

Méthode adaptative de réduction de modèles par sous-structuration en présence de variabilité géométrique et d'incertitudes paramétriques

J.-M. Mencik¹, N. Bouhaddi²

¹ LaMé, INSA Centre Val de Loire, jean-mathieu.mencik@insa-cvl.fr

² FEMTO-ST, Université de Franche-Comté, noureddine.bouhaddi@univ-fcomte.fr

Résumé — On s'intéresse à la réanalyse rapide de structures constituées de sous-structures sujettes à de la variabilité géométrique et à des incertitudes paramétriques. La variabilité géométrique est introduite en déformant les maillages des sous-structures. Les incertitudes paramétriques concernent des variations locales de la rigidité des sous-structures. Ces variations sont pratiquement rencontrées dans les interfaces. L'idée est de proposer, dans le cadre de la méthode de Craig-Bampton, des matrices de transformation qui soient facilement re-calculables pour modéliser des sous-structures sujettes à ces modifications.

Mots clés — sous-structuration dynamique, interpolation matricielle, méthode d'enrichissement de sous-espaces.

1 Motivation

On s'intéresse au comportement vibratoire de structures composées de sous-structures sujettes à de la variabilité géométrique et à des incertitudes paramétriques. A titre d'exemple, une structure 2D composée de deux parties connectées entre elles par des blocs en caoutchouc (en vert) et des ressorts est illustrée sur la figure 1. La variabilité géométrique est introduite ici pour décrire, par exemple, des imperfections au niveau de la hauteur des interfaces (en vert) entre les deux parties. En outre, les raideurs des ressorts peuvent également être variables et décrites comme des paramètres aléatoires. On propose de partitionner la structure globale en plusieurs sous-structures (par exemple, deux sous-structures pour la figure 1) pour lesquelles la variabilité géométrique peut être gérée de manière indépendante, c'est-à-dire, pour décrire des sous-structures soumises à différents types et niveaux de variabilité. La variabilité géométrique, pour une sous-structure s , est alors introduite au moyen de maillages éléments finis (EF) distordus qui sont générés en faisant varier les positions (x_{j0}^s, y_{j0}^s) des noeuds d'un maillage "nominal" (non-distordu) de la manière suivante [3] :

$$x_j^s = x_{j0}^s + \epsilon_x^s f_x^s(x_{j0}^s, y_{j0}^s) \quad , \quad y_j^s = y_{j0}^s + \epsilon_y^s f_y^s(x_{j0}^s, y_{j0}^s), \quad (1)$$

où ϵ_x^s et ϵ_y^s sont deux paramètres réels variables définis sur $[-\delta^s, \delta^s]$, et $f_x^s(x, y)$ et $f_y^s(x, y)$ sont deux fonctions de forme qui sont supposées être nulles au niveau des interfaces avec les autres sous-structures (par exemple, au niveau de la ligne moyenne des blocs verts sur la figure 1).

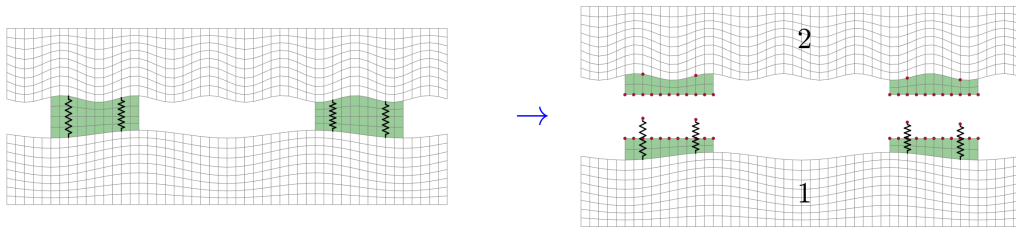


FIGURE 1 – Structure 2D partitionnée en deux sous-structures 1 et 2 avec maillages EF distordus et présentant des incertitudes paramétriques (ressorts de raideurs aléatoires). Les points rouges représentent les DDLs de couplage.

