \sum_{n=1}^N a_n^k \zeta_n \quad \eta_{N,M}^k = \sum_{m=1}^M b_m^k q_m$$

On introduit alors les matrices :  $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^{M,N}$ ,  $\mathbb{L}_{i,j} = l_i(\zeta_j) = (q_i, \zeta_j)$  et  $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{M,M}$ ,  $\mathbb{K}_{i,j} = (q_i, q_j)$ .

Le problème (1) est défini comme la version linéaire de la PBDW. La traduction algébrique est alors : pour tout  $k \in \mathcal{K}$  trouver  $(a^k, b^k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  tel que :

$$(a^k, b^k) = \underset{\substack{a \in \mathbb{R}^N \\ b \in \mathbb{R}^M}}{\operatorname{arginf}} \left( \xi \left\| \sum_{m=1}^M b_m q_m \right\|^2 + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| l_m \left( \sum_{n=1}^N a_n \zeta_n + \sum_{m=1}^M b_m q_m \right) - y_m^k \right\|_2^2 \right) \quad (3)$$

Ce problème de minimisation peut être réécrit en différenciant la fonction coût : pour tout  $k \in \mathcal{K}$  trouver  $(a^k, b^k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  :

$$\begin{bmatrix} \xi M \mathbb{1} + \mathbb{K} & \mathbb{L} \\ \mathbb{L}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^k \\ b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système est de taille relativement petite, sa résolution peut donc être réalisée sous la contrainte du temps réel. Par ailleurs, on peut remarquer que la deuxième ligne de (2.2.4) prouve l'orthogonalité entre le champ correctif  $\eta_{N,M}$  et l'espace du modèle  $\mathcal{Z}_N$ .

La version précédente de la PBDW utilise un modèle implicite. Il peut être utile de souhaiter avoir accès à la valeur du jeu de paramètres. Pour cela, on peut exploiter la structure de la réduction de modèle donnée par (2) : pour tout  $k \in \mathcal{K}$  trouver  $(\mu^k, b^k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$  tel que :

$$(\mu^k, b^k) = \underset{\substack{\mu \in \mathbb{R} \\ b \in D}}{\operatorname{argmin}} \left( \xi \left\| \sum_{m=1}^M b_m q_m \right\|^2 + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| l_m \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n(t_k) \alpha_n(\mu) \zeta_n + \sum_{m=1}^M b_m q_m \right) - y_m^k \right\|_2^2 \right) \quad (4)$$

La formulation algébrique devient alors un problème en deux phases :

$$\begin{cases} \mu^k = \min_{\mu \in D} \left( \frac{1}{2} a^t (\mathbb{L}^t \mathbb{W} \mathbb{L}) - a^t \mathbb{L}^t \mathbb{W} y^k \right) & \text{avec } a_n = \sum_{p=1}^P \lambda_n^p(t_k) \alpha_n^p(\mu) \\ b^k = \mathbb{W} (y^k - \mathbb{L} a^k) \end{cases}$$

### 2.2.5 Formulation avec enrichissement de modèle

On s'intéresse maintenant à une stratégie qui intègre systématiquement la physique non modélisée qui est identifiée par les précédents champs correctifs de façon à enrichir l'espace lié au modèle. L'objectif est de pouvoir diminuer le nombre d'observations des pas de temps futurs de façon à diminuer le coup de calcul de la phase *online*. L'idée est d'appliquer la PBDW (2.2.4) avec un espace lié au modèle enrichi  $Z_{N+N_e}^{aug} = \{Z_N, \mathcal{E}_{N_e}^k\}$ . L'espace d'enrichissement  $\mathcal{E}_{N_e}^k$  est calculé à partir d'une *Singular Value Decomposition* (SVD) des précédents termes correctifs afin d'en extraire la partie spatiale. Afin d'éviter un temps de calcul croissant au fur et à mesure des pas de temps d'acquisition, on utilise l'algorithme *Sequential Karhunen Loeve* (SKL) [9] permettant le calcul de la SVD à partir du résultat du pas de temps précédent, ce qui garantit un coût numérique constant.