Si l'on suppose, en outre, que les sous-structures sont sujettes à des incertitudes paramétriques, cela revient à considérer que leurs matrices de rigidité ($\mathbf{K}^s$), mais également d'amortissement ($\mathbf{C}^s$) et de masse ($\mathbf{M}^s$), dépendent d'un ensemble de paramètres aléatoires $\mathbf{p}^s$. En considérant des excitations par forces harmoniques $\mathbf{F}^s e^{i\omega t}$, les équations d'équilibre dynamique des sous-structures s'écrivent alors de la manière suivante, dans le domaine fréquentiel :

$$[-\omega^2 \mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s) + i\omega \mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s) + \mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s)] \mathbf{u}^s = \mathbf{F}^s, \quad (2)$$

où $\mathbf{u}^s$ représentent les vecteurs des déplacements des sous-structures ; dans ce cas, $\mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s)$, $\mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s)$ représentent les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, qui doivent ici être associées, pour chaque sous-structure, à un maillage distordu particulier et à un jeu de paramètres particuliers $\mathbf{p}^s$.

Des modèles réduits de sous-structures peuvent être obtenus en considérant la méthode de Craig-Bampton (CB). Dans ce cadre, chaque sous-structure s est décrite à partir de N_B^s degrés de liberté (DDLs) de frontière B (représentant notamment les interfaces avec les autres sous-structures, mais aussi d'autres DDLs comme les excitations ou les déplacements imposés) et N_I^s autres DDLs "internes" I. On introduit alors l'approximation suivante, pour une sous-structure s :

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B^s \\ \mathbf{u}_I^s \end{bmatrix} \approx \tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_B^s \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^s \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_B^s} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{II}^s)^{-1} \mathbf{K}_{IB}^s & \tilde{\mathbf{X}}^s \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où $\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s$ représente la matrice de transformation, $-(\mathbf{K}_{II}^s)^{-1} \mathbf{K}_{IB}^s$ représente la matrice des modes statiques et $\tilde{\mathbf{X}}^s$ représente la matrice réduite des modes à interface fixe (N_{CB}^s vecteurs avec $N_{CB}^s \ll N_I^s$). En projetant, au sens de Galerkin, l'équation (2) sur les vecteurs colonnes de $\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s$, et en supposant que les DDLs internes ne sont pas excités, il vient :

$$[-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) + i\omega \tilde{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) + \tilde{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s)] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_B^s \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B^s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s)$, $\tilde{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\tilde{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s)$ représentent les matrices réduites de masse, d'amortissement et de rigidité, données par :

$$\tilde{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = (\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s)^T \mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s) \tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s, \quad \tilde{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) = (\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s)^T \mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s) \tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s, \quad \tilde{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s) = (\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s)^T \mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s) \tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s. \quad (5)$$

La modélisation d'une structure complète avec n^s sous-structures s'effectue par assemblage des matrices réduites $\tilde{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s)$, $\tilde{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\tilde{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s)$, ce qui est classique.

Notons que la méthode CB est difficile à mettre en oeuvre lorsque les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité des sous-structures sont sujettes à des modifications, ce qui est le cas ici lorsque l'on considère des modifications de maillages (géométrie) ou des modifications paramétriques (incertitudes). Cela sous-entend, en effet, de recalculer pour chaque sous-structure, à chaque modification : (i) la matrice de transformation et donc les matrices des modes statiques et des modes à interface fixe, et (ii) les matrices réduites en effectuant les produits matriciels avec $(\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s)^T$ et $\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s$ dans l'équation (5). Cela peut s'avérer très coûteux en termes de temps de calculs pour effectuer, notamment, des analyses de Monte Carlo. L'idée est ici de répondre à cette problématique en proposant des matrices de transformation qui puissent être rapidement recalculées pour décrire ces changements de sous-structures (variabilité géométrique et incertitudes paramétriques), et qui puissent également limiter le nombre d'opérations matricielles requises dans des analyses de Monte Carlo.

2 Méthode adaptative de réduction de modèles

2.1 Modélisation par interpolation de matrices : variabilité géométrique

On considère le cas de sous-structures sujettes à de la variabilité géométrique, uniquement, qui sont décrites à partir de maillages distordus. Ces maillages sont décrits en faisant varier les positions des noeuds à partir de l'équation (1). On propose ici de décrire les matrices de transformation $\tilde{\mathbf{T}}_{CB}^s$ des sous-structures par interpolation, en évitant ainsi de les calculer explicitement à chaque nouvelle variation de

maillage. L'idée est de calculer ces matrices pour certains points $((\epsilon_x^s)_p, (\epsilon_y^s)_p)$ qui concernent quelques maillages distordus particuliers, et d'estimer les matrices de transformation entre ces points par interpolation pour décrire n'importe quelle distorsion $(\epsilon_x^s, \epsilon_y^s)$. Par exemple, un schéma d'interpolation à huit points et huit fonctions d'interpolation de Serendip peut être utilisé comme proposé dans [3]. Les matrices de transformation des sous-structures s'écrivent alors :

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\text{CB}}^s = \sum_{p=1}^8 N_p(\xi^s, \eta^s) (\widehat{\mathbf{T}}_{\text{CB}}^s)_p, \quad (6)$$

où $N_p(\xi^s, \eta^s)$ représentent les fonctions d'interpolation de Serendip avec $\xi^s = (\sqrt{2}/\delta^s)\epsilon_x^s$ et $\eta^s = (\sqrt{2}/\delta^s)\epsilon_y^s$. D'autre part, $(\widehat{\mathbf{T}}_{\text{CB}}^s)_p$ représentent les matrices de transformations évaluées aux points $((\epsilon_x^s)_p, (\epsilon_y^s)_p)$:

$$(\widehat{\mathbf{T}}_{\text{CB}}^s)_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_B^s} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_p^{-1}(\mathbf{K}_{\text{IB}}^s)_p & \widehat{\mathbf{X}}_p^s \end{bmatrix}, \quad (7)$$

où $\widehat{\mathbf{X}}_p^s$ représentent des matrices de modes à interface fixe exprimées dans des systèmes de coordonnées compatibles [4, 3].

2.2 Modélisation par enrichissement de sous-espaces : incertitudes paramétriques

On considère ici le cas de sous-structures, sans distorsion de maillages, sujettes à des incertitudes paramétriques représentant des variations locales de rigidité. On introduit, pour chaque sous-structure s , un vecteur $\mathbf{p}^s$ de paramètres p_i^s représentant des variables aléatoires indépendantes et continues. On note alors $\mathbf{K}_0^s(\mathbf{p}^s)$ la matrice de rigidité d'une sous-structure s , et $\underline{\mathbf{K}}_0^s$ sa moyenne (espérances mathématique) avec $\mathbf{K}_0^s(\mathbf{p}^s) = \underline{\mathbf{K}}_0^s + \Delta\mathbf{K}_0^s(\mathbf{p}^s)$ où $\Delta\mathbf{K}_0^s(\mathbf{p}^s)$ représente la variation de la matrice de rigidité due aux variations paramétriques. On propose alors d'exprimer le vecteur des déplacements $\mathbf{u}_I^s$ pour les DDLs internes à partir [2] : (i) des modes statiques de la sous-structure de matrice de rigidité moyenne $\underline{\mathbf{K}}_0^s$ (matrice $-(\underline{\mathbf{K}}_{\text{II}}^s)_0^{-1}(\underline{\mathbf{K}}_{\text{IB}}^s)_0$), (ii) des modes à interface fixe de la sous-structure de matrice de rigidité moyenne $\underline{\mathbf{K}}_0^s$, et de matrice de masse moyenne $\underline{\mathbf{M}}_0^s$, (matrice $\widetilde{\mathbf{X}}_0^s$) et (iii) de vecteurs d'enrichissement décrits à partir des réponses statiques de la sous-structure aux variations paramétriques. La base d'enrichissement représente les vecteurs colonnes de $(\underline{\mathbf{K}}_{\text{II}}^s)_0^{-1}\Delta\mathbf{F}_I^s(\mathbf{p}^s)$ avec $\Delta\mathbf{F}_I^s(\mathbf{p}^s)$ la matrice des forces résiduelles résultant des variations paramétriques qui sont ici induites par les modes à interface fixe de la sous-structure :

$$\Delta\mathbf{F}_I^s(\mathbf{p}^s) = -[(\Delta\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0(\mathbf{p}^s)]\widetilde{\mathbf{X}}_0^s. \quad (8)$$

Notons que le sous-espace des vecteurs colonnes de $\Delta\mathbf{F}_I^s(\mathbf{p}^s)$ peut être représenté par les vecteurs colonnes de $-(\Delta\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0\widetilde{\mathbf{X}}_0^s$ où $(\Delta\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0$ représente $(\Delta\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0(\mathbf{p}^s)$ pour certaines valeurs particulières des paramètres $\mathbf{p}^s$ (par exemple, les valeurs extrêmes [1]). Dans ce sens, il est donc possible de proposer une base de vecteurs d'enrichissement qui ne dépendent pas de $\mathbf{p}^s$ et qui, donc, n'ont besoin d'être calculés qu'une seule fois. On propose alors la matrice suivante :

$$\widetilde{\mathbf{T}}_e^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_e^s \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \widetilde{\mathbf{X}}_e^s = -(\underline{\mathbf{K}}_{\text{II}}^s)_0^{-1}(\Delta\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0\widetilde{\mathbf{X}}_0^s. \quad (9)$$