La PBDW enrichie se formule donc : trouver  $(u_{N,M}^k, z_{N,M}^k, e_{N,M}^k, \eta_{N,M}^k) \in \mathcal{U} \times Z_N \times \mathcal{E}_{N_e}^k \times \mathcal{U}_M$  tel que :

$$\begin{cases} (z_{N,M}^k, e_{N,M}^k, \eta_{N,M}^k) = \underset{\substack{z \in Z_N \\ e \in \mathcal{E}_{N_e}^k \\ \eta \in \mathcal{U}_M}}{\operatorname{argmin}} \xi \|\eta\|^2 + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \|l_m(z + e + \eta) - y_m^k\|_2^2 \\ u_{N,M}^k = u_{N,M}^k + e_{N,M}^k + \eta_{N,M}^k \end{cases} \quad (5)$$

Par ailleurs, ces modes enrichis peuvent être utilisés dans l'algorithme *Stability-Approximation* afin de choisir les capteurs qui permettent de décrire au mieux le biais de modèle.

## 3 Application sur le procédé de fabrication additive

Dans cette section, quelques résultats numériques pour l'estimation de l'état thermique d'une pièce au cours de son procédé de fabrication par fusion sur lit de poudre métallique sont présentés.

### 3.1 Modélisation du comportement thermique au sein d'une couche

On s'intéresse à la problématique thermique associée à la fusion d'une couche de poudre métallique. La figure 1 illustre brièvement les phénomènes physiques divers qui rentrent en jeu. Le laser apporte une quantité d'énergie thermique très localisée de façon à faire fondre la poudre.

On étudie le problème plan de la couche en cours de fabrication. La vitesse d'avance du laser et sa trajectoire complète sont supposées connues. Le champ de température est piloté par la conductivité de la poudre métallique qui traduit un comportement adiabatique. La méthode PBDW autorise à choisir un modèle simplifié, c'est pourquoi un problème de conduction avec un comportement homogène et linéaire pour la poudre est choisi, sans prendre en compte les changements de phase de la matière. Pour le choix de notre modèle, la convection et la radiation sont également négligées.

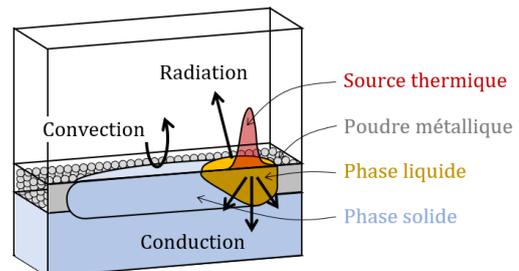


FIGURE 1 – Phénomènes physiques en SLM

Le modèle choisi est donc extrêmement simplifié et ne représente pas parfaitement le comportement multi-physique et multi-échelle réel. On s'appuie sur la PBDW afin de corriger ce modèle biaisé.

### 3.1.1 Construction du modèle biaisé

L'espace  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  est considéré comme étant la couche en cours de fusion, on introduit l'espace Hilbertien  $\mathcal{U}$  défini sur  $\Omega$  auquel on associe le produit scalaire  $(.,.)$  associé à la norme  $\|.\| = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . On cherche donc le champ de température  $T(x, t, \sigma)$  avec  $x \in \Omega$ ,  $t \in I = [0, T]$  et  $\sigma \in D$  défini par une équation de diffusion avec une source thermique mobile extrêmement concentrée :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t, \sigma) = \vec{\nabla} \left( \lambda \vec{\nabla} T(x, t, \sigma) \right) + r(x_r(t), \sigma)$$

avec  $(\rho, c, \lambda)$  les paramètres thermiques de la poudre et  $r$  la source thermique modélisant l'action du laser comme une gaussienne :

$$r(x_r(t), y_r(t), \sigma) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{2\|x - x_r(t)\|_2^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

avec  $R$  la puissance du laser,  $x_r(t)$  la trajectoire au cours du temps et enfin  $\sigma$  le rayon.

Ce rayon a une grande influence sur la forme et la dimension du bain de fusion qui va ensuite se solidifier pour former la pièce souhaitée. La connaissance de sa valeur est donc une donnée très importante lors de la modélisation. Cependant, il se peut qu'il ne soit pas parfaitement connu, notamment au niveau du bord du domaine de construction. En effet, le laser est piloté par un ensemble de miroirs, toutefois la distance entre ces miroirs et le lit de poudre est variable selon la trajectoire du laser, et cela engendre donc des variabilités sur le rayon de la source thermique.