D'un point de vue numérique, il est conseillé de considérer des vecteurs d'enrichissement orthogonaux, et éventuellement un nombre réduit N_e^s de ces vecteurs avec $N_e^s \leq N_{\text{CB}}^s$. La matrice réduite suivante est alors proposée :

$$\widetilde{\mathbf{X}}_e^s \rightarrow \widetilde{\mathbf{U}}_e^s = \mathbf{U}_e^s(:, 1:N_e^s), \quad (10)$$

où $\widetilde{\mathbf{U}}_e^s$ représente la matrice des vecteurs singuliers gauches associées aux N_e^s plus grandes valeurs singulières de $\widetilde{\mathbf{X}}_e^s$. Finalement, les matrices de transformation des sous-structures s'expriment par :

$$\widetilde{\mathbf{T}}_0^s = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I}_{N_B^s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{\text{II}}^s)_0^{-1}(\mathbf{K}_{\text{IB}}^s)_0 & \widetilde{\mathbf{X}}_0^s & \widetilde{\mathbf{U}}_e^s \end{array} \right]. \quad (11)$$

2.3 Modélisation mixte

En combinant les deux approches précédentes, la matrice de transformation suivante peut être proposée pour modéliser une sous-structure sujette à de la variabilité géométrique et à des incertitudes paramétriques :

$$\hat{\mathbf{T}}^s = \sum_{p=1}^8 N_p(\xi^s, \eta^s) \hat{\mathbf{T}}_p^s = \sum_{p=1}^8 N_p(\xi^s, \eta^s) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{N_B^s} & \mathbf{0} \\ \hline -(\mathbf{K}_{II}^s)^{-1}(\mathbf{K}_{IB}^s)_p & \hat{\mathbf{X}}_p^s \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{U}}_e^s \end{array} \right]. \quad (12)$$

Dans ce cas, $\hat{\mathbf{U}}_e^s$ représente la matrice des vecteurs singuliers gauches associés aux N_B^s plus grandes valeurs singulières de la matrice de vecteurs d'enrichissement $\hat{\mathbf{X}}_e^s = -(\mathbf{K}_{II}^s)^{-1}(\Delta\mathbf{K}_{II}^s)_0\hat{\mathbf{X}}_0^s$ où $\hat{\mathbf{X}}_0^s$ représente la matrice des modes à interface fixe de la sous-structure sans distorsion de maillage qui est exprimée dans un système de coordonnées compatible avec ceux des matrices $\hat{\mathbf{X}}_p^s$ [3, 4]. Notons que pour écrire l'équation (12), la propriété $\sum_{p=1}^8 N_p(\xi^s, \eta^s) = 1$ pour les fonctions d'interpolation de Serendip a été utilisée. Les équations d'équilibre dynamique des sous-structures deviennent alors :

$$\left[-\omega^2 \hat{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) + i\omega \hat{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) + \hat{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s) \right] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_B^s \\ \hat{\beta}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B^s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

où $\hat{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = (\hat{\mathbf{T}}^s)^T \mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s) \hat{\mathbf{T}}^s$, $\hat{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) = (\hat{\mathbf{T}}^s)^T \mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s) \hat{\mathbf{T}}^s$ et $\hat{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s) = (\hat{\mathbf{T}}^s)^T \mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s) \hat{\mathbf{T}}^s$. L'équation d'équilibre dynamique d'une structure composée de n^s sous-structures s'obtient par assemblage des matrices réduites (cadre EF).