### 3.1.2 Construction des mesures simulées avec le modèle parfait

Les données expérimentales sont simulées à l'aide d'un modèle plus complexe [10] qui prend en compte les changements de phase. On le considère dans la suite de cette étude comme le modèle représentant parfaitement la réalité. On cherche donc le champ de température  $T(x, t, \sigma)$  avec  $x \in \Omega$ ,  $t \in I = [0, T]$  et  $\sigma \in D$  défini par :

$$\rho(T, \phi) \frac{\partial H}{\partial t}(x, t, \sigma) = \vec{\nabla}(\lambda(T, \phi) \vec{\nabla} T(x, t, \sigma)) + r(x_r(t), \sigma)$$

avec  $\phi$  la grandeur donnant la phase du matériau (0 pour la poudre et 1 pour liquide ou solide) et  $H$  l'enthalpie dont l'évolution en fonction de la température est définie à partir de la chaleur latente  $H_f$  qui caractérise le changement de phase isotherme du matériau (avec  $T_f$  la température de fusion) :

$$H = \begin{cases} c_p T & T \leq T_f \text{ et } \phi = 0 & \text{poudre} \\ c_s T & T \leq T_f \text{ et } \phi = 1 & \text{phase solide} \\ c_l T + H_f & T \geq T_f & \text{phase liquide} \end{cases}$$

## 3.2 Etude de la phase *offline*

### 3.2.1 Construction du modèle réduit

La première étape de la phase *offline* est la construction du modèle réduit espace/temps/paramètres. La grande difficulté ici est la non-séparabilité à l'échelle globale des variables espace/temps étant donné le caractère convectif de la source mobile [11]. Ainsi, pour avoir une réduction efficace il est nécessaire de post-traiter l'ensemble des solutions paramétriques de manière à diminuer l'épaisseur de Kolmogorov. Le cas d'une trajectoire rectiligne supposée parfaitement connue est étudié. On propose une étape en amont de la méthode de réduction de modèle de manière à supprimer la partie convective. Pour cela, on définit la transformation géométrique  $\gamma$ , que l'on souhaite  $C^1$ , de telle sorte que l'image de la longueur du trajet du laser soit la même pour chaque instant :

$$\begin{cases} \gamma(x_r(0) - \delta) = x_r(0) - \delta \\ \gamma(x_r(t) + \delta) = x_a \end{cases}$$

avec  $x_a$  une position fixe dans l'espace indépendante du temps, ici  $x_a = 3L/4$ , et  $\delta$  un écart donné, ici  $\delta = L/30$ .

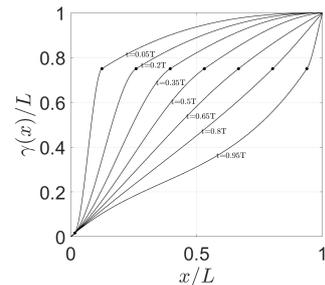


FIGURE 2 – Transformation  $\gamma$

En définissant la transformation  $\gamma$  comme une spline cubique hermitienne, illustrée avec la Figure 2, celle-ci respecte les conditions précédentes. La Figure 3 illustre cette transformation géométrique pour deux pas de temps différents.

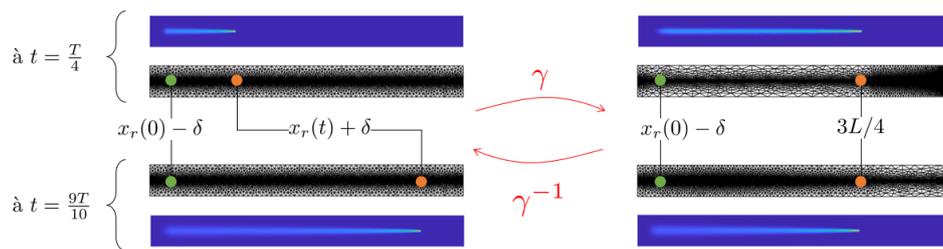


FIGURE 3 – Transformation géométrique  $\gamma$

La Figure 4 permet de comparer l'influence de la transformation géométrique sur la réduction de modèle. Pour rappel, on note  $\mathcal{M}^{mp}$  le tenseur qui regroupe l'ensemble des solutions paramétriques du modèle biaisé, c'est ce tenseur que l'on souhaite représenter sous la forme d'un produit de modes espace/temps/paramètres.