Dans le cadre de l'approche proposée, les matrices de transformation des sous-structures s'expriment par $\hat{\mathbf{T}}^s = \sum_{p=1}^8 N_p(\xi^s, \eta^s) \hat{\mathbf{T}}_p^s$ (équation (12)). L'intérêt principal est que ces matrices peuvent être facilement recalculées pour s'adapter aux modifications des sous-structures. En effet, pour chaque sous-structure s , cela sous-entend de ne calculer que huit matrices $\hat{\mathbf{T}}_p^s$ (une seule fois), qui sont indépendantes des variations paramétriques. Les matrices de transformation des sous-structures sont alors approximées par interpolation, ce qui est peu coûteux en termes de temps de calculs. L'autre avantage de l'approche proposée concerne le calcul des matrices réduites $\hat{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s)$, $\hat{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\hat{\mathbf{K}}^s(\mathbf{p}^s)$ dans l'équation (13) en considérant des produits matriciels avec $(\hat{\mathbf{T}}^s)^T$ et $\hat{\mathbf{T}}^s$ et dont le nombre peut être considérablement diminué. En effet, dans le cadre de variations paramétriques localisées, les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité des sous-structures peuvent s'exprimer par $\mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s) = \underline{\mathbf{M}}^s + \Delta\mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s)$, $\mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s) = \underline{\mathbf{C}}^s + \Delta\mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s) = \underline{\mathbf{K}}^s + \Delta\mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s)$ où, en pratique, $\Delta\mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s)$, $\Delta\mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s)$ et $\Delta\mathbf{K}^s(\mathbf{p}^s)$ sont des matrices "très creuses" qui peuvent donc facilement être multipliées avec $(\hat{\mathbf{T}}^s)^T$ et $\hat{\mathbf{T}}^s$. Les autres matrices $\underline{\mathbf{M}}^s$, $\underline{\mathbf{C}}^s$ et $\underline{\mathbf{K}}^s$ ne dépendent pas des paramètres incertains. Dans ce sens, les produits matriciels associés à ces matrices s'expriment par :

$$(\hat{\mathbf{T}}^s)^T \underline{\mathbf{M}}^s \hat{\mathbf{T}}^s = \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 N_q(\xi^s, \eta^s) N_p(\xi^s, \eta^s) \left[(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{M}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s \right], \quad (14)$$

$$(\hat{\mathbf{T}}^s)^T \underline{\mathbf{C}}^s \hat{\mathbf{T}}^s = \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 N_q(\xi^s, \eta^s) N_p(\xi^s, \eta^s) \left[(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{C}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s \right], \quad (15)$$

$$(\hat{\mathbf{T}}^s)^T \underline{\mathbf{K}}^s \hat{\mathbf{T}}^s = \sum_{q=1}^8 \sum_{p=1}^8 N_q(\xi^s, \eta^s) N_p(\xi^s, \eta^s) \left[(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{K}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s \right]. \quad (16)$$

Ici, chacun des produits $(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{M}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s$, $(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{C}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s$ et $(\hat{\mathbf{T}}_q^s)^T \underline{\mathbf{K}}^s \hat{\mathbf{T}}_p^s$ doit être calculé 64 fois, ce qui peut être réalisé de manière indépendante aux variations paramétriques. En comparaison, la méthode CB classique nécessiterait de calculer ces produits matriciels un grand nombre de fois, par exemple pour effectuer des simulations de Monte Carlo (fréquemment plus de 1000 produits matriciels). Cela apparaît être un avantage majeur de l'approche proposée.

3 Résultats numériques

L'approche proposée s'appuie sur les matrices de transformation $\hat{\mathbf{T}}^s$ données par l'équation (12) pour décrire des sous-structures sujettes à de la variabilité géométrique et à des incertitudes paramétriques. La

procédure est appliquée pour modéliser deux plaques de Mindlin carrées (1 et 2), encastées sur l'un de leurs côtés et connectées entre elles par 9×3 ressorts (cf. figure 2) pour lesquels les positions des points d'attaches sur la plaque 1 sont susceptibles de varier (zone de maillage distordu illustrée en bleu sur la figure). Les incertitudes paramétriques sont introduites ici en considérant des raideurs aléatoires pour les ressorts, ainsi qu'une zone centrale, carrée, d'épaisseur aléatoire sur la plaque 2 (illustrée en rouge). La plaque 2 est excitée en son centre par une force harmonique transversale. Les caractéristiques "nominales" des deux plaques sont identiques, à savoir : module d'Young de 210×10^9 Pa, densité volumique de 7800 kg/m^3 , coefficient de Poisson de 0.33, dimensions de $1 \times 1 \text{ m}^2$ et épaisseur de 0.002 m. En outre, les dimensions de la partie centrale (en rouge) de la plaque 2 sont de $0.25 \times 0.25 \text{ m}^2$. Le maillage EF de chaque plaque est composé de 40×40 éléments de Mindlin à 4 noeuds et 3 DDLs par noeud. Les matrices d'amortissement des plaques sont de la forme $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$ où $a = 0.05 \text{ s}^{-1}$ et $b = 5 \times 10^{-6} \text{ s}$. Finalement, les ressorts reliant les deux plaques ont pour raideur nominale $k = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$. On s'intéresse ici à la vitesse quadratique (direction transverse) moyennée sur les noeuds de la plaque 1 qui n'appartiennent pas à la zone distordue en bleu sur la figure 2. La réponse en fréquence associée est analysée sur une bande de $[0, 100] \text{ Hz}$.