La courbe bleue est associée à la réduction de ce tenseur sans transformation de modèle  $\mathcal{M}^{mp} \rightarrow (\zeta_n, \lambda_n, \alpha_n)$  tandis que la courbe rouge est associée à la réduction de la transformation géométrique de ce tenseur  $\gamma(\mathcal{M}^{mp}) \rightarrow (\zeta_n, \lambda_n, \alpha_n)$ . On remarque que l'ajout d'une étape de pré-traitement du tenseur rend la réduction beaucoup plus efficace, notamment cela permet de prendre dix fois moins de modes pour une même erreur de réduction. Enfin, la courbe jaune présente la réduction du tenseur en utilisant la transformation géométrique inverse sur les modes spatiaux  $\mathcal{M}^{mp} \rightarrow (\gamma^{-1}(\zeta_n), \lambda_n, \alpha_n)$ . Pour cette dernière courbe, l'erreur est fortement liée à l'erreur d'interpolation qui n'est pas négligeable pour un nombre de modes importants.

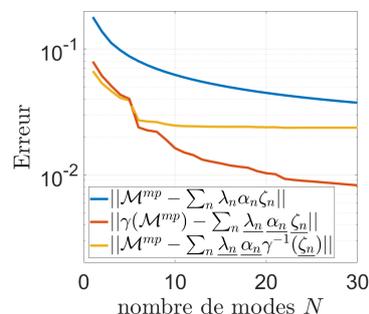


FIGURE 4 – Erreur de réduction

### 3.2.2 Choix des points de mesures

La deuxième étape de la phase *offline* est la construction de l'espace d'observation  $\mathcal{U}_M$ . Cet espace passe par la sélection des capteurs les plus pertinents à partir d'une librairie de candidats possibles. La taille de la librairie est dépendante de la résolution de la caméra. On considère une caméra thermique ayant une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz. Les pas de temps d'échantillonnage sont notés  $t_e$ . Selon la qualité du matériel de mesure, les observations peuvent être plus ou moins bruitées. En effet, la difficulté est de pouvoir mesurer une grande plage de température. Pour notre problème numérique le bruit de mesure  $\varepsilon$  est pris de l'ordre de 5%.

Étant donné la construction du modèle réduit, il est possible d'extraire un nombre donné de points de mesure à l'aide de l'algorithme *Stability-Approximation* [4, 6], illustré sur la Figure 5. Ainsi, l'objectif est de choisir les  $M$  positions de capteurs les plus pertinentes  $\mathcal{X} = \{x_m\}_{m=1}^M$  parmi un ensemble de candidats.

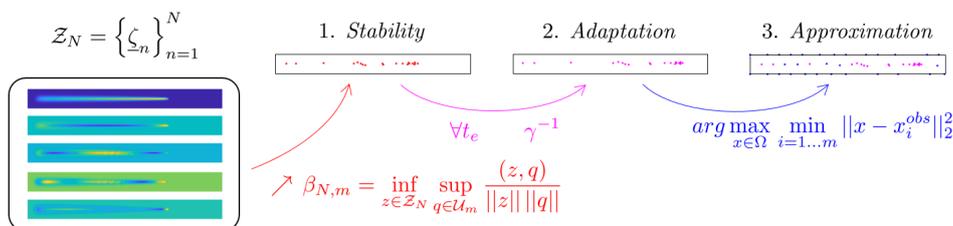


FIGURE 5 – Illustration de l'algorithme *Stability-Adaptation-Approximation*

Cet algorithme choisit de manière gloutonne les capteurs en trois étapes. Dans un premier temps (*Stability*), il s'agit de maximiser la constante  $\beta_{N,M} = \inf_{z \in \mathcal{Z}_N} \sup_{q \in \mathcal{U}_M} \frac{(z, q)}{\|z\| \|q\|}$  jusqu'à un critère donné. Cette étape permet de choisir les capteurs qui permettent de représenter au mieux les variations paramétriques

du modèle données par l'espace  $Z_N$ . A cette étape on associe un post-traitement des coordonnées de capteurs obtenues afin d'adapter les points de mesure pertinents pour chaque pas de temps d'échantillonnage qui seront utilisés pour l'estimation de la température. Pour cela l'application de la transformation géométrique inverse  $\gamma^{-1}$  permet de prendre en compte la position du laser. Dans un troisième temps (*Approximation*), l'objectif est de minimiser l'erreur d'approximation induite par les espaces non décrits par les capteurs préalablement sélectionnés. C'est donc un problème dit d'installation. Cela a pour but de pouvoir décrire du mieux possible des physiques non anticipées par le modèle, de façon à ce que le champ correctif  $\eta_{N,M}$  représente au mieux le biais de modèle.

### 3.3 Résultats numériques

On étudie la fabrication d'une ligne d'une longueur de  $18\text{mm}$  pour une vitesse d'avance du laser de  $v = 1\text{m/s}$ . Les mesures sont simulées avec le modèle prenant en compte les changements de phase pour une valeur de rayon du laser égal à  $\sigma = 50\mu\text{m}$ . La figure 6 illustrent les différents champs calculés par la PBDW ainsi que la différence par rapport à la solution parfaite.

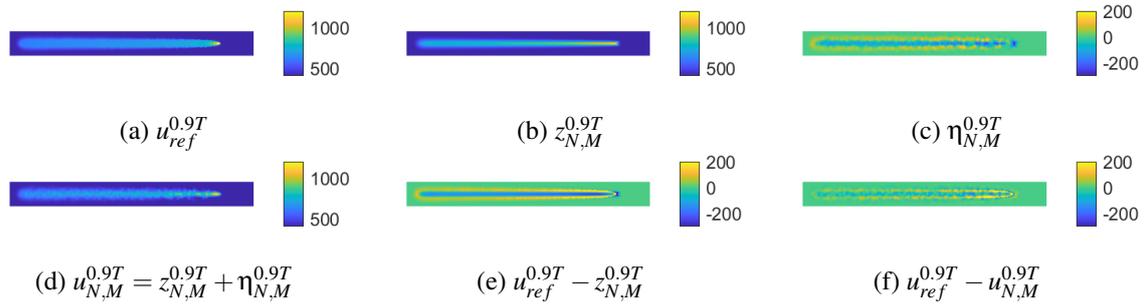


FIGURE 6 – Illustration des estimations d'état avec la PBDW pour  $N = 10$  et  $M = 500$  pour le pas de temps  $t = 0.9T$

La solution de référence  $u_{ref}$  présente un fort gradient de température au niveau de la séparation entre la phase liquide/solide et la poudre, cela est dû au caractère adiabatique de cette dernière. Ce front de température n'est pas une évolution possible avec le modèle homogène, il est donc nécessaire de le corriger. Ainsi, on peut observer la forte influence du champ correctif  $\eta_{N,M}^k$  qui permet de rendre l'erreur d'estimation par le modèle beaucoup plus homogène. Ici, il est nécessaire d'avoir une bonne description par l'espace d'observation, i.e. un grand nombre de capteurs pour représenter le biais de modèle très localisé. Pour illustrer les évolutions des erreurs, on introduit les grandeurs suivantes :

$$E_z^k = \frac{\|u_{ref}^k - z_{N,M}^k\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{ref}^k\|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{et} \quad E_u^k = \frac{\|u_{ref}^k - u_{N,M}^k\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{ref}^k\|_{L^2(\Omega)}}$$

$E_z^k$  représente l'erreur relative de l'estimation par le modèle tandis que  $E_u^k$  représente l'erreur relative de la solution PBDW avec la correction prise en compte.

Les Figures 7(a, b, c) illustre les évolutions des erreurs  $E_u$  et  $E_z$  au cours du temps. Sur la Figure 7(a), on peut observer à nouveau l'influence de la correction qui joue un rôle significatif pour estimer l'état malgré un modèle biaisé. L'erreur d'estimation  $E_z$  est donc bien inférieure à l'erreur de modèle qui est prédominante. La Figure 7(b) permet de comparer les deux formulations de la PBDW, avec d'un côté l'utilisation d'un modèle implicite qui ne retranscrit que les évolutions paramétriques de ce modèle et de l'autre côté un modèle explicite qui passe par une identification paramétrique du jeu de paramètres inconnus. Pour le cas étudié, le modèle présente un très fort biais, ainsi l'identification du jeu de paramètres est limitée par les variations paramétriques sur le domaine d'admissibilité et donc la valeur du jeu de paramètres identifiée est trop éloignée de la réalité. C'est pourquoi, dans le cas étudié, la formulation explicite n'offre pas de meilleurs résultats comparés à la formulation implicite. Enfin, la Figure 7(c) illustre l'enrichissement séquentiel du modèle biaisé permettant de diminuer l'erreur d'estimation.