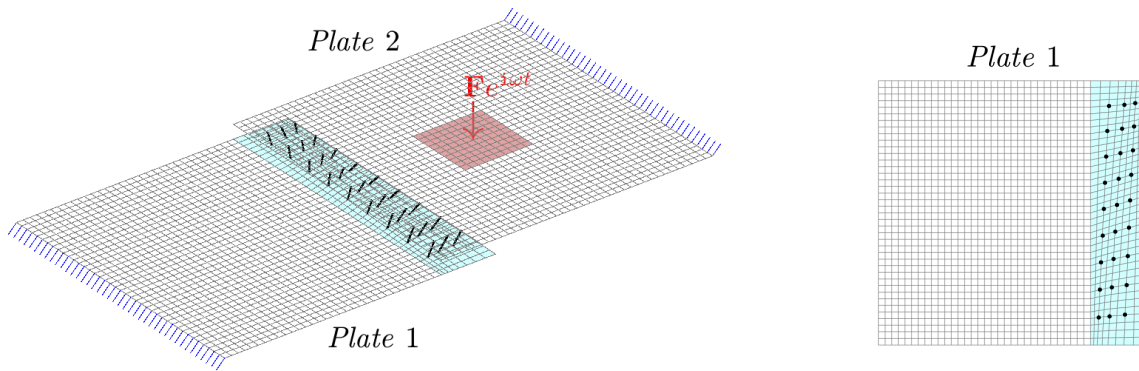


FIGURE 2 – (à gauche) Deux plaques couplées avec variabilité géométrique, ressorts de raideurs aléatoires (traits noirs), et épaisseur aléatoire localisée (zone rouge). (à droite) Maillage EF de la plaque 1. La distorsion de maillage ne concerne que la zone illustrée en bleu.

On propose de décrire la structure globale à partir de deux sous-structures 1 et 2 telles qu'illustrées sur la figure 3 et qui représentent, respectivement, la plaque 1 (incluant la partie avec maillage distordu) avec les ressorts, et la plaque 2 (incluant la partie centrale d'épaisseur aléatoire). La distorsion de maillage de la plaque 1 est obtenue en bougeant les positions de ses noeuds à partir de l'équation (1) où $f_x^s(x, y)$ et $f_y^s(x, y)$ sont nulles excepté sur la partie bleue (figure 2). Les noeuds/DDIs de frontières des sous-structures sont illustrés avec des points rouges sur la figure 3 : ils représentent les DDLs de couplage entre les ressorts et la plaque 2, les DDLs bloqués (encastrement) ainsi que le DDL d'excitation (sous-structure 2). Les nombres de modes à interface fixe pour décrire les sous-structures 1 et 2 sont $N_{CB}^1 = 83$ et $N_{CB}^2 = 68$. Les modes retenus sont ici associés aux fréquences propres qui sont inférieures à cinq fois la fréquence maximale de la bande de fréquence analysée (100 Hz ici), et peuvent être sélectionnés en effectuant une analyse de sensibilité de la réponse de la structure.

Les positions des ressorts sur la plaque 1 sont sujettes à de la variabilité géométrique qui est introduite en considérant une distorsion de maillage, c'est-à-dire à partir de l'équation (1) où, ici, $f_x^s(x, y) = f_x^1(x, y)$ et $f_y^s(x, y) = f_y^1(x, y)$ sont telles que $|f_x^1(x, y)| \leq 1$ et $|f_y^1(x, y)| \leq 2$ sur la zone illustrée en bleu de la figure 2, et $f_x^1(x, y) = 0$ et $f_y^1(x, y) = 0$ ailleurs. Dans l'équation (1), $\epsilon_x^s = \epsilon_x^1$ et $\epsilon_y^s = \epsilon_y^1$ sont deux paramètres réels définis sur $[-\delta^1, \delta^1]$ où $\delta^1 = 0.035 \text{ m}$. En outre, les raideurs des ressorts représentent 27 variables aléatoires, de distribution uniforme, définies sur $[0, 10^5] \text{ N/m}$.

Dans un premier temps, on suppose que la plaque 2 possède une épaisseur constante de 0.002 m. La réponse de la structure, pour une distorsion de maillage donnée et un jeu de raideurs aléatoires (ressorts) donné, est représentée sur la figure 4. La distorsion de maillage considérée ici est celle représentée sur la figure 2. La solution proposée (courbe rouge) est comparée à une solution de référence issue du modèle EF complet de la structure (courbe noire). Dans le cadre de l'approche proposée, $N_e^1 = N_{CB}^1 =$

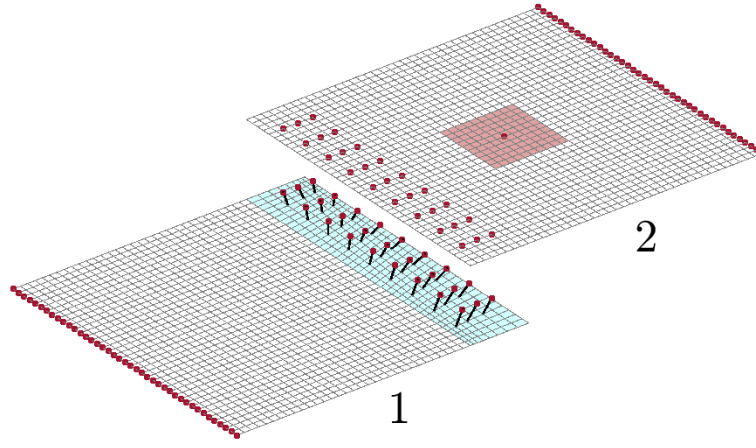


FIGURE 3 – Sous-structures représentant, d’une part, la plaque 1 avec distorsion de maillage et des ressorts de raideurs aléatoires (sous-structure 1), et d’autre part, la plaque 2 avec épaisseur aléatoire localisée (sous-structure 2). Les points rouges représentent les DDLs de frontière.

83 vecteurs d’enrichissement sont considérés pour modéliser la sous-structure 1, en plus des modes interpolés. Le modèle réduit de la structure complète représente ici 262 DDLs, par rapport à 9840 DDLs pour le modèle complet. La réponse de la structure pour des ressorts de raideur nominale $k = 5 \times 10^4$ N/m est également tracée pour comparaison. On remarque premièrement que la réponse de la structure avec raideurs aléatoires est différente de celle obtenue en considérant des raideurs nominales (par soucis de clarté, la réponse de la structure sans distorsion de maillage n’a pas été tracée : elle est cependant fortement différente de la structure avec maillage distordu). La bande de fréquence analysée couvre plusieurs résonances globales de la structure, mais également les résonances locales des sous-structures. Cela représente dans l’ensemble un spectre fréquentiel irrégulier présentant une densité modale non uniforme ainsi que des pics de résonance d’amplitudes différentes. Sur cette bande de fréquence, on montre que la solution issue de l’approche proposée est très proche de la solution de référence (figure 4).

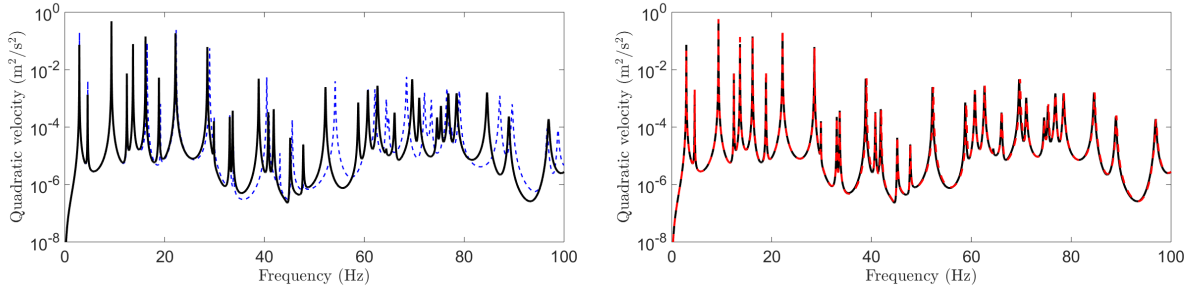


FIGURE 4 – Réponse en fréquence des plaques couplées avec variabilité géométrique et incertitudes paramétriques (ressorts avec raideurs aléatoires) : (courbe noire) référence ; (à gauche, courbe bleue) structure avec raideurs nominales ; (à droite, courbe rouge) approche proposée.