Ici, chaque pas de temps d'échantillonnage nécessite un temps de traitement et de calcul de l'ordre de  $1.5\text{s}$  avec une machine  $2.6\text{GHz}$  intel core i7 sans parallélisation. Le temps réel n'est donc pas directement accessible pour le cas du suivi microscopique d'un cordon. Cependant, il est possible de diminuer

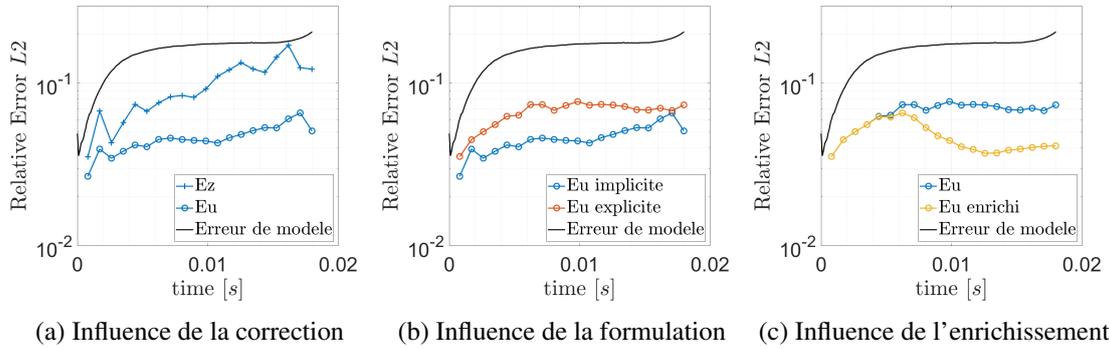


FIGURE 7 – Évolution des erreurs relatives au cours du temps pour  $N = 10$  et  $M = 500$

drastiquement le coût de calcul en diminuant le nombre de points de mesure mais aussi en choisissant des fonctions de forme pour la construction de l'espace d'observation plus adaptées.

## 4 Conclusion

Dans ce papier, la méthode PBDW a été étendue à des problèmes avec évolution temporelle. A partir d'un modèle biaisé et de mesures bruitées, il est possible de reconstruire l'état du système. Deux formulations ont été présentées et comparées sur un exemple de construction microscopique d'un cordon pour le procédé de fabrication additive. Le rôle fondamental du champ de correction a été illustré et l'enrichissement séquentiel du modèle est prometteur, cela amène donc à une modélisation hybride du système. L'objectif à terme est d'exploiter la méthode PBDW sur des mesures réelles obtenues par une caméra thermique au cours du procédé de fabrication. Ainsi, la validation de la méthode sera associée à un contrôle macroscopique en temps réel de la température. Ces résultats seront illustrés lors de la conférence.

## Références

- [1] F. Dardema. *Dynamic Data Driven Applications Systems : A New Paradigm for Application Simulations and Measurements*, Springer Berlin Heidelberg, Computational Science - ICCS 2004, 2004.
- [2] P. Benner, S. Grivet-Talocia, A. Quarteroni, G. Rozza, W. Schilers. *Volume 2 Snapshot-Based Methods and Algorithms*, De Gruyter, 2020.
- [3] F. Chinesta, E. Cueto, E. Abisset-chavanne, J. Duval, F. Khaldi. *Virtual, Digital and Hybrid Twins : A New Paradigm in Data-Based Engineering and Engineered Data*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2019.
- [4] Y. Maday, A. Patera, J. Penn, M. Yano. *A parameterized-background data-weak approach to variational data assimilation : formulation, analysis, and application to acoustics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015.
- [5] T. Taddei. *An adaptive parametrized-background data-weak approach to variational data assimilation*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2017.
- [6] Y. Maday, T. Taddei. *Adaptive PBDW approach to state estimation : noisy observations ; user-defined update spaces*, SIAM Journal on Scientific Computing, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
- [7] H. Gong, Y. Maday, O. Mula, T. Taddei. *PBDW method for state estimation : error analysis for noisy data and nonlinear formulation*, SIAM / ASA Journal on Uncertainty Quantification (JUQ), 2019.
- [8] F. Chinesta, P. Ladeveze, E. Cueto *A Short Review in Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2011.
- [9] D. Ross, J. Lim, R. Lin, M. Yang *Incremental Learning for Robust Visual Tracking*, International Journal of Computer Vision, 2008.
- [10] H. Hu, A. Stravos *Mathematical modelling of solidification and melting : a review*, IOP Publishing, 1996.
- [11] B. Favoretto, C.A. de Hillerin, O. Bettinotti, V. Oancea, A. Barbarulo *Reduced order modeling via PGD for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019.