On considère à présent le cas où la structure présente une zone localisée d’épaisseur aléatoire $0.002 \text{ m} \pm 30\%$ (probabilité uniforme) sur la plaque 2, en plus des ressorts avec raideurs aléatoires. Dans ce cas $N_e^1 = N_{CB}^1 = 83$ vecteurs d’enrichissement sont considérés pour la sous-structure 1 (comme avant), et $N_e^2 = 30$ vecteurs d’enrichissement sont considérés pour la sous-structure 2. Ici, le modèle réduit représente 292 DDLs. La réponse en fréquence de la structure, pour un jeu de paramètres aléatoires donné (27 raideurs et 1 épaisseur), issue de l’approche proposée est tracée sur la figure 5 avec celle issue du modèle EF complet. Afin d’observer l’influence de la variation d’épaisseur sur la réponse dynamique, la réponse induite par une épaisseur nominale constante $h = 0.002 \text{ m}$ de la plaque 2 est également représentée. Dans ce cas également, l’approche proposée prédit avec précision la réponse dynamique de la structure sans ambiguïté. L’intérêt principal de la méthode réside dans la réduction des temps de calculs pour obtenir les réponses en fréquence de la structure, ce qui représente ici plus de 95% par rapport à la méthode EF

classique.

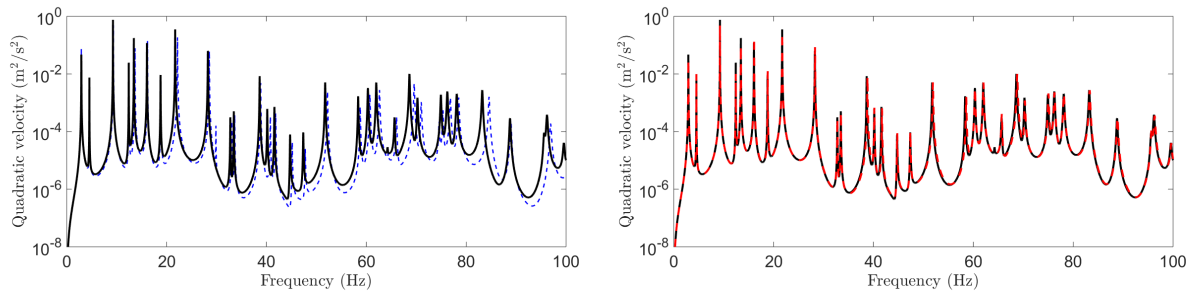


FIGURE 5 – Réponse en fréquence des plaques couplées avec variabilité géométrique et incertitudes paramétriques (ressorts avec raideurs aléatoires et épaisseur aléatoire localisée) : (courbe noire) référence ; (à gauche, courbe bleue) structure avec raideurs aléatoires et épaisseur nominale ; (à droite, courbe rouge) approche proposée.

4 Conclusion

Une méthode de réduction de modèles a été proposée pour décrire des structures composées de sous-structures sujettes à de la variabilité géométrique et à des incertitudes paramétriques. La variabilité géométrique est introduite en considérant des maillages distordus qui sont gérés par des fonctions de forme qui peuvent être décrites de manière indépendante entre les sous-structures. Les incertitudes paramétriques représentent des variations locales de la rigidité des sous-structures. L'approche proposée concerne le développement de matrices de transformation des sous-structures, pouvant être facilement recalculées pour s'adapter aux modifications de leurs propriétés, qui sont définies à partir des matrices interpolées des modes de composants (CB) et des matrices de vecteurs d'enrichissement (correction statique). Dans ce cadre, chaque matrice de transformation (pour chaque sous-structure) peut être estimée par interpolation à partir de huit matrices qui ne nécessitent d'être calculées qu'une seule fois. Cela réduit, en outre, le temps requis pour calculer les matrices réduites des sous-structures en limitant le nombre d'opérations matricielles avec les matrices de transformation, ce qui apparaît grandement avantageux pour effectuer des simulations de Monte Carlo.

Références

- [1] E. Balmès. *Parametric families of reduced finite element models theory and applications*, Mechanical Systems and Signal Processing 10 (4), 81–394, 1996.
- [2] G. Masson, B. Ait Brik, S. Cogan, N. Bouhaddi. *Component mode synthesis (CMS) based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization*, Journal of Sound and Vibration 296, 845–860, 2006.
- [3] J.-M. Mencik. *Model reduction based on matrix interpolation and distorted finite element meshes for dynamic analysis of 2D nearly periodic structures*, Finite Elements in Analysis and Design 188, 103518, 2021.
- [4] H. Panzer, J. Mohring, R. Eid, B. Lohmann. *Parametric model order reduction by matrix interpolation*, at-Automatisierungstechnik 58 (8), 475–484, 2010